Réduction des intégrales premières symboliques des champs de vecteurs du plan

Thierry COMBOT

May 20, 2021

Intégrales premières symboliques

Nous nous intéressons à la résolution algébrique du système

$$(S): \quad \dot{x} = A(x,y),\ \dot{y} = B(x,y), \quad A, B \in \mathbb{Q}(x,y)$$

$\dot{}$ désigne la dérivation par rapport au temps, $\dot{t} = 1$.

D désigne la dérivation $A\partial_x + B\partial_y$.

Une intégrale première est une fonction $\mathcal{F}$ telle que $D(\mathcal{F}) = 0$.

Si $A \neq 0$, on peut exprimer y en fonction de x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{B}{A}(x, y(x))$$

On peut supposer quitte à translater que $A(0,0) \neq 0$ et noter $y(x,h)$ la solution de

$$\frac{\partial y(x,h)}{\partial x} = \frac{B}{A}(x, y(x,h)), \quad y(0,h) = h$$

On note $\bar{}$ la dérivation en h, et on s'intéresse aux relations dans

$$\mathcal{O}(h)[x, y, \bar{y}, \bar{\bar{y}}, \dots]$$

Théorème (G. Casale)

L'idéal $\mathcal{I}$ de ces polynômes différentiels est généré par au plus un élément de la forme

$$F(x,y)-F(0,h),\bar{y}F(x,y)+\bar{\bar{\bar{y}}}/\bar{y}-F(0,h),$$

$$\bar{y}^kF(x,y)-F(0,h),4\bar{y}^2F(x,y)-2\bar{\bar{\bar{\bar{y}}}}/\bar{y}+3\bar{\bar{y}}^2/\bar{y}^2-4F(0,h)$$

avec $F\in\mathbb{C}(x,y), k\in\mathbb{N}$.

Les fonctions $y(x), \bar{y}(x), \ldots$ satisfont le système (S')

$$\begin{aligned}
\partial_x y &= \frac{B}{A}\\
\partial_x \bar{y} &= \bar{y}\partial_y\left(\frac{B}{A}\right)\\
\partial_x \bar{\bar{y}} &= \bar{\bar{y}}\partial_y\left(\frac{B}{A}\right) + \bar{y}^2\partial_y^2\left(\frac{B}{A}\right)\\
\partial_x \bar{\bar{\bar{y}}} &= \bar{\bar{\bar{y}}}\partial_y\left(\frac{B}{A}\right) + 3\bar{\bar{y}}\bar{y}\partial_y^2\left(\frac{B}{A}\right) + \bar{y}^3\partial_y^3\left(\frac{B}{A}\right)
\end{aligned}$$

avec $\bar{y}(0,h) = \partial_h y(0,h), \bar{\bar{y}}(\alpha,h) = \partial_h^2 y(0,h), \ldots$.

Être un élément de $\mathcal{I} \Leftrightarrow$ Être une intégrale première de (S').

Définition

- *Une intégrale première rationnelle $\mathcal{I}$ est solution de*

$$\mathcal{I} - F(x,y) = 0 \qquad F \in \mathbb{C}(x,y)/\mathbb{C} \tag{1}$$

- *Une intégrale première k-darbouxienne $\mathcal{I}$ est solution de*

$$\partial_y \mathcal{I} - F(x,y)^{1/k} = 0, \qquad F \in \mathbb{C}(x,y)^* \tag{2}$$

- *Une intégrale première liouvillienne $\mathcal{I}$ est solution de*

$$\partial_y^2 \mathcal{I} - F(x,y)\partial_y \mathcal{I} = 0 \qquad F \in \mathbb{C}(x,y) \tag{3}$$

- *Une intégrale première Ricatti $\mathcal{I}$ est quotient de solutions de*

$$\partial_y^2 \mathcal{I} - F(x,y)\mathcal{I} = 0, \qquad F \in \mathbb{C}(x,y) \tag{4}$$

Proposition

- *L'équation 1 définit $\mathcal{I}$ de façon unique.*
- *L'équation 2 définit $\mathcal{I}$ à l'addition d'une constante près.*
- *L'équation 3 définit $\mathcal{I}$ à transformation affine près.*
- *L'équation 4 définit $\mathcal{I}$ à homographie près.*

Proposition

Le système (S) *admet une intégrale première associée à* (1),(2),(3),(4) *si et seulement si*

$$F(x,y), \bar{y}^k F(x,y), \bar{y}F(x,y)+\bar{\bar{y}}/\bar{y}, 4\bar{y}^2F(x,y)-2\bar{\bar{\bar{y}}}/\bar{y}+3\bar{\bar{y}}^2/\bar{y}^2$$

sont respectivement des intégrales premières de (S').

