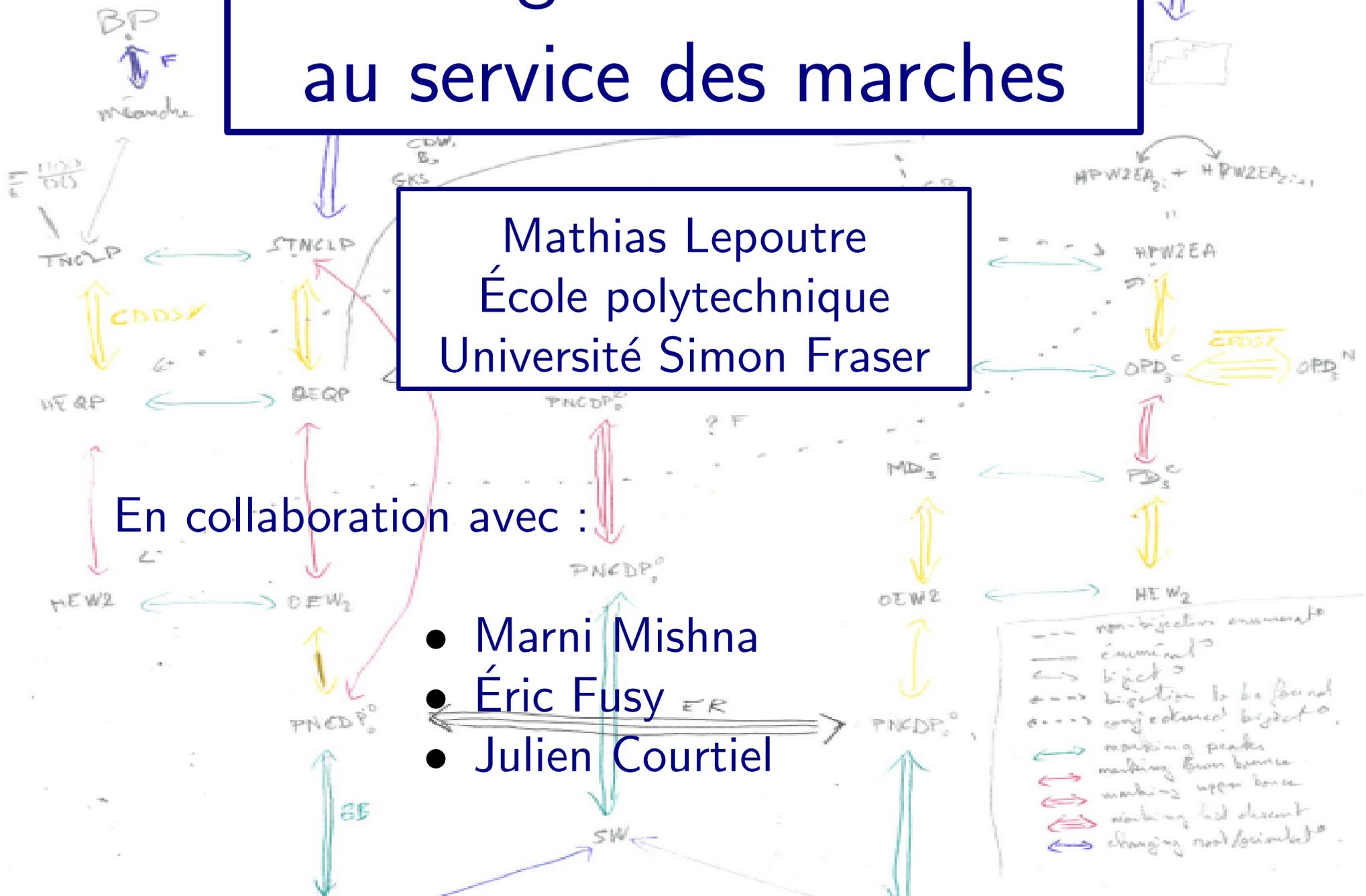


# Les diagrammes ouverts au service des marches

Mathias Lepoutre  
 École polytechnique  
 Université Simon Fraser

En collaboration avec :

- Marni Mishna
- Éric Fusy
- Julien Courtiel



# Partie I Introduction

## Partie II Le cas Simple

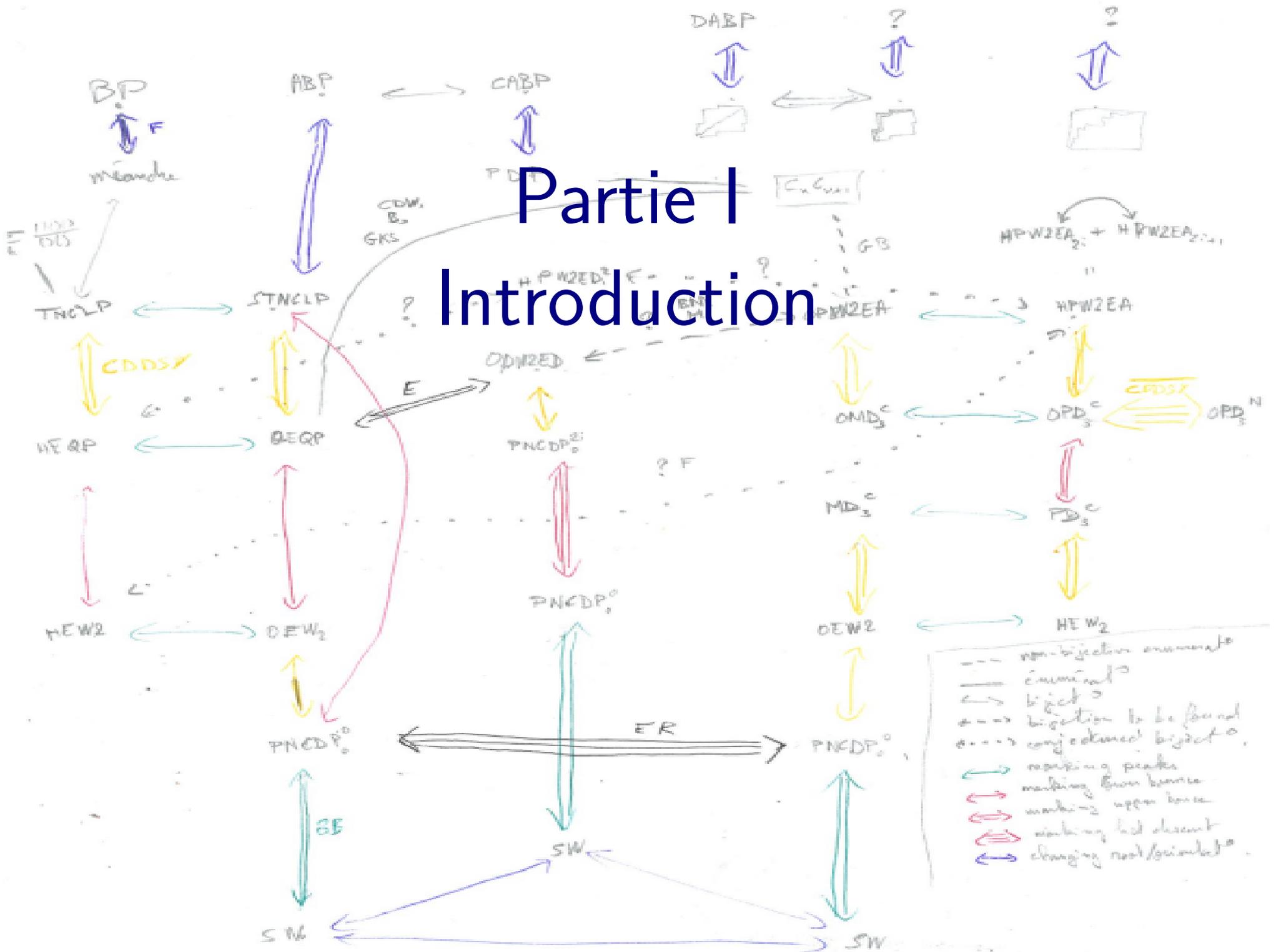
### Partie III Le cas Hésitant

### Partie IV Utilisation de cartes orientées



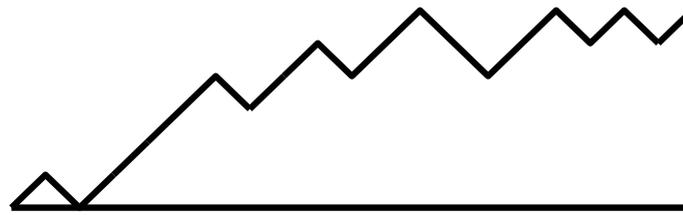
# Partie I

## Introduction

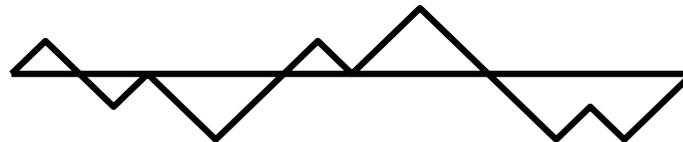


# Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

chemin positif

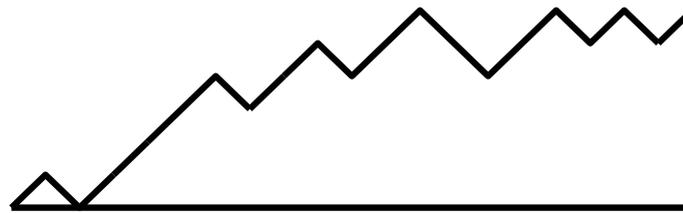


excursion



# Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

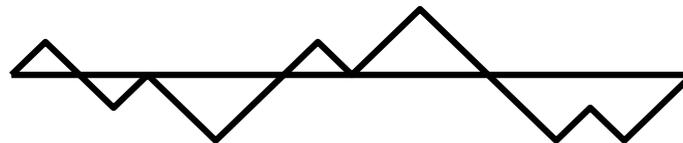
chemin positif



excursion positive avec  
pas 1-0 marqués

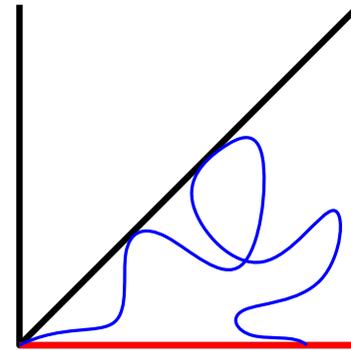


excursion

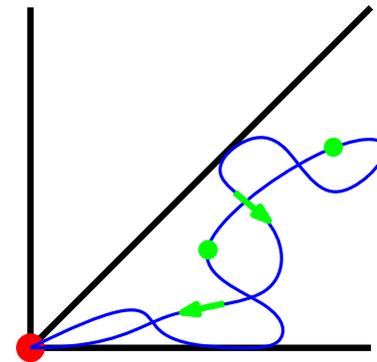


# Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

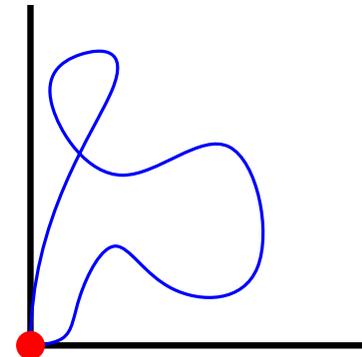
Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe



Excursion  
sous-diagonale  
marquée

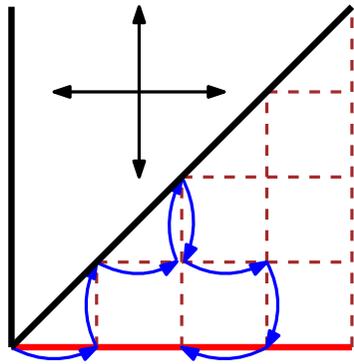


Excursion dans le  
quart de plan

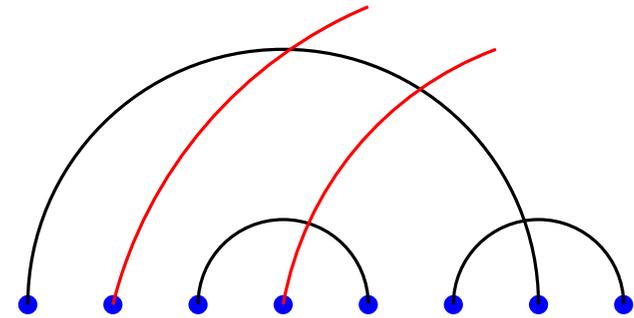




# Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Simple



Marche



Diagramme

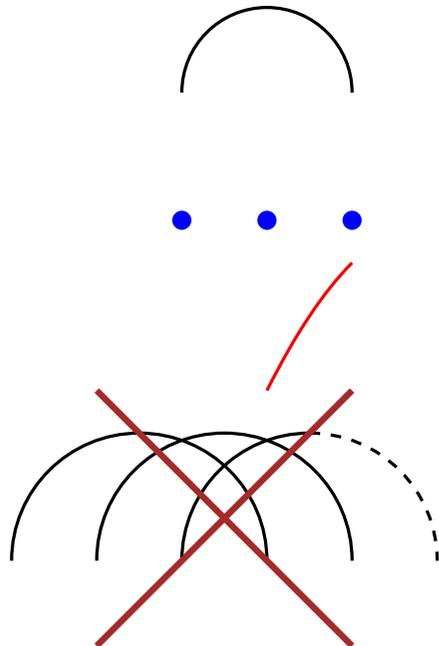


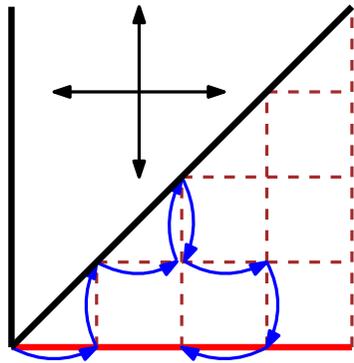
diagramme de couplage

de longueur  $n$

avec  $i$  arcs ouverts

sans 3-croisement

# Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Simple

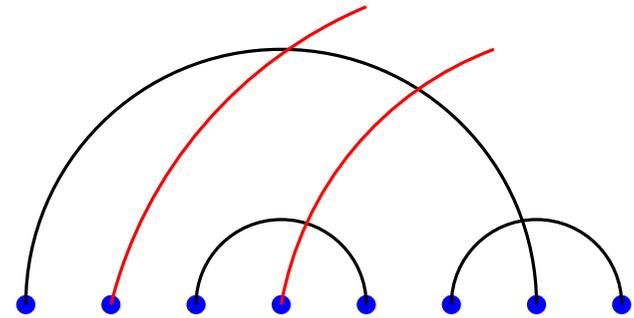


Marche

Chen, Deng, Du,  
Stanley, Yan (2005)



Burrill, Courtiel,  
Fusy, Melczer,  
Mishna (2015)



Diagramme

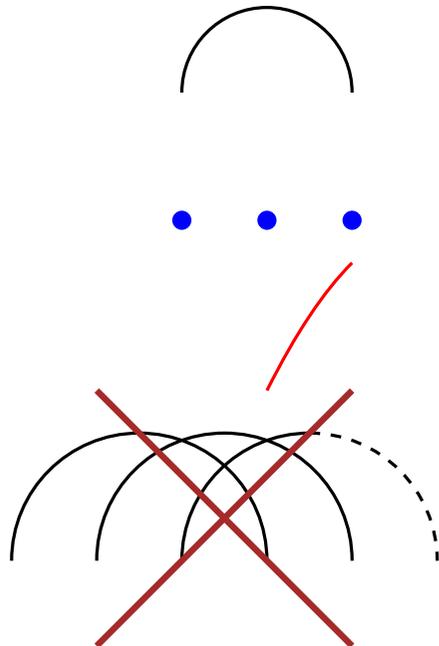


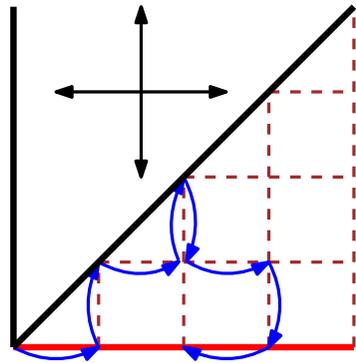
diagramme de couplage

de longueur  $n$

avec  $i$  arcs ouverts

sans 3-croisement

# Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Simple

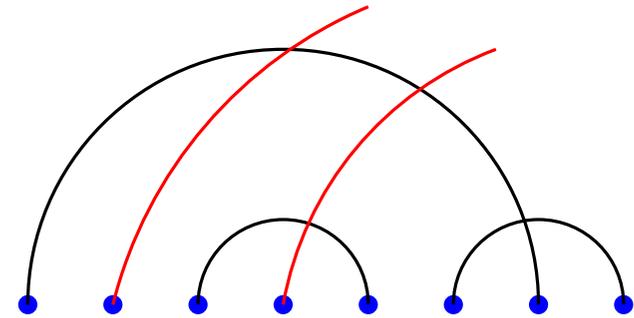


Marche

Chen, Deng, Du,  
Stanley, Yan (2005)



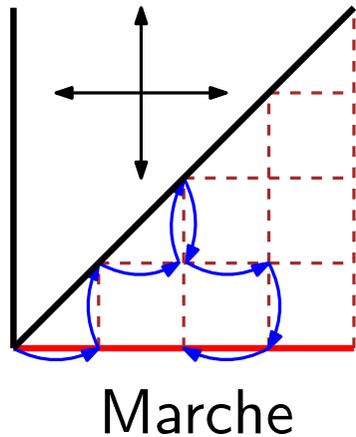
Burrill, Courtiel,  
Fusy, Melczer,  
Mishna (2015)



Diagramme

Avantages respectifs :

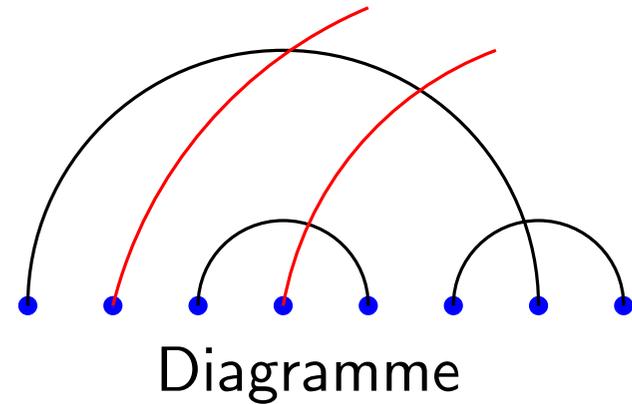
# Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Simple



Chen, Deng, Du,  
Stanley, Yan (2005)



Burrill, Courtiel,  
Fusy, Melczer,  
Mishna (2015)

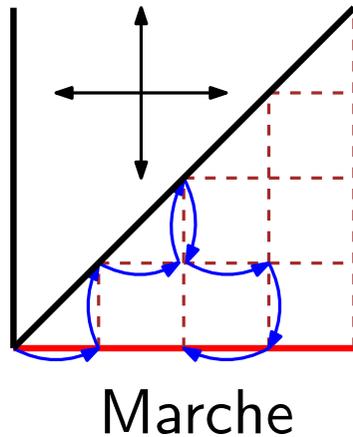


## Avantages respectifs :

- des objets bien connus
- séries génératrices facilement exprimables
- formulation plus naturelle des problèmes

# Marches, Tableaux, Diagrammes

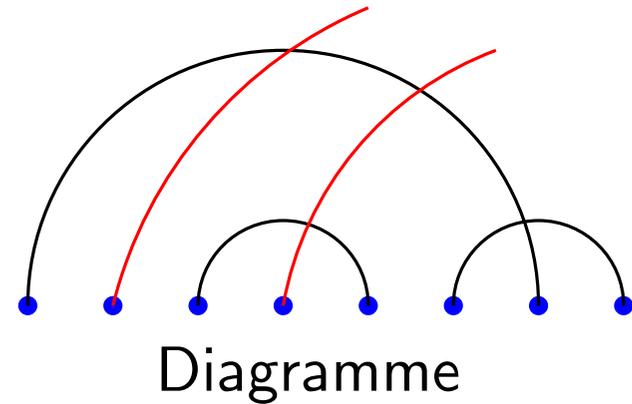
## Cas Simple



Chen, Deng, Du,  
Stanley, Yan (2005)



Burrill, Courtiel,  
Fusy, Melczer,  
Mishna (2015)

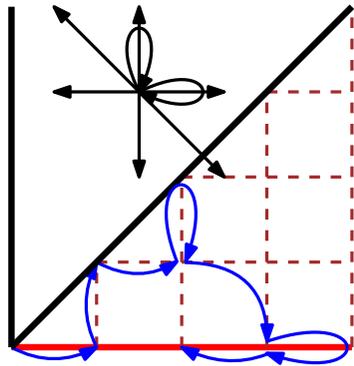


### Avantages respectifs :

- des objets bien connus
- séries génératrices facilement exprimables
- formulation plus naturelle des problèmes
- arbre générateur
- possibilité d'enlever les arcs



# Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Hésitant

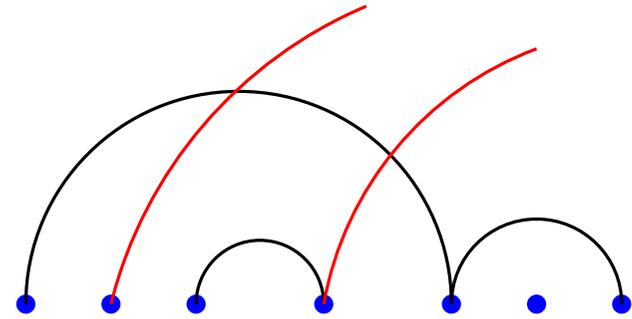


Marche

Chen, Deng, Du,  
Stanley, Yan (2005)



Burrill, Courtiel,  
Fusy, Melczer,  
Mishna (2015)



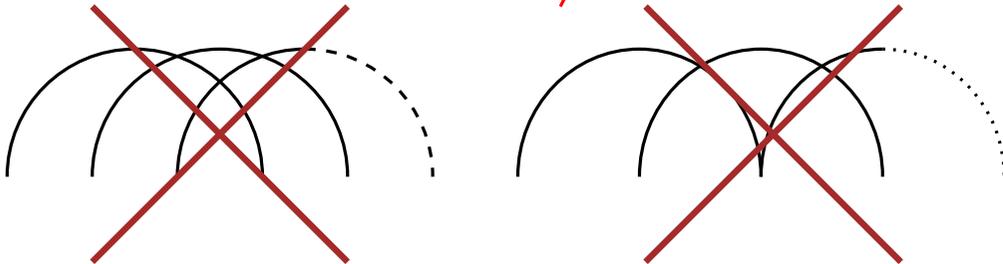
Diagramme



diagramme de partition

de longueur  $n$

avec  $i$  arcs ouverts



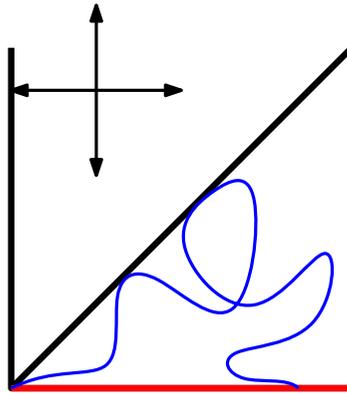
sans 3-croisement amélioré

Contrainte de domaine  $\leftrightarrow$  Contrainte d'arrivée

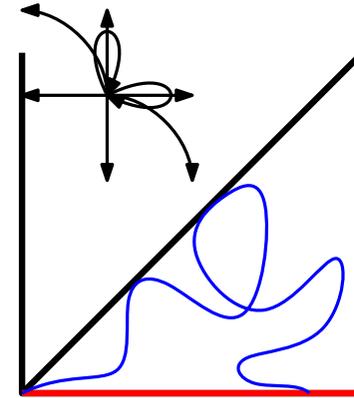
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

cas Simple



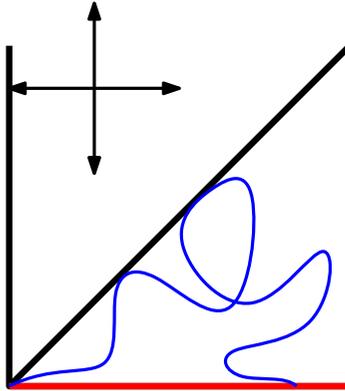
cas Hésitant



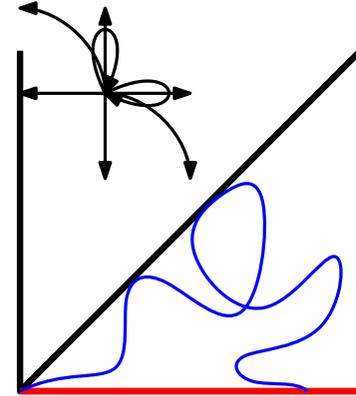
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

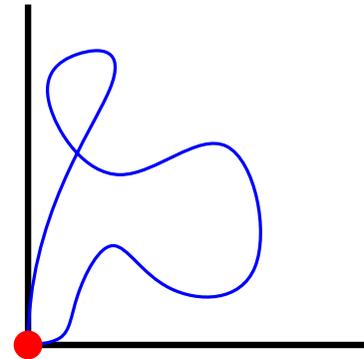
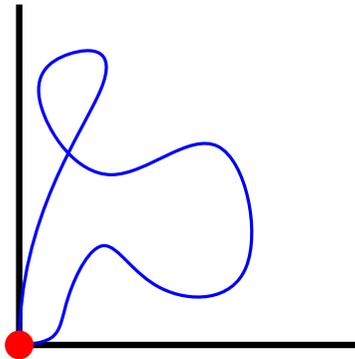
cas Simple



cas Hésitant



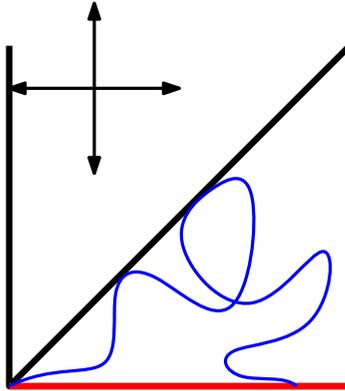
Excursion dans le  
quart de plan



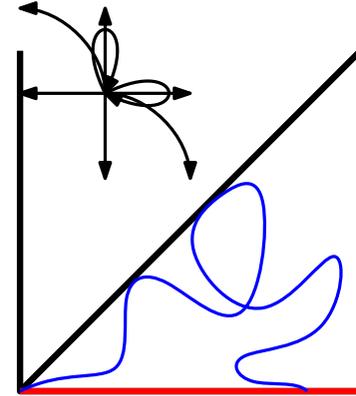
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