Exemples d'intégrales premières

$$\dot{x} = x,\ \dot{y} = 10^9 y,\ N = 2$$

$$\mathcal{F}(x,y) = x^{-10^9} y$$

$$\dot{x} = 3x^3 - 3xy^2 - 10y^2 - 3x,\ \dot{y} = y(3x^2 - 3y^2 - 10x - 3),\ N = 3$$

$$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left(\frac{x}{y} - \frac{\varepsilon\sqrt{x^2 - y^2}}{y} \right)^3 \left(\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 - y^2 - 1} - \frac{2\varepsilon\sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 - y^2 - 1} \right)^5$$

$$\dot{x} = 2x^2 + xy + 1,\ \ \dot{y} = -2(2x+y)x,\ \ N = 3$$

$$\mathcal{F}(x,y) = 2e^{-(2x+y)^2/4}x - \sqrt{\pi}\mathrm{erf}\left(\frac{2x+y}{2}\right)$$

$$\dot{x} = (2x-1)^2(2x+1),\ \ \dot{y} = 2y^2(6x-2y-1),\ \ N = 3$$

$$\mathcal{F}(x,y) = \int e^{\frac{1}{y}} y^{\frac{3}{2}} (2x-y-1)^{\frac{3}{2}} dy + e^{\frac{1}{y}} \frac{2(6x-2y-1)(2x-y-1)^{\frac{3}{2}}}{y^{-\frac{7}{2}}(2x-1)^2(2x+1)} dx$$

$$\dot{x} = x^2 + y,\ \ \dot{y} = 1$$

On trouve une equation définissant une intégrale première Ricatti

$$\partial_y^2 \mathcal{I} - \frac{4x^4y - 8x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 - 4xy + 3}{4(x^2-y)^2}\mathcal{I} = 0$$

Il faut faire le quotient de deux solutions indépendantes, qui s'expriment ici avec les fonctions d'Airy

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{y\mathrm{Bi}(x) + \mathrm{Bi}'(x)}{y\mathrm{Ai}(x) + \mathrm{Ai}'(x)}$$

$$\dot{x} = 1,\ \dot{y} = -(9x^2+36x+17)y^3 - 3xy^2.$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} - \frac{3P}{4(9x^2y+36xy+17y-6)^2y^3}\mathcal{F} = 0,$$

avec

$$P = 81x^4y^3 + 648x^3y^3 - 18x^3y^2 + 1602x^2y^3 - 180x^2y^2 +$$

$$1224xy^3 + 3x^2y - 466xy^2 + 289y^3 + 24xy - 204y^2 + 36y - 2.$$

Cette équation s'intègre avec des fonctions de Bessel, mais trouver la formule n'est pas évident!

Le problème de Poincaré consiste à déterminer l'existence d'intégrales premières rationnelles.

Problème: c'est trop difficile! (pour moi)

Remarque: les équations différentielles, ce serait tellement plus facile si on nous donnait la solution plutôt que l'équation...

Car du coup, si on a la solution, il suffit de voir si elle est algébrique...

$$\dot{x} = \lambda x^3 - \lambda x y^2 - 2\mu y^2 - \lambda x, \quad \dot{y} = \lambda x^2 y - \lambda y^3 - 2\mu x y - \lambda y$$

admet l'intégrale première $\mathcal{F}(x,y) =$

$$\int -\frac{\lambda x^2 - \lambda y^2 - 2\mu x - \lambda}{\sqrt{x^2-y^2}(x^2-y^2-1)}dx + \frac{\lambda x^3 - \lambda x y^2 - 2\mu y^2 - \lambda x}{(x^2-y^2-1)\sqrt{x^2-y^2}y}dy$$

Problème: Il ne suffit pas de tester si l'intégrale est rationnelle

$$\mathcal{F}(x,y) = \lambda \ln\left(\frac{x}{y} - \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}\right) + \mu \ln\left(\frac{x^2-y^2+1}{x^2-y^2-1} - 2\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2-1}\right)$$

$\Rightarrow$ Si $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}$, il existe une intégrale première rationnelle.

Il ne suffit pas d'intégrer sous forme élémentaire

$$\dot{x} = y^2+4\,x-9\,x^2+22\,y\,(1-2\,x)\,,\quad \dot{y} = 33x^2-33y^2+6\,y\,(1-2\,x)$$

On trouve une intégrale première liouvillienne avec $F(x,y) =$

$$\frac{(x-\frac{1}{2})(27\,x^4-12\,x^2y^2-7\,y^4-12\,x^3+24\,xy^2-8\,y^2)-\frac{y}{5}(81\,x^4+24\,x^2y^2-y^4-171\,x^3-13\,xy^2+105\,x^2+y^2-20\,x)}{\frac{3}{20}(9\,x^4+6\,x^2y^2+y^4-4\,x^3-12\,xy^2+4\,y^2)(20xy-22y+9x^2-y^2-4\,x)}$$

Mais cela s'intègre en une intégrale 6-darbouxienne

$$\int \frac{3(11\,x^2-4\,xy-11\,y^2+2\,y)}{(9\,x^4+6\,x^2y^2+y^4-4\,x^3-12\,xy^2+4\,y^2)^{5/6}}\,dx + \frac{9\,x^2+44\,xy-y^2-4\,x-22\,y}{(9\,x^4+6\,x^2y^2+y^4-4\,x^3-12\,xy^2+4\,y^2)^{5/6}}\,dy$$

Cette intégrale s'écrit $E(R(x,y))$ avec E une intégrale elliptique et R rationnel.

On classe les intégrales premières symboliques par "complexité"

$$\text{Rationnel} < \text{Darbouxien} < \text{Liouvillien} < \text{Riccati}$$

Théorème

Soit X un champ de vecteur admettant une intégrale première Riccati $\mathcal{F}$ définie par son $F \in \mathbb{Q}(x, y)$ associé. Savoir si une intégrale première plus simple existe et la trouver est décidable.

Théorème

Soit X un champ de vecteur admettant une intégrale première liouvillienne $\mathcal{F}$ définie par son $F \in \mathbb{Q}(x, y)$ associé. Savoir si une intégrale première plus simple existe et la trouver est décidable.

Théorème

Soit X un champ de vecteur admettant une intégrale première k-darbouxienne $\mathcal{F}$ définie par son $F \in \mathbb{Q}(x, y)$ associé. Si $k \neq 2, 3, 4, 6$ ou $\mathcal{F}$ admet au moins un pôle, savoir si une intégrale première plus simple existe et la trouver est décidable.

Réduction des intégrales liouviliennes

Si $\mathcal{F}(x,y) = f(J(x,y))$ avec $\partial_y J \in \mathbb{C}(x,y)$, en dérivant on obtient

$$F(x,y) = \frac{\partial_y^2 J(x,y)}{\partial_y J(x,y)} + (\partial_y J(x,y))\frac{f''}{f'}(J(x,y))$$

Cas 1: Pas d'intégrale première rationnelle. On considère l'équation

$$\frac{F(x,y) - \frac{\partial_y^2 J(x,y)}{\partial_y J(x,y)}}{\partial_y J(x,y)} = h.$$

Si f''/f' n'est pas constant, cela définit une courbe algébrique $\mathcal{C}_h$.
$\Rightarrow \exists h$ tel que $J_{|\mathcal{C}_h}$ non constant et $\frac{f''}{f'}(J_{|\mathcal{C}_h}) = h$.
$\Rightarrow \frac{f''}{f'}$ constant égal à h.

$\Rightarrow f(z) = az + b$ ou $f(z) = ae^{bz} + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Donc $\mathcal{F}$ est k-darbouxien, ou est l'exponentiel d'un darbouxien.