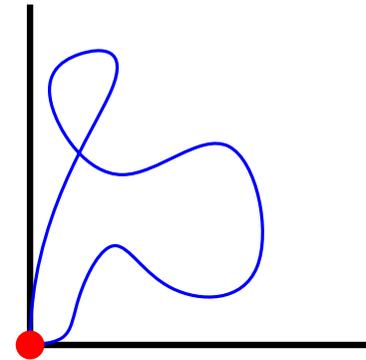
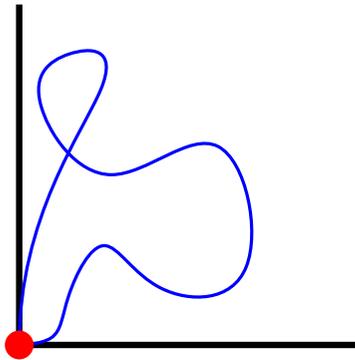
cas Simple



cas Hésitant



Excursion dans le  
quart de plan



Cardinalité

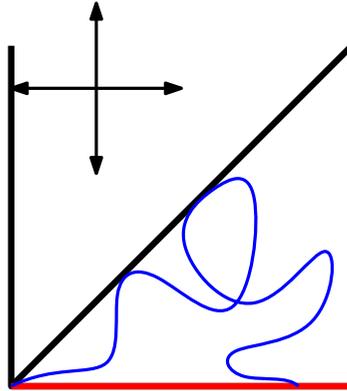
$$\mathcal{C}_n \cdot \mathcal{C}_{n+1}$$

$$\mathcal{B}_{n+1}$$

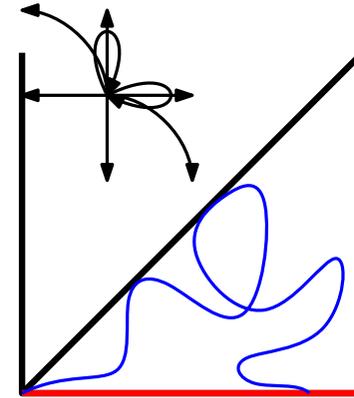
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

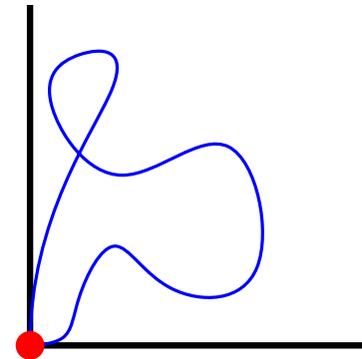
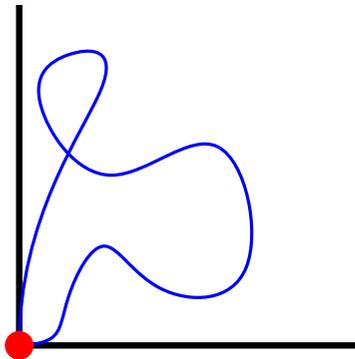
cas Simple



cas Hésitant



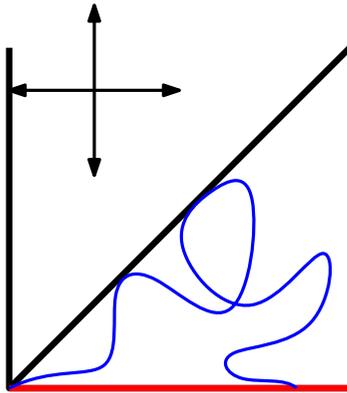
Excursion dans le  
quart de plan



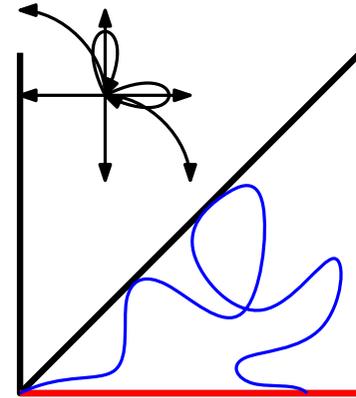
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

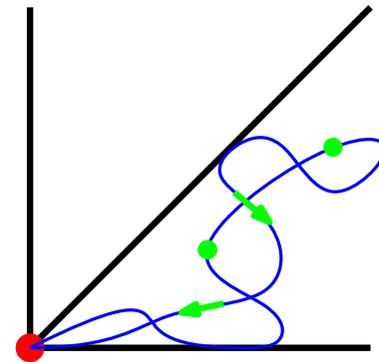
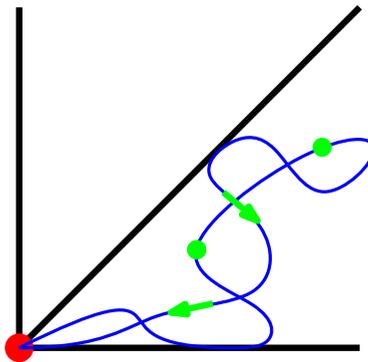
cas Simple



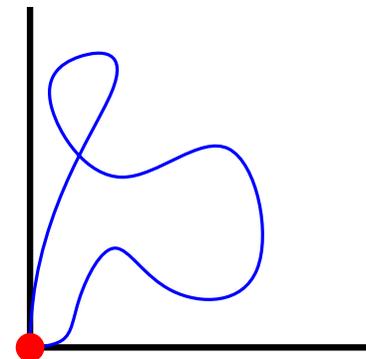
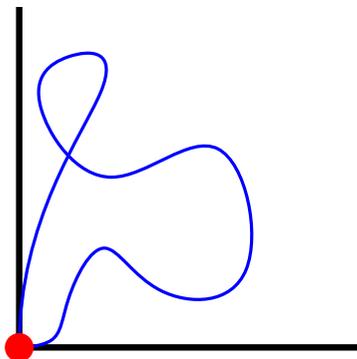
cas Hésitant



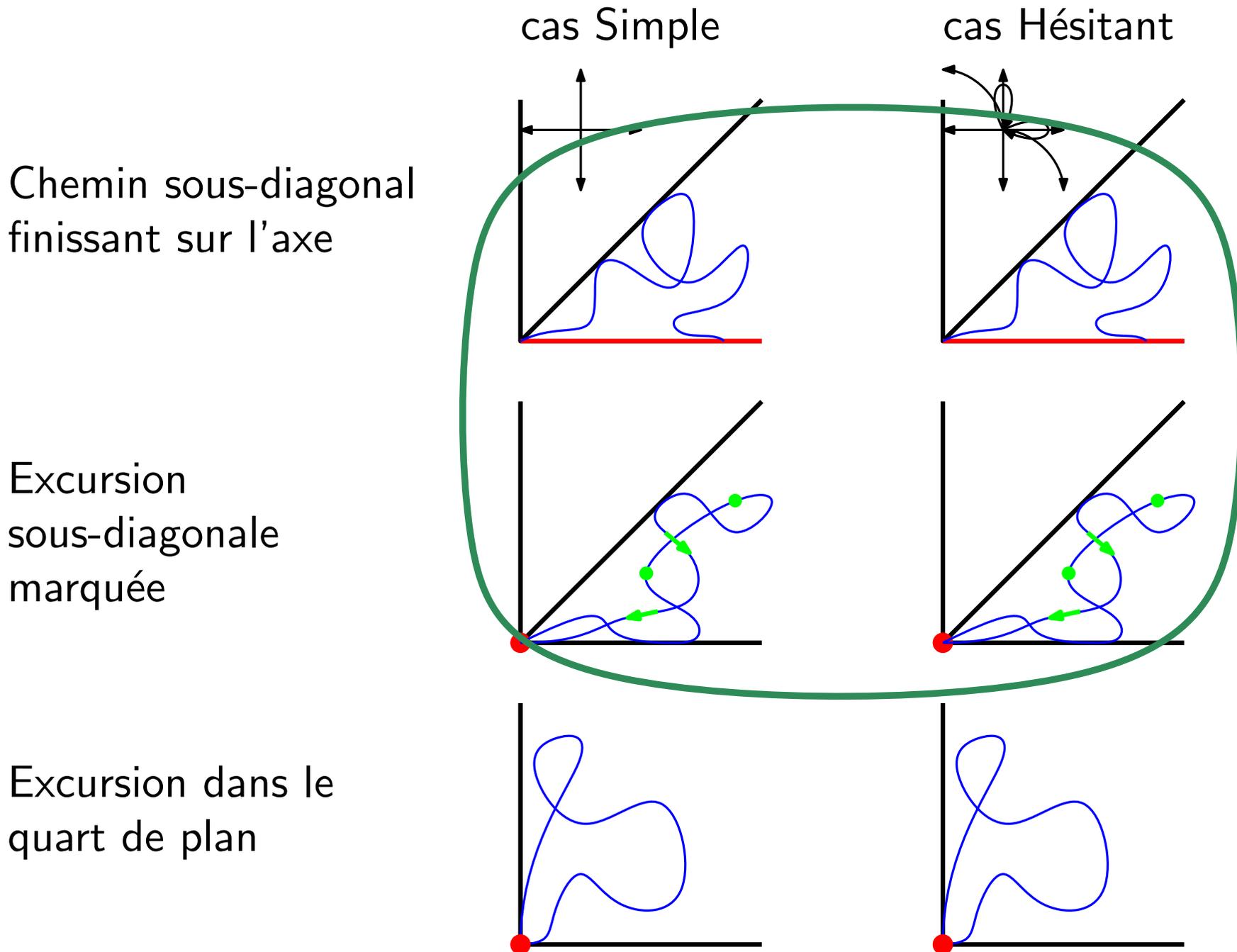
Excursion  
sous-diagonale  
marquée



Excursion dans le  
quart de plan



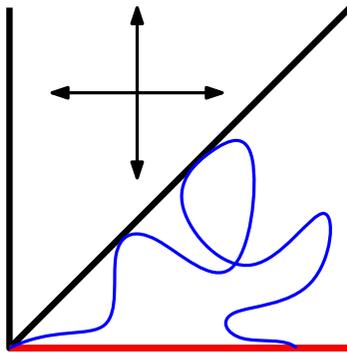
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée



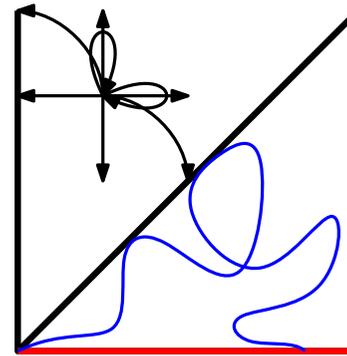
# Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

**Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées**

marche Simple sous-diagonale  
finissant sur l'axe



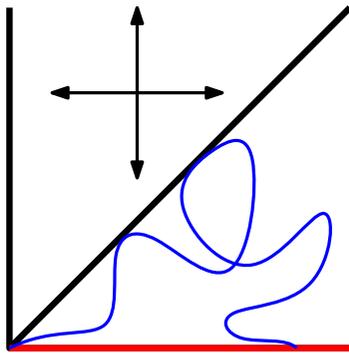
marche Hésitante sous-diagonale  
finissant sur l'axe



# Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

marche Simple sous-diagonale  
finissant sur l'axe



marche Hésitante sous-diagonale  
finissant sur l'axe

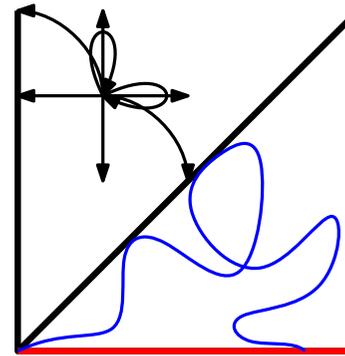


diagramme de couplage ouvert  
sans 3-croisement

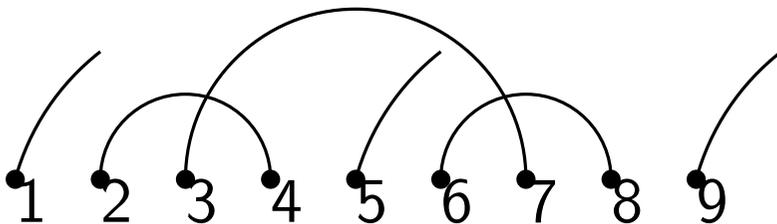
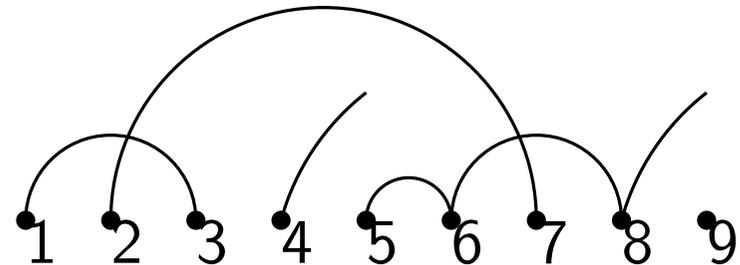