Cas 2: $\exists$ intégrale première rationnelle.
En supposant J indécomposable, on a

$$\frac{f''}{f'} \in \mathbb{C}(z) \Rightarrow f(z) = \int e^{\int g(z)dz} dz, \quad g \in \mathbb{C}(z)$$

Si f a une singularité z_1 avec exposant irrationnel il en existe une autre z_2, et

$$\text{sqrtfree}(\text{num}(J - z_i))) \mid \text{den}(F), \quad i = 1, 2$$

ce qui suffit à retrouver J.

Sinon f admet au moins une singularité essentielle.

$$e^{\int g(z)dz} = K(z)^{1/k} e^{L(z)}, \quad K, L \in \mathbb{C}(z),\ k \in \mathbb{N}^*$$

$$\int^{J(x,y)} K(z)^{1/k} e^{L(z)} dz = \mathcal{F}(x, y)$$

$$\partial_y J(x, y) K(J(x, y))^{1/k} e^{L(J(x,y))} = \partial_y \mathcal{F}(x, y) = e^{F_0(x,y)} \prod F_i(x, y)^{\lambda_i}$$

Donc F_0 est fonction de J donc intégrale première rationnelle.

$\Rightarrow$ F_0 peut être obtenue par décomposition de Hermite du facteur intégrant.

Réduction des intégrales Riccati

On a $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}\mathcal{F}_1$ où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ forment une base de solutions d'une equation d'ordre 2.

Si $\mathcal{F}$ est elle même liouvillienne, le wronskien donne une équation d'ordre 1 pour $\mathcal{F}_1$ à coefficients liouvilliens.

Donc $\mathcal{F}_1$ puis $\mathcal{F}_2$ sont liouvilliens.

L'agorithme de Kovacic permet de détecter ce cas.

On peut alternativement définir $\mathcal{F}$ avec la dérivée Schwartzienne

$$S_y(\mathcal{F}) = \frac{\partial_y^3 \mathcal{F}}{\partial_y \mathcal{F}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_y^2 \mathcal{F}}{\partial_y \mathcal{F}}\right)^2 = -2F$$

Si $\mathcal{F}(x,y) = f(J(x,y))$, on applique la dérivée Schwartzienne

$$\left(\frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)(J(x,y)) =$$

$$-2\frac{F(x,y)}{(\partial_y J(x,y))^2} - \frac{\partial_y^3 J(x,y)}{(\partial_y J(x,y))^3} + \frac{3(\partial_y^2 J(x,y))^2}{2(\partial_y J(x,y))^4}$$

Le membre de droite est une fonction hyperexponentielle $U(x,y)$.

Si U n'est pas constant, on considère la courbe $\mathcal{C}_h = \{U(x,y) = h\}$.

Si J n'est pas darbouxienne, alors J n'est pas constante sur $\mathcal{C}_h$ pour h générique.

Si J est darbouxienne non rationnelle, alors $U(x,y)$ est algébrique.

Donc J non constante sur la courbe algébrique $\mathcal{C}_h$.

$\Rightarrow \left(\frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)(z) = h$ sur un ouvert.

Les solutions de cette equation sont de la forme

$$f(z)=a\tan(bz+c)+d,\quad f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$\Rightarrow$ $f(J)$ est donc liouvillien, cela aurait déjà été détecté.

Si J est rationnel indécomposable, $U(x,y)=-2u(J(x,y))$ et

$$\left(\frac{f'''}{f''}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)(z)=-2u(z)$$

$\Rightarrow$ On écrit $f=f_1/f_2$ où f_1,f_2 forment une base de solutions de

$$f_i''(z)-u(z)f_i(z)=0$$

Soit z_1 une singularité avec une différence d'exposants irrationnelle, un log ou irrégulière.

$\Rightarrow f(J)$ est singulier le long de la courbe $J(x,y) = z_1$.

Si deux telles singularités: on obtient que

$$\mathrm{sqrtfree}(\mathrm{numer}(J - z_i))) \mid \mathrm{den}(F), \quad i = 1, 2$$

ce qui suffit à retrouver J.

Une seule telle singularité: Par homographie, on l'envoie à l'infini.