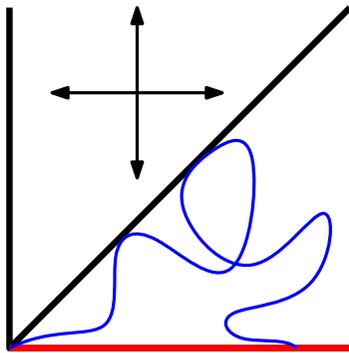
diagramme de partition ouverte  
sans 3-croisement étendu



# Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

marche Simple sous-diagonale  
finissant sur l'axe



marche Hésitante sous-diagonale  
finissant sur l'axe

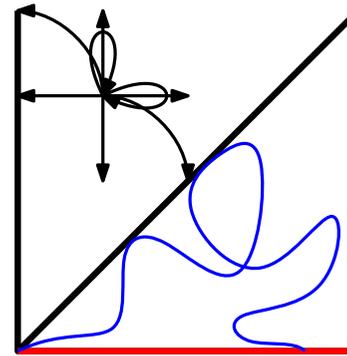


diagramme de couplage sans  
3-croisement, avec marquage

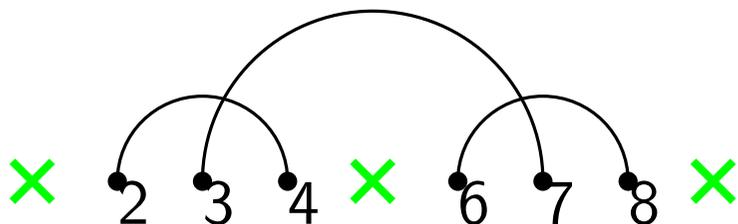
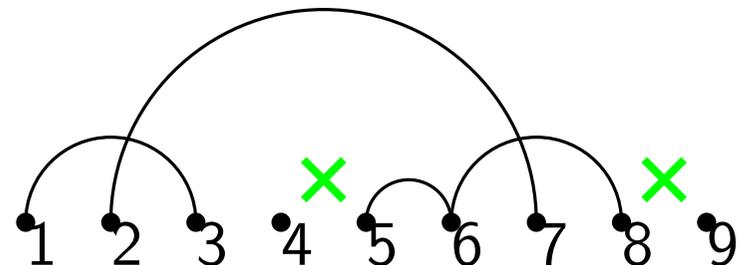


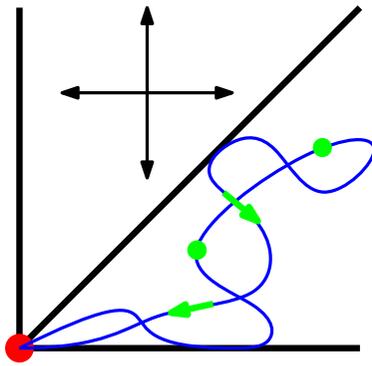
diagramme de partition sans  
3-croisement étendu, avec marquage



# Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

excursion Simple sous-diagonale marquée



excursion Hésitante sous-diagonale marquée

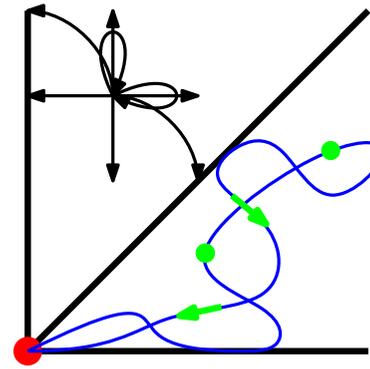


diagramme de couplage sans 3-croisement, avec marquage

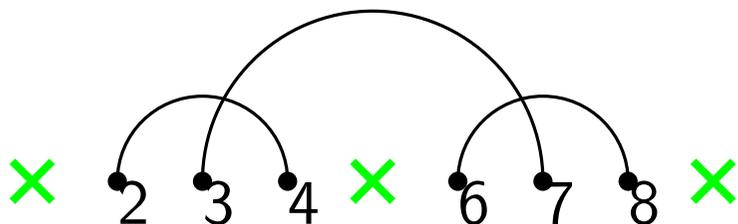
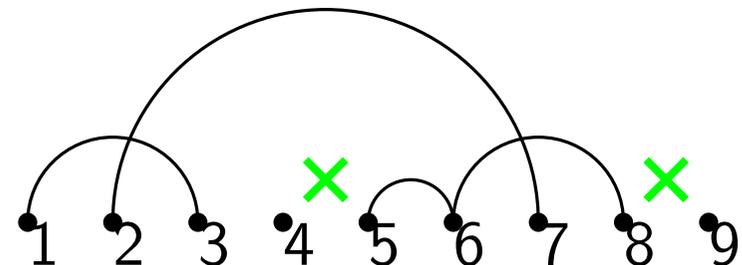


diagramme de partition sans 3-croisement étendu, avec marquage



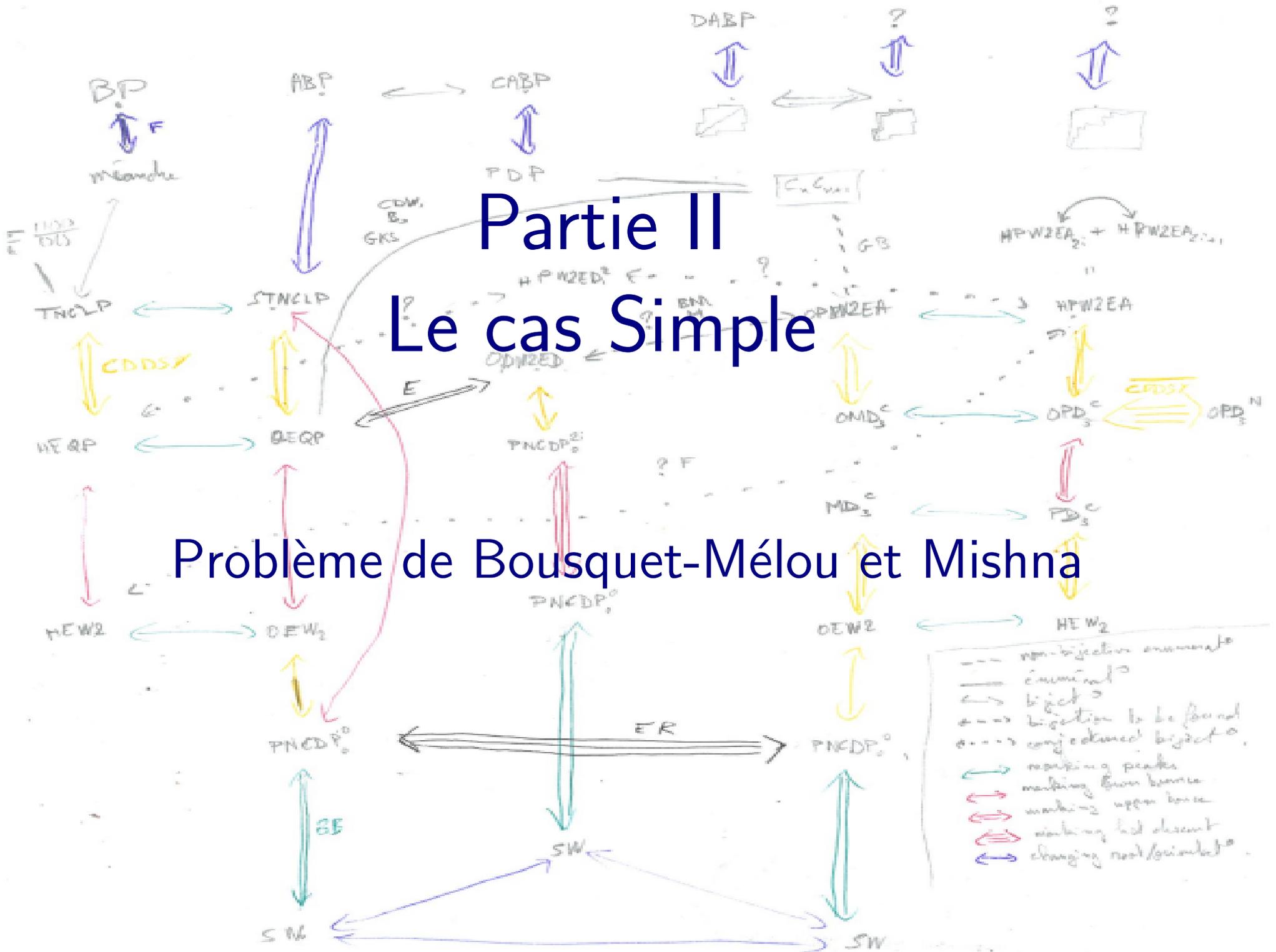
# Marches Simples du plan, paires de chemins

$$(x_i, y_i)_{i=0..n} \longleftrightarrow (x_i + y_i, x_i - y_i)_{i=0..n}$$

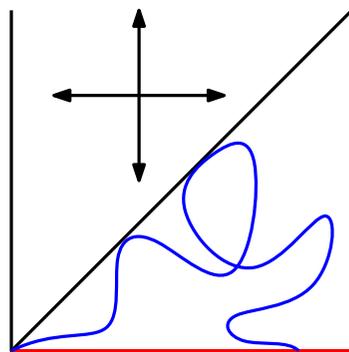
# Partie II

## Le cas Simple

### Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



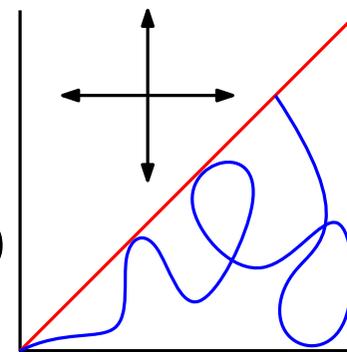
# Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



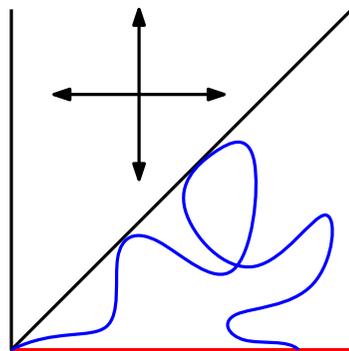
?

←-----→

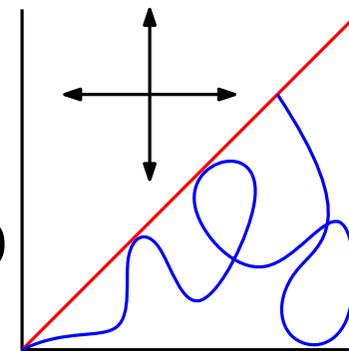
Bousquet-Mélou Mishna 2009



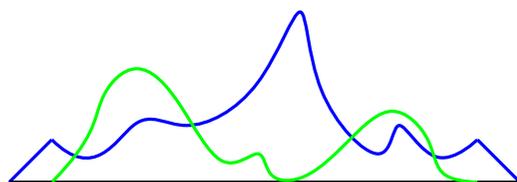
# Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



Bousquet-Mélou Mishna 2009



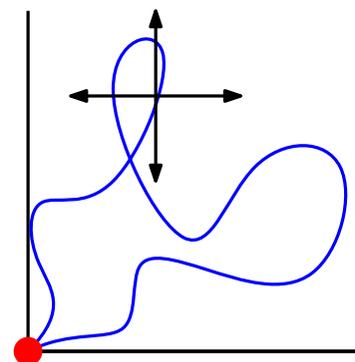
Gouyou-Beauchamps 1985



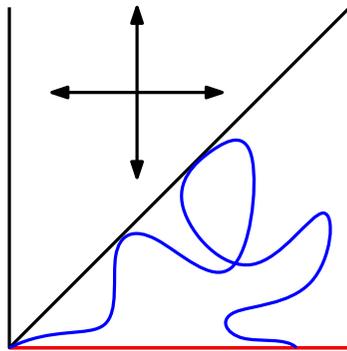
Cori et al. 1986  
Bernardi 2007



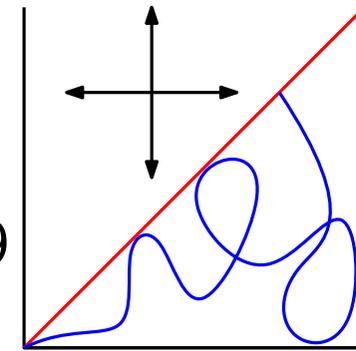
Elizalde 2014



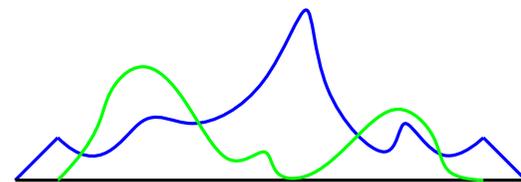
# Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



?  
Bousquet-Mélou Mishna 2009



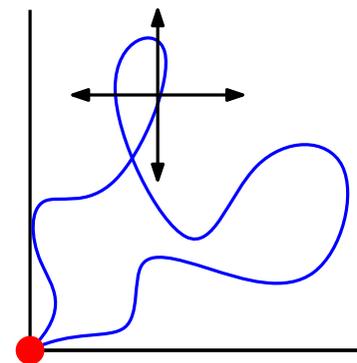
représentation  
par diagrammes  
ouverts



Cori et al. 1986  
Bernardi 2007



Elizalde 2014



# Partie manquante

Rappel :

Gouyou-Beauchamps 1985 (non bijectif) :

Les marches Simples sous-diagonales de longueur  $n$  finissant sur l'axe sont énumérées par  $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$

# Partie manquante

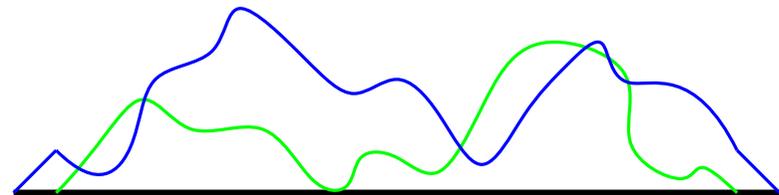
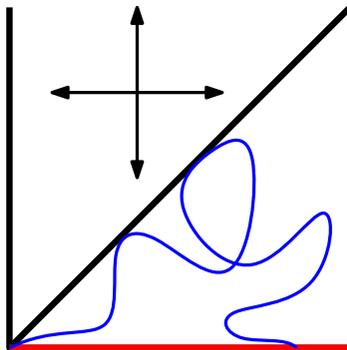
## Rappel :

Gouyou-Beauchamps 1985 (non bijectif) :

Les marches Simples sous-diagonales de longueur  $n$  finissant sur l'axe sont énumérées par  $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$

## Objectif :

- Établir une bijection entre les marches Simples sous-diagonales de longueur  $2n$  finissant sur l'axe et les paires de chemins de Dyck de demi-longueurs  $(n, n + 1)$ .



# Le cas pair

marche sous-diagonale  
Simple finissant sur  
l'axe, de longueur  $2n$

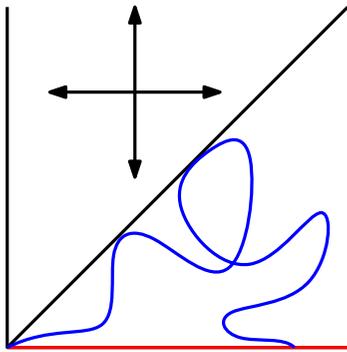


diagramme de couplage  
ouvert sans 3-croisement,  
de longueur  $2n$

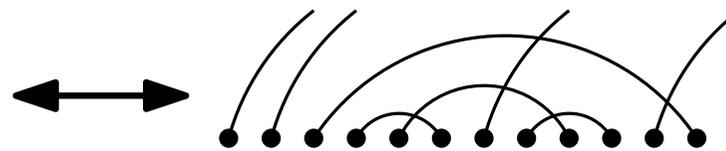
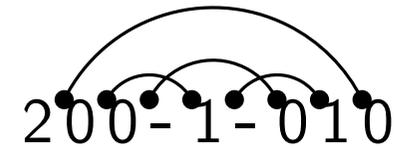
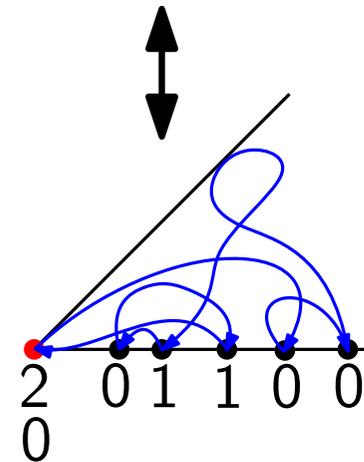


diagramme de couplage  
sans 3-croisement avec  
poids sur les intervalles  
ouverts, de *taille*  $2n$

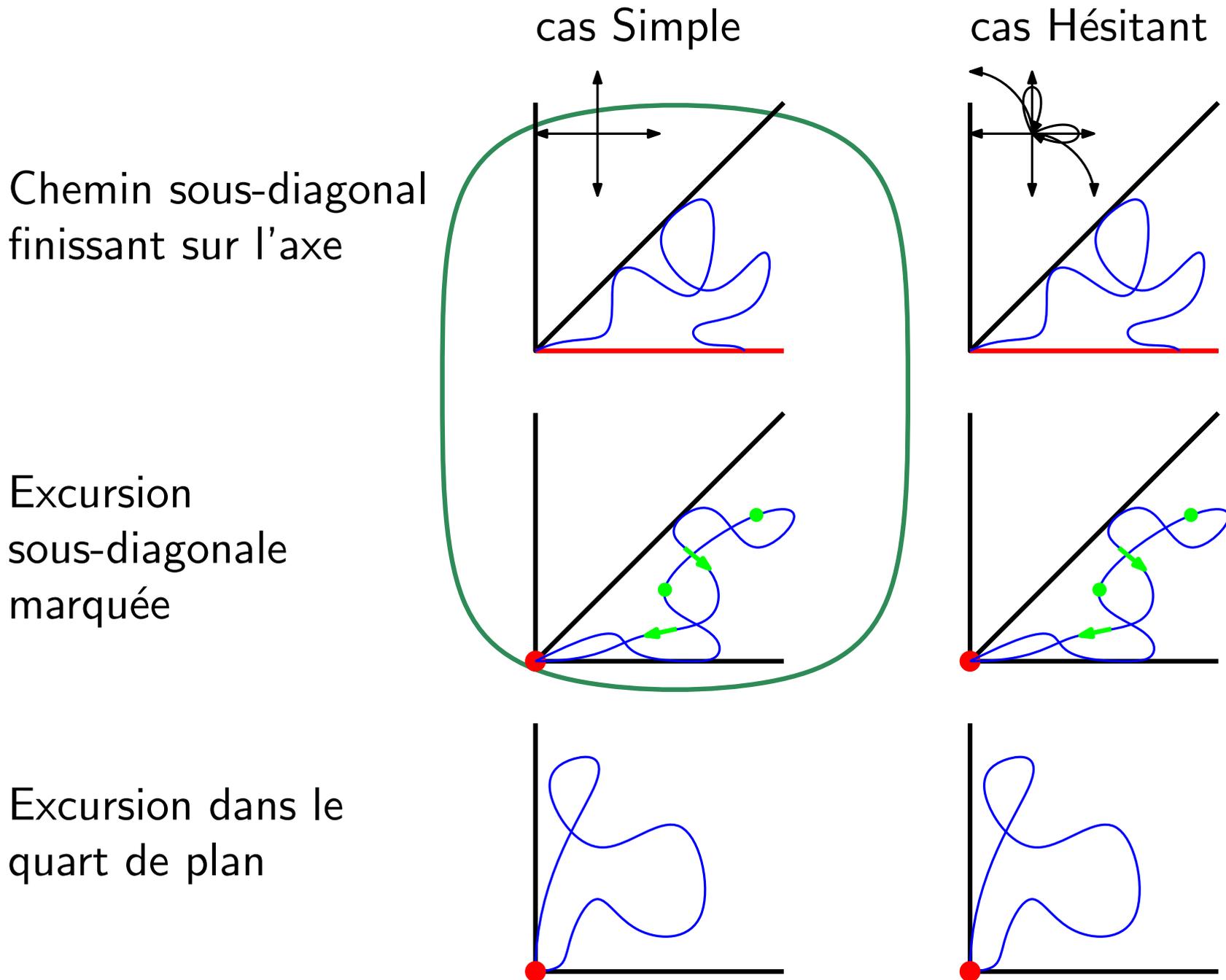


taille = longueur + poids



excursion sous-diagonale  
Simple avec poids sur les  
positions axiales, de *taille*  
 $2n$

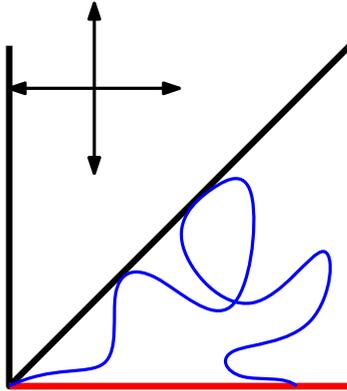
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée



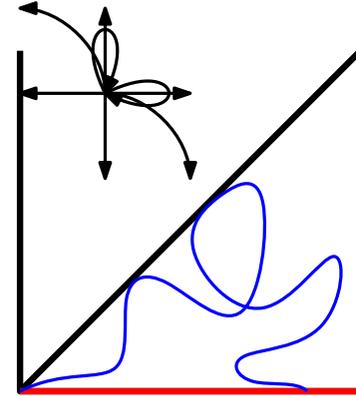
# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe

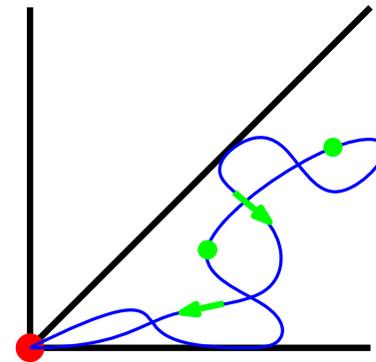
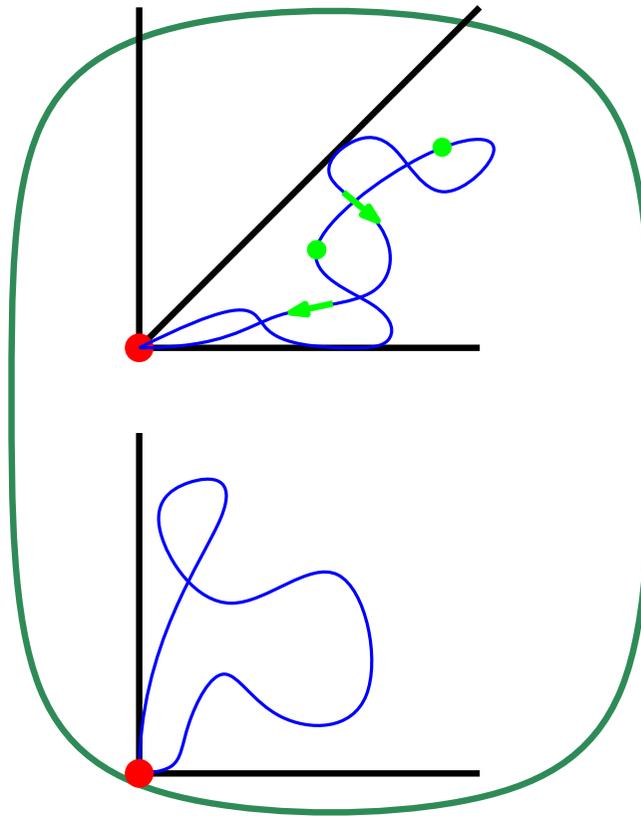
cas Simple



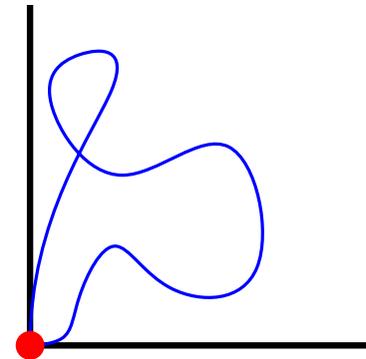
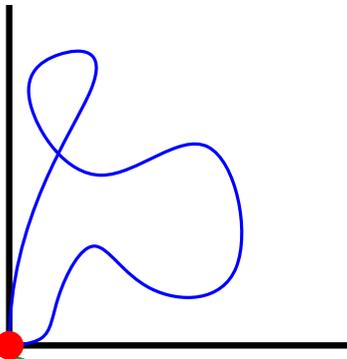
cas Hésitant



Excursion  
sous-diagonale  
marquée



Excursion dans le  
quart de plan



# Le cas pair

marche sous-diagonale  
Simple finissant sur  
l'axe, de longueur  $2n$

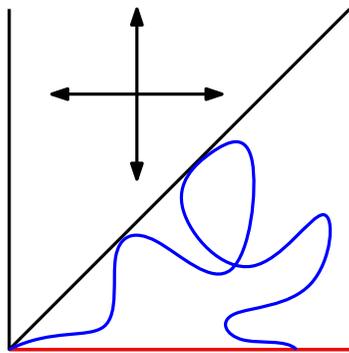


diagramme de couplage  
ouvert sans 3-croisement,  
de longueur  $2n$

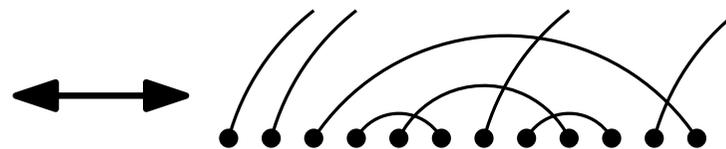
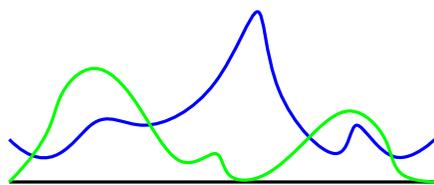
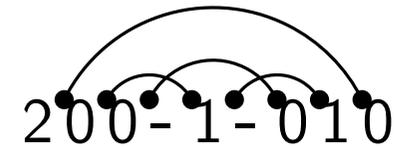
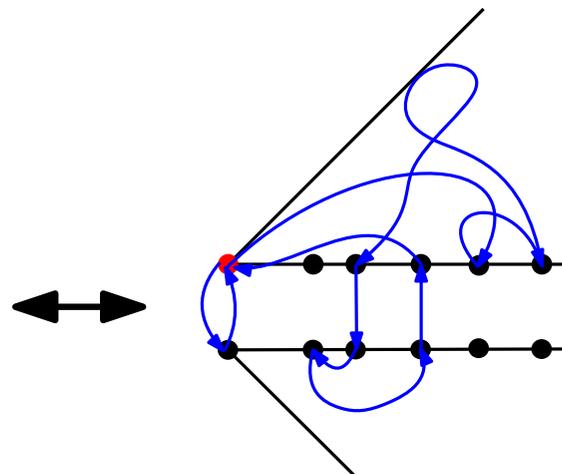