Si l'infini est irrégulier, on note $u(z) = az^r + o(z^r)$ où $r \geq -1$.

$$2(\partial_y J(x,y))^2 u(J(x,y) - 2F(x,y) = \frac{\partial_y^3 J(x,y)}{\partial_y J(x,y)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_y^2 J(x,y)}{\partial_y J(x,y)}\right)^2.$$

Un facteur de denom(J) de multiplicité p sera un pôle de multiplicité $-p(r+2)-2$ dans le terme de gauche.

$\Rightarrow$ Pas de compensation, donc F a un pole de multiplicité p aussi.

De même sur la ligne à l'infini $\Rightarrow$ den$(J) \mid$ den(F) et borne sur son deg(J).

Si l'infini est régulier, on sait juste que $J \in \mathbb{C}[x, y, 1/\mathrm{den}(F)]$.

Toutes les autres singularités z_i ont des différences d'exposants rationnelles de dénominateur m_i.

Un facteur de $J - z_i$ est de multiplicité p avec $p \notin m_i\mathbb{Z}$, alors $f(J)$ aura un pöle et apparaitra dans $\mathrm{den}(F)$.

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{p} (J - z_i)^{\mathrm{ppcm}(m)/m_i} = V^{\mathrm{ppcm}(m)} M$$

avec M des facteurs de $\mathrm{den}(F)$, et $V \in \mathbb{C}[x, y]$.

Lemme

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{C}[z]$ *dont les racines on des multiplicités* $<k$, $S\in\mathbb{C}[x,y]$ *sans facteurs carrés et* $M\in\mathbb{C}[x,y]$ *divisant une puissance de* S. *On considère l'équation* $P(J)=V^kM$ *avec* $J,V\in\mathbb{Q}[x,y,S^{-1}]$. *Si*

- $k\geq 3$ *impair*, $\sharp P^{-1}(0)\geq 2$, *ou*
- $k\geq 3$ *pair*, $\sharp P^{-1}(0)\geq 2$ *et* P *n'est pas une* $k/2$ *puissance, ou*
- $k=2, \sharp P^{-1}(0)\geq 3$,

alors

$$\max(\deg num(J),\deg den(J))\leq 6\max(0,\deg S-1)$$

S'il n'y avait qu'une singularité finie, la monodromie serait finie, et comme l'infini est régulier, le groupe de Galois serait fini.

$\Rightarrow$ Ce cas aurait déjà été détecté, donc $\sharp P^{-1}(0) \geq 2$.

Si $\text{ppcm}(m) \geq 3$ et P est une puissance $\text{ppcm}(m)/2$, alors $m_i \in \{1, 2\}$ et donc $\text{ppcm}(m) \in \{1, 2\}$.

Le lemme s'applique dans tous les cas et permet de borner J sauf si $k = 2, \sharp P^{-1}(0) = 2$.

A homographie près, on met les singularités en ± 1, et les solutions f_i sont de la forme

$$(1 - z^2)^{1/4} e^{\pm \frac{1}{2} i \lambda \arcsin(z)}, \text{ ou } (1 - z^2)^{1/4} \arcsin(z)^{\epsilon}, \ \epsilon = 0, 1$$

$\Rightarrow$ ce cas aurait déjà été détecté.

Toutes les singularités ont des différences d'exposants rationnels:
On a de même l'équation

$$\prod_{i=1}^{p}(J-z_i)^{\mathrm{ppcm}(m)/m_i} = V^{\mathrm{ppcm}(m)}M, \quad J,V\in\mathbb{C}(x,y)$$

A y fixé, (J,V) est une application de la courbe $M(X,y)=Y^k$ de genre g' vers la courbe $\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mathrm{ppcm}(m)/m_i}=Y^k$ de genre g.