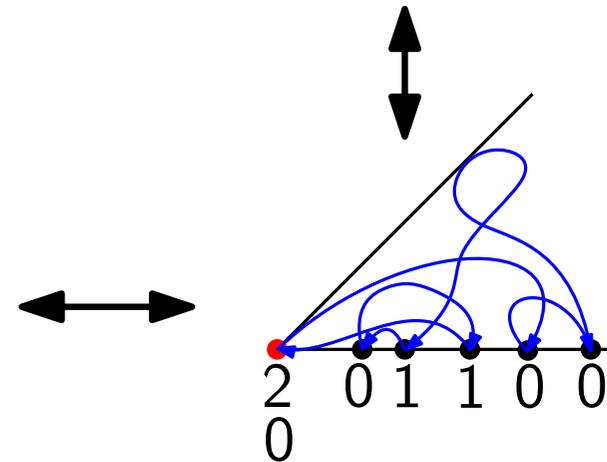
diagramme de couplage  
sans 3-croisement avec  
poids sur les intervalles  
ouverts, de *taille*  $2n$



chemins positifs de  
longueurs  $2n$  allant de  
 $(1, 0)$  à  $(1, 0)$



excursion  
inter-diagonale Simple  
de longueur  $2n$



excursion sous-diagonale  
Simple avec poids sur les  
positions axiales, de *taille*  
 $2n$

# Le cas pair

marche sous-diagonale  
Simple finissant sur  
l'axe, de longueur  $2n$

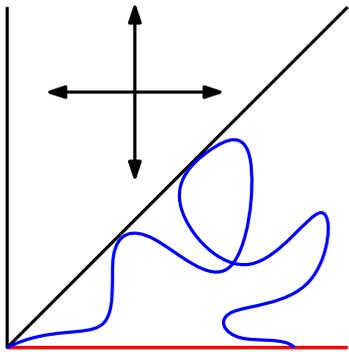


diagramme de couplage  
ouvert sans 3-croisement,  
de longueur  $2n$

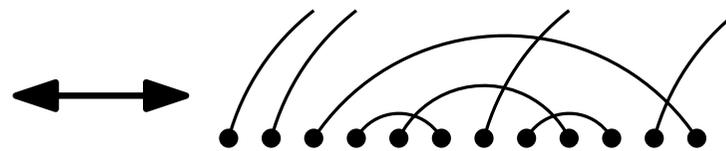
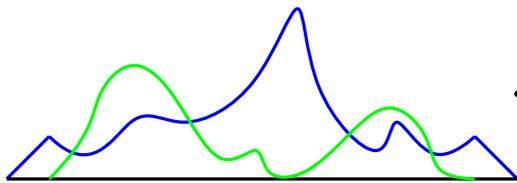
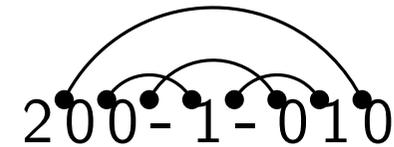
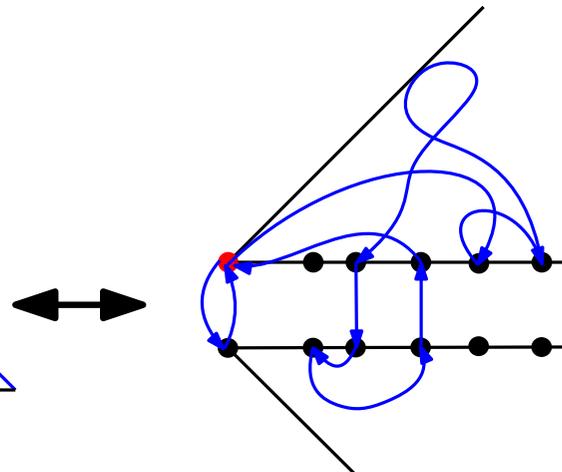


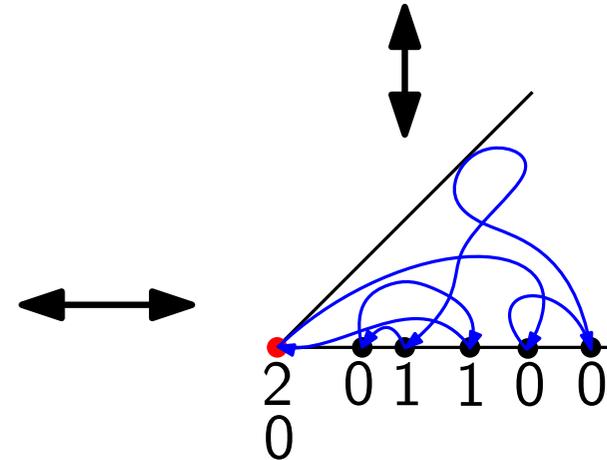
diagramme de couplage  
sans 3-croisement avec  
poids sur les intervalles  
ouverts, de *taille*  $2n$



paire de chemins de Dyck  
de demi-longueurs  
 $(n, n + 1)$



excursion  
inter-diagonale Simple  
de longueur  $2n$



excursion sous-diagonale  
Simple avec poids sur les  
positions axiales, de *taille*  
 $2n$

# Le cas impair

marche sous-diagonale Simple finissant sur l'axe, de longueur  $2n+1$

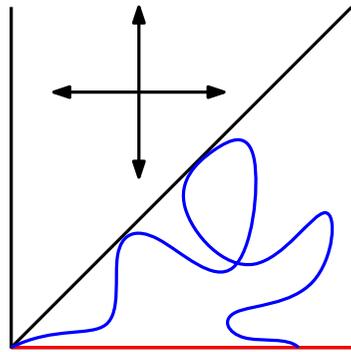


diagramme de couplage ouvert sans 3-croisement, de longueur  $2n+1$

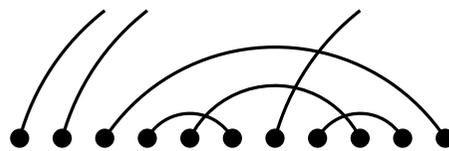
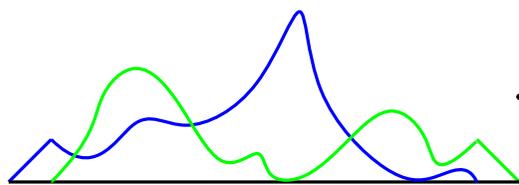
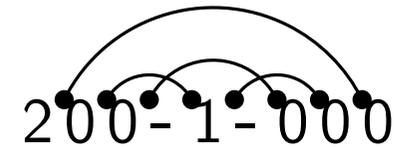
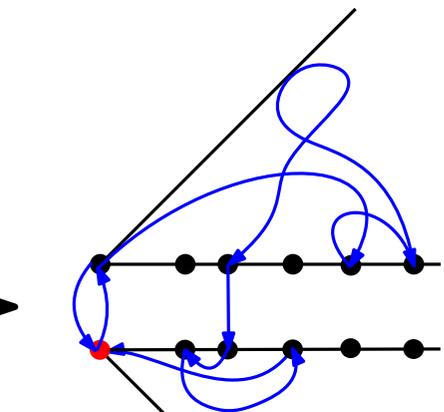


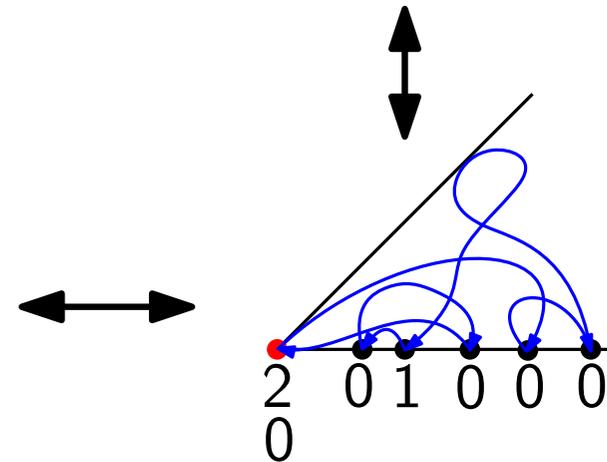
diagramme de couplage sans 3-croisement avec poids sur les intervalles ouverts, de taille  $2n+1$



paire de chemins de Dyck de demi-longueurs  $n+1$

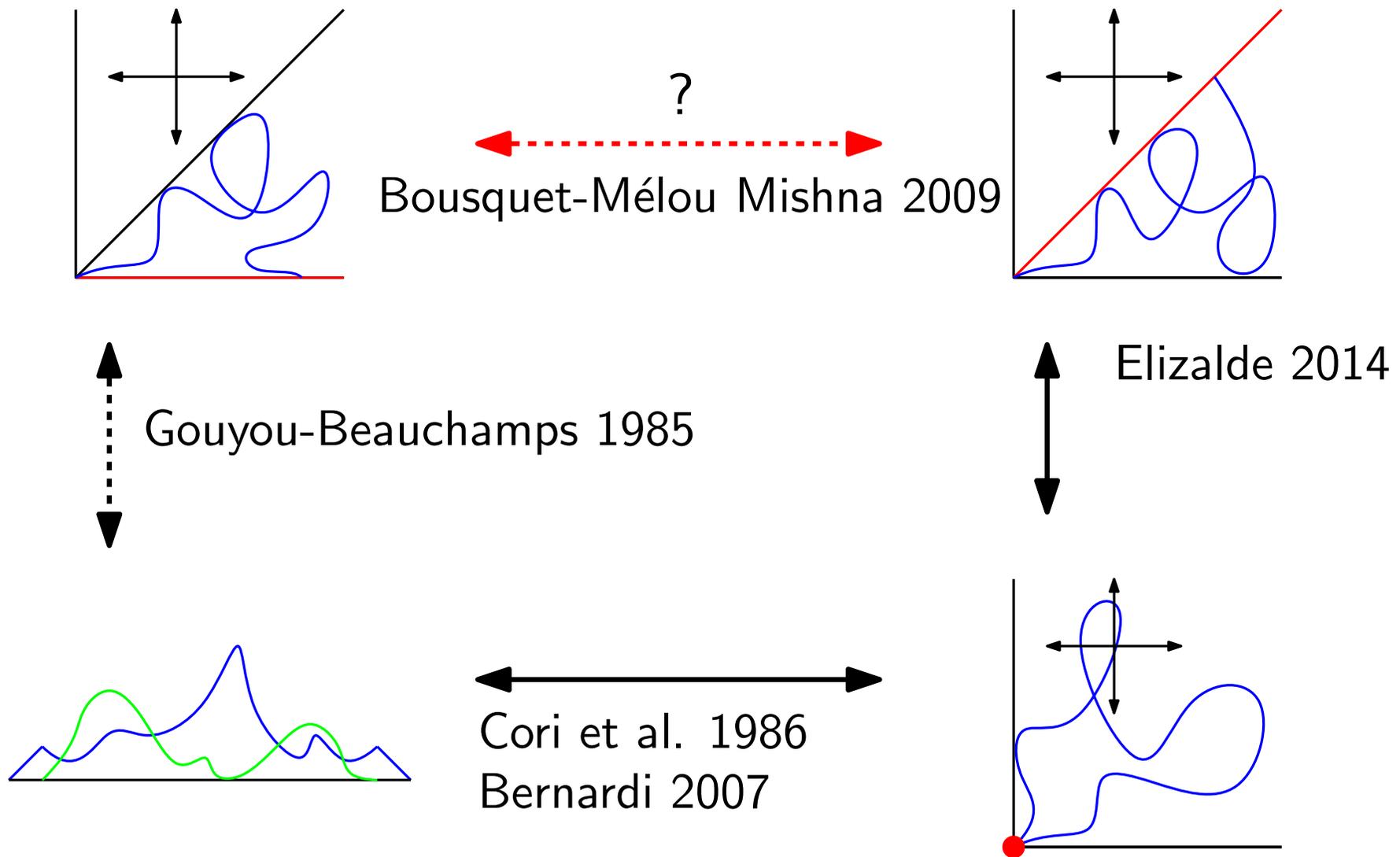


marche Simple inter-diagonale de longueur  $2n+1$

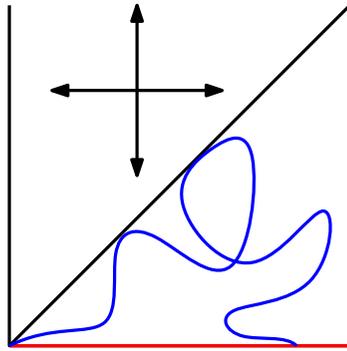


excursion sous-diagonale Simple avec poids sur les positions axiales, de taille  $2n+1$