Lemme

Les courbes $y^k=P(x)$ de genre ≥ 2 sont de genre $\geq k/12+1$.

$$\deg(J,V)\leq \frac{g'-1}{g-1}\leq \frac{(k-1)(\deg \mathrm{den}(F)+1)-2k}{\frac{k}{6}}\leq 6(\deg \mathrm{den}(F)-1)$$

Les courbes $y^k = P(x)$ de genre 1 à homographie près sont

$$y^2 = x(x-1)(x-a),\ y^3 = x(x-1),\ y^3 = x^2(x-1)^2,$$

$$y^4 = x^2(x-1),\ y^4 = x^2(x-1)^3,\ y^6 = x^3(x-1)^2,\ y^6 = x^3(x-1)^4$$

Ces cas mènent aux équations pour f_1, f_2

$$f_i''(z) - \left(\frac{n_1 - 1/2}{z} + \frac{n_2 - 1/2}{z-1} + \frac{n_3 - 1/2}{z-a}\right) f_i'(z)$$
$$-\frac{(n_4 - n_3 - n_1 - n_2 + 1)(n_4 + n_3 + n_1 + n_2)z + 4q}{4(z-a)z(z-1)} f_i(z) = 0$$

avec $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C} - \{0,1\}, q \in \mathbb{C}$.

$$f_i''(z) - \frac{1}{36}\left(\frac{9k_1^2 - 12k_1 - 5}{z^2} + \frac{9k_1^2 + 9k_2^2 - 9k_3^2 - 12k_1 + 6k_2 - 6k_3 - 5}{z} + \frac{9k_2^2 + 6k_2 - 8}{(z-1)^2} + \frac{-9k_1^2 - 9k_2^2 + 9k_3^2 + 12k_1 - 6k_2 + 6k_3 + 5}{z-1}\right) f_i(z) = 0$$

$$f_i''(z) + \frac{1}{64}\left(4\,\frac{4\,{k_1}^2 - 4\,k_1 - 3}{z^2} + 4\,\frac{4\,{k_1}^2 + 4\,{k_2}^2 - 4\,{k_3}^2 - 4\,k_1 + 2\,k_2 - 2\,k_3 - 3}{z} + 4\,\frac{-4\,{k_1}^2 - 4\,{k_2}^2 + 4\,{k_3}^2 + 4\,k_1 - 2\,k_2 + 2\,k_3 + 3}{z-1} + \frac{16\,{k_2}^2 + 8\,k_2 - 15}{(z-1)^2}\right) f_i(z) = 0$$

$$f_i''(z)+\frac{1}{144}\left(9\,\frac{4\,{k_1}^2-4\,k_1-3}{z^2}+12\,\frac{3\,{k_1}^2+3\,{k_2}^2-3\,{k_3}^2-3\,k_1+2\,k_2-k_3-2}{z}+\right.$$

$$\left.12\,\frac{-3\,{k_1}^2-3\,{k_2}^2+3\,{k_3}^2+3\,k_1-2\,k_2+k_3+2}{z-1}+4\,\frac{9\,{k_2}^2+6\,k_2-8}{(z-1)^2}\right)f_i(z)=0$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Toutes les équations sont résolubles.

Les courbes $y^k = P(x)$ de genre 0 à homographie près sont $y^k = x^l$.

$\Rightarrow$ une seule singularité finie, le groupe de Galois serait fini.

$\Rightarrow$ ces cas auraient déjà été détectés.

Réduction des intégrales k darbouxiennes

Si $k = 1$, alors les intégrales sont élémentaires et on trouve

$$F_0(x, y) + \sum \lambda_i \ln F_i(x, y) = f(J(x, y)) \Leftrightarrow$$

$$(F_0 = 0, \dim_{\mathbb{Q}} \lambda_i = 1) \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \{F_i, F_j\} = 0 \;\; \forall i, j$$

Si $\int R^{1/k} B dx - R^{1/k} A dy$ est une intégrale première réductible, alors

$$\int R^{1/k} B dx - R^{1/k} A dy = f(J(x, y)), \; \mathcal{F} \in \mathbb{Q}(x, y)$$

En dérivant, et en supposant J indécomposable, on en déduit que

$$(f'(J(x, y)))^k \in \mathbb{Q}(x, y) \text{ et } (f')^k \in \mathbb{C}(z)$$

$\Rightarrow$ f est une intégrale superelliptique.

Si f' a un pole en z_0 alors $\omega = R^{1/k}Bdx - R^{1/k}Ady$ a un pôle le long de $J(x,y) = z_0$.

$\Rightarrow$ si f admet au moins 2 pôles, alors $\exists h$ homographie telle que

$$\mathrm{den}(\partial_y \ln(h(J))) \mid \mathrm{den}(\omega)$$

On peut tester l'existence avec l'extatique 1-Darbouxienne, puis tenter de la réduire.

Si f' a un unique pôle, on peut le placer à l'infini en composant par une homographie.

$\Rightarrow \mathrm{sqrtfree}(\mathrm{den}(J)) \mid \mathrm{den}(\omega)$

Si f' n'a pas de pôle, ω non plus (et pas d'information sur J).

On a une autre condition

$$\exists P \in \mathbb{C}[z], P(J)^{1/k} \in R^{1/k}\mathbb{C}(x,y)$$

$$\Leftrightarrow P(J) = RV^k, \;\; J, V \in \mathbb{C}(x,y)$$

C'est une équation superelliptique à résoudre dans $\mathbb{C}(x,y)$.

Si J est indécomposable, alors $J-\alpha$ est une puissance pure pour au plus 3 valeurs.

$\Rightarrow \deg P \leq 3 +$ nombre de facteurs de R

Formes canoniques possibles pour f

Genre $g=0$: $f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)\sqrt{1-z^2}}$.

Admet une intégrale élémentaire, donc $\int\omega$ doit être élémentaire.

Genre $g=1$:

$$f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)\sqrt{z^3+az+b}},\, f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)(z(z-1))^{2/3}},$$

$$f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)(z^2(z-1)^3)^{1/4}},\, f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)(z^3(z-1)^4)^{1/6}}$$

$\Rightarrow$ Si $k>6$, $g\geq 2$, f n'est pas une intégrale elliptique.

Si f a au moins un pôle, on note $S = \mathrm{den}(\omega)$, et on résout

$$P(J) = RV^k, \quad J, V \in \mathbb{C}[x, y, S^{-1}]$$

dont on sait borner le degré des solutions pour $\sharp P^{-1}(0) \geq 3$.

Si $k > 6$, f n'est pas elliptique, et on résout

$$P(J) = RV^k, \quad J, V \in \mathbb{C}(x, y)$$

dont on sait borner le degré des solutions pour $\sharp P^{-1}(0) \geq 3$.

Pour le genre 1 sans pôle, on obtient les équations

$$J(J-1)(J-a)=RV^2,\quad J^2(J-1)^2=RV^3$$

$$J^2(J-1)^3=RV^4,\quad J^3(J-1)^4=RV^6,\ J,V\in\mathbb{C}(x,y).$$

L'ensemble des solutions forme un groupe abélien, le groupe de Mordell Weil.

Étant donné $R_1,\dots,R_p$ une base de ce groupe, il suffit de résoudre le système linéaire

$$\mathcal{F}(x,y)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(R_i),\quad \lambda_i\in\mathbb{Q}$$

Problème: Trouver une telle base est difficile...

Un exemple de Lins Neto.

$$\dot{x} = y^2+4x-9x^2+2(2\alpha+1)y(1-2x),\ \dot{y} = 3(2\alpha+1)(x^2-y^2)+6y(1-2x)$$

Il possède une intégrale première 6-darbouxienne

$$\int \frac{9x^2+4(2\alpha+1)xy-y^2-4x-2(2\alpha+1)y}{(9x^4+6x^2y^2+y^4-4x^3-12xy^2+4y^2)^{5/6}}dx+\frac{9x^2+60xy-y^2-4x-30y}{(9x^4+6x^2y^2+y^4-4x^3-12xy^2+4y^2)^{5/6}}dy$$

Cependant cette intégrale peut s'écrire autrement

$$\int^{\frac{4(y-x)^3}{9x^4+6x^2y^2+y^4-4x^3-12xy^2+4y^2}}\frac{dz}{((z-1)^3z^4)^{1/6}}-\int^{\frac{4(2x-1)^3}{9x^4+6x^2y^2+y^4-4x^3-12xy^2+4y^2}}\frac{\alpha dz}{((z-1)^3z^4)^{1/6}}$$

$\Rightarrow \wp(I)$ pour α entier d'Eisenstein est algébrique, donc il existe une intégrale première rationnelle.