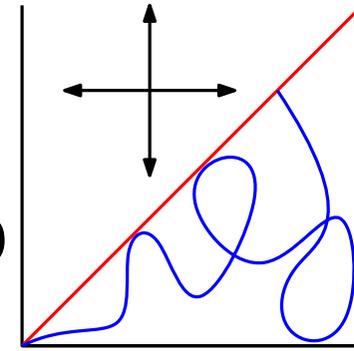
# Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



# Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



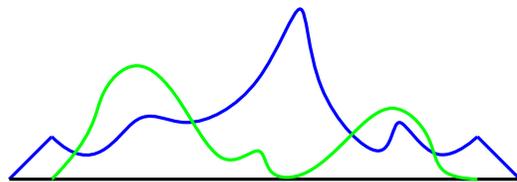
?  
Bousquet-Mélou Mishna 2009



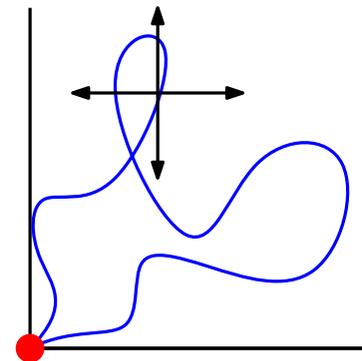
représentation  
par diagrammes  
ouverts



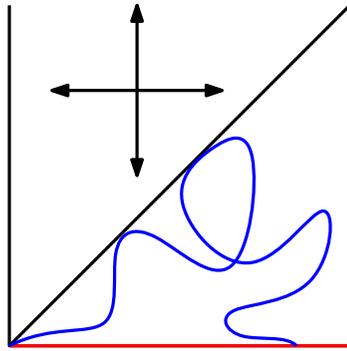
Elizalde 2014



Cori et al. 1986  
Bernardi 2007



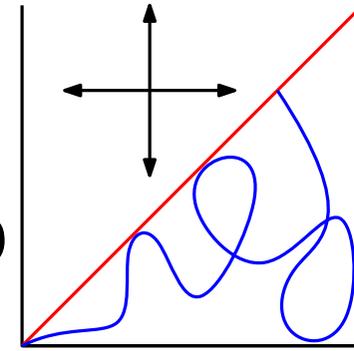
# Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



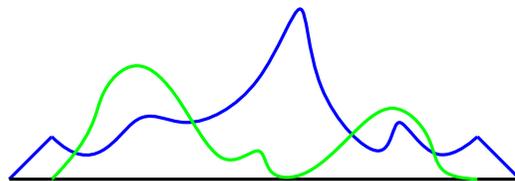
?

←-----→

Bousquet-Mélou Mishna 2009



représentation  
par diagrammes  
ouverts

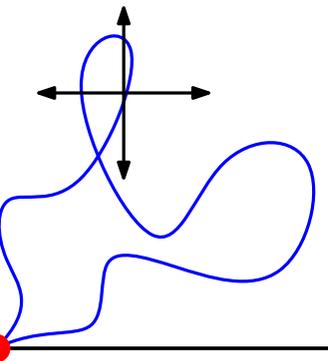


méandres et permutations  
de Baxter alternantes



Cori et al. 1986  
Bernardi 2007

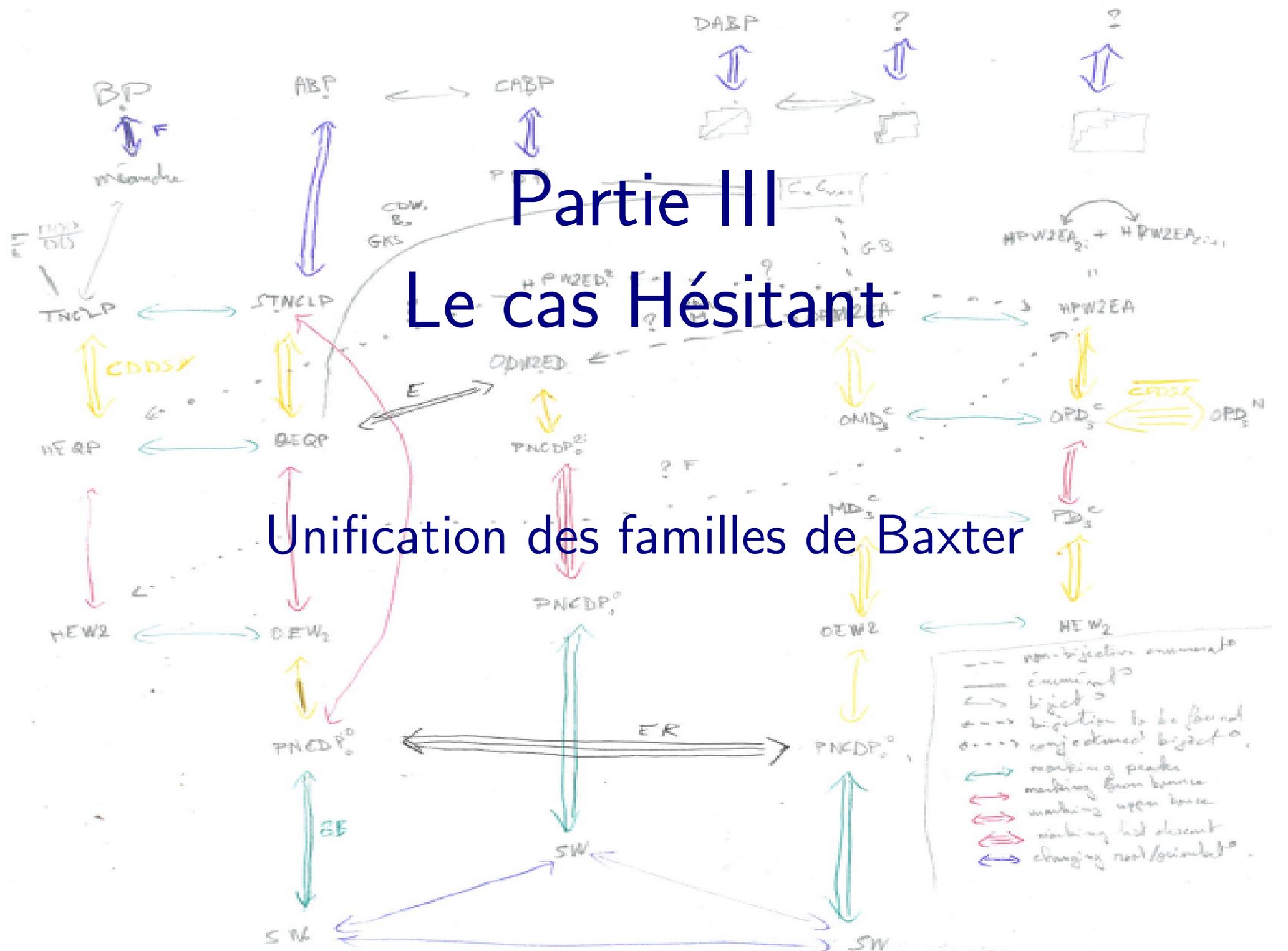
Elizalde 2014  
forêts de Schnyder  
avec arêtes marquées



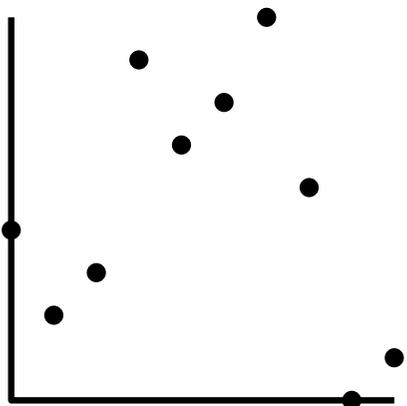
# Partie III

## Le cas Hésitant

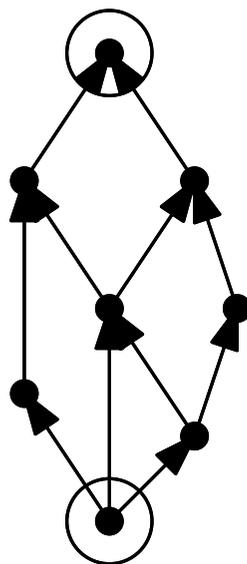
### Unification des familles de Baxter



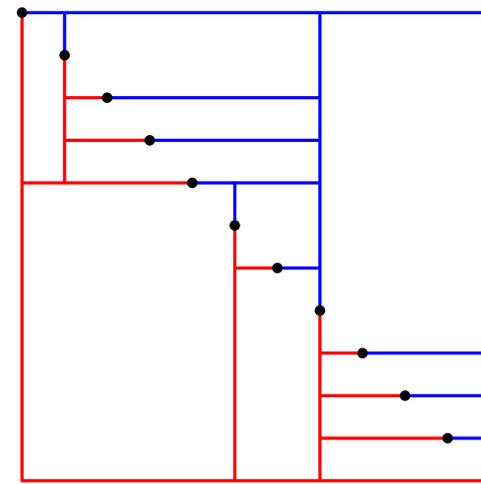
# Familles de Baxter symétriques



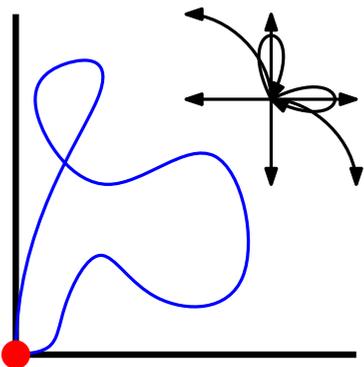
Permutations de Baxter



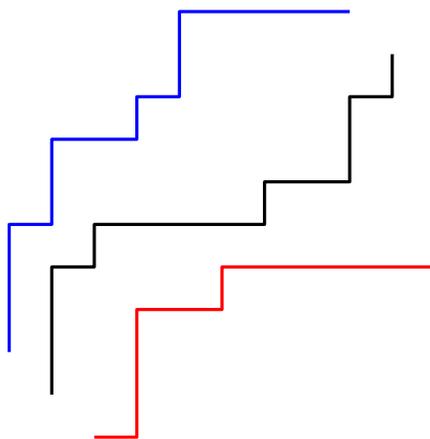
Orientations planes bipolaires



Rectangulations du carré



Excursions Hésitantes dans le quart de plan

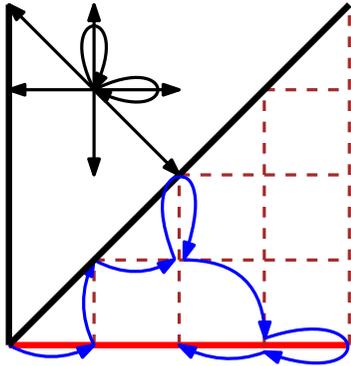


Triplets de chemins

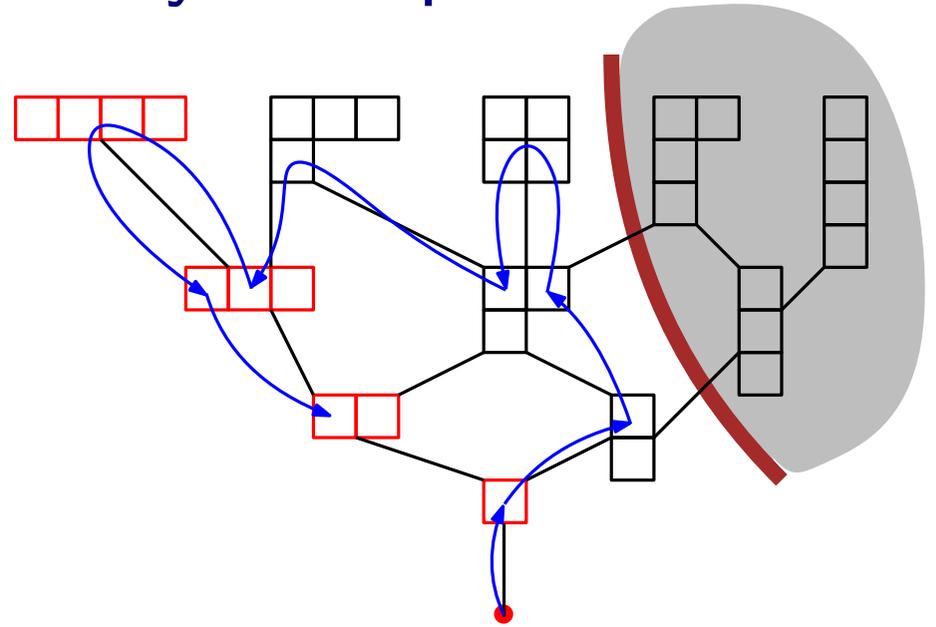
$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2}}$$

Gessel-Viennot

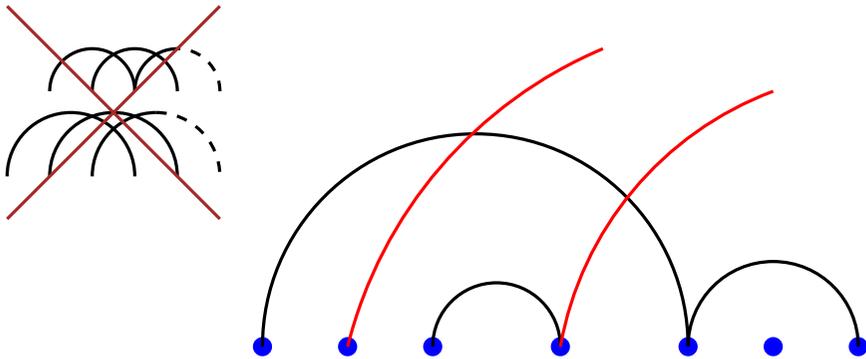
# Familles de Baxter asymétriques



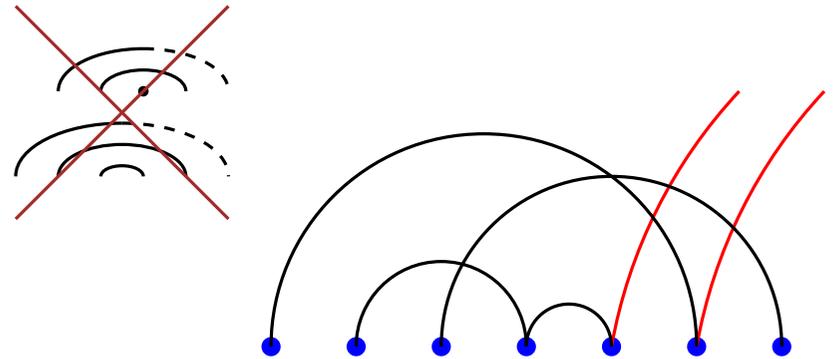
Excursions Hésitantes  
sous-diagonales  
finissant sur l'axe



Tableaux Hésitants de hauteur au  
plus 2 finissant sur une unique ligne



Diagrammes de partition ouverts  
sans 3-croisements améliorés



Diagrammes de partitions ouverts  
sans 3-emboîtements améliorés

# Familles de Baxter

Familles symétriques

Xin et Zhang 2009  
(non bijectif)

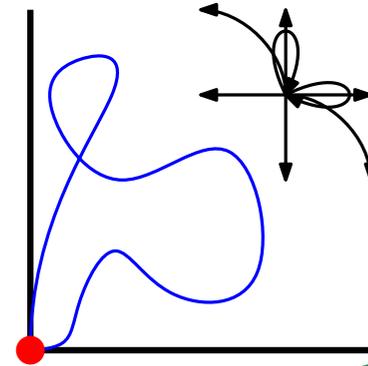
Burrill & al 2015  
(non bijectif)

Familles asymétriques



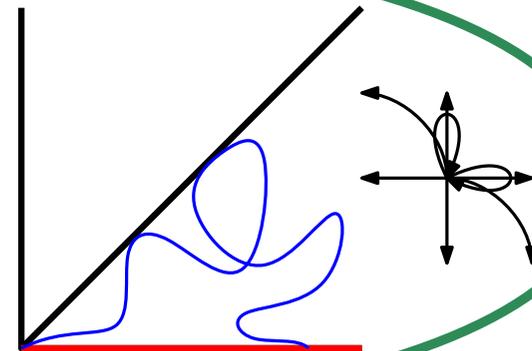
# Familles de Baxter

Familles symétriques



preuve  
bijective

Familles asymétriques



Stratégie :

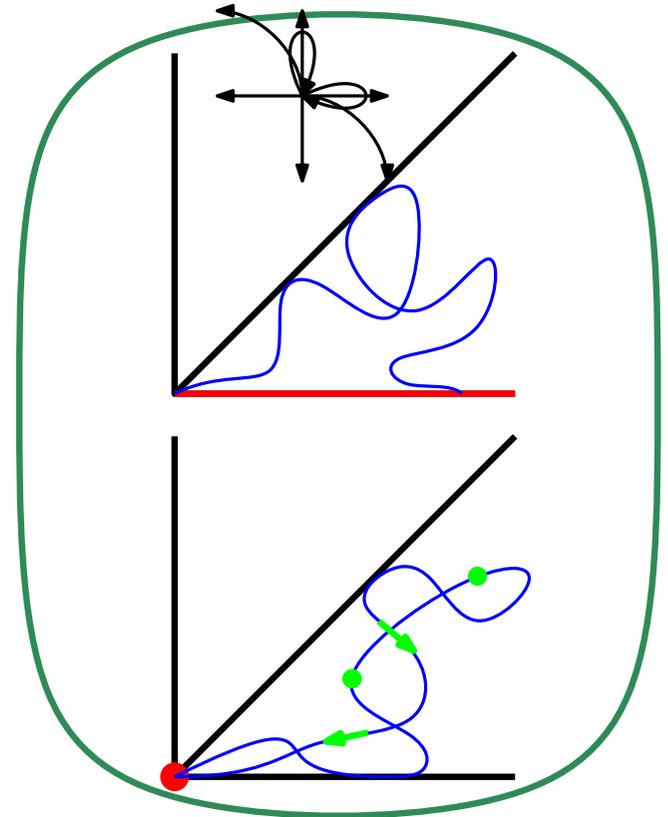
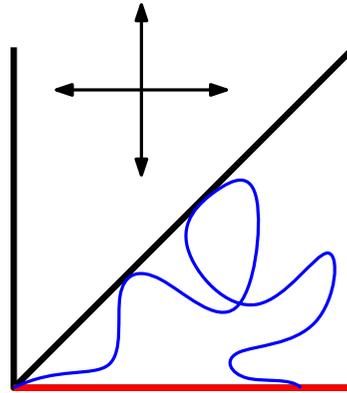
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

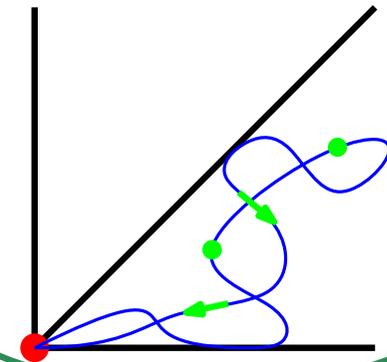
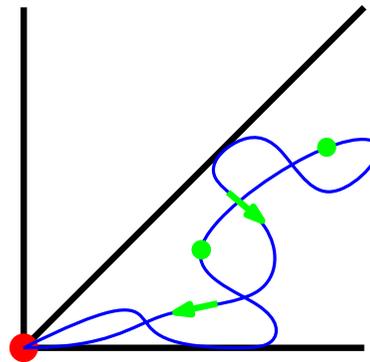
cas Simple

cas Hésitant

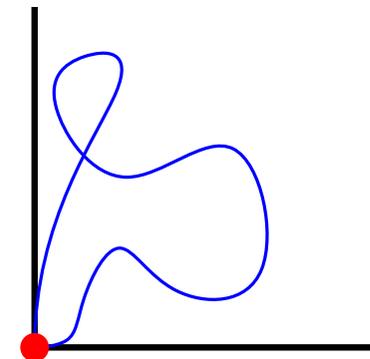
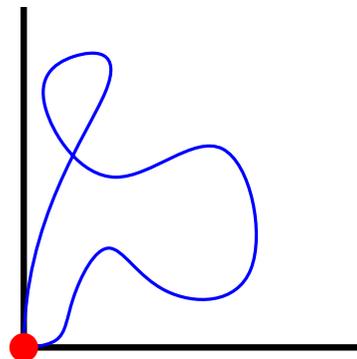
Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe



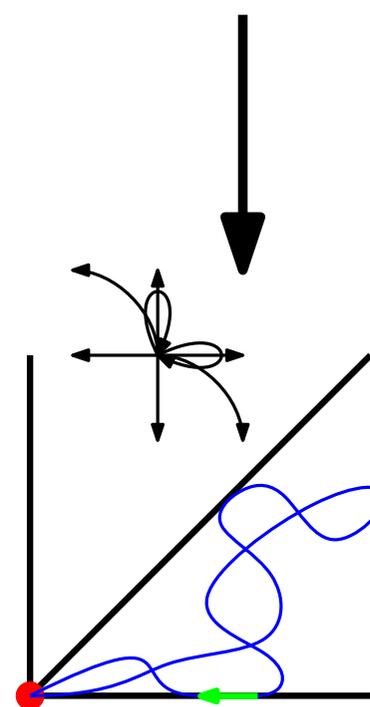
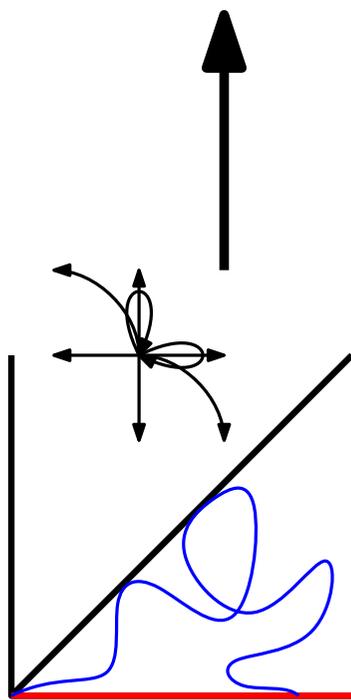
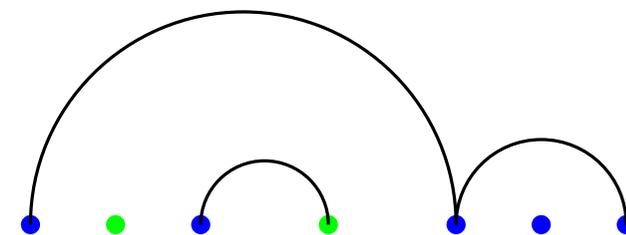
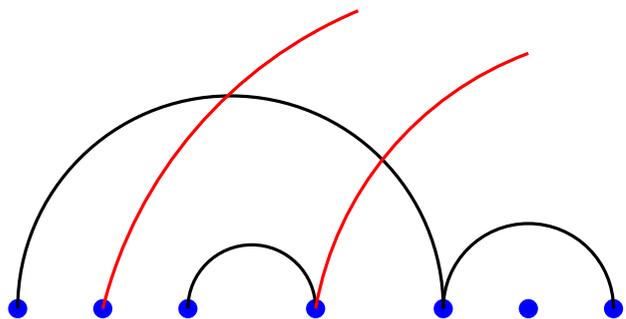
Excursion  
sous-diagonale  
marquée



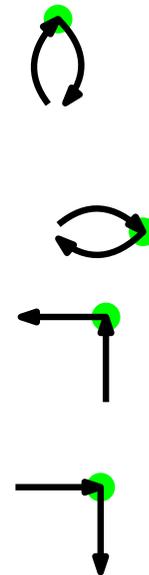
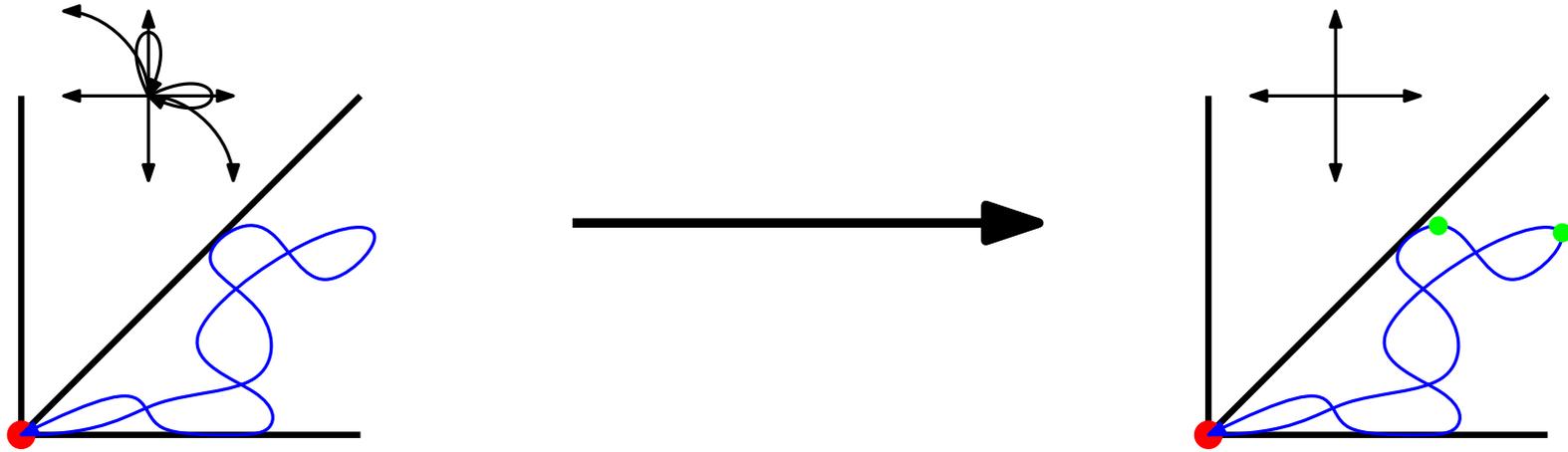
Excursion dans le  
quart de plan



Stratégie :  
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Stratégie :  
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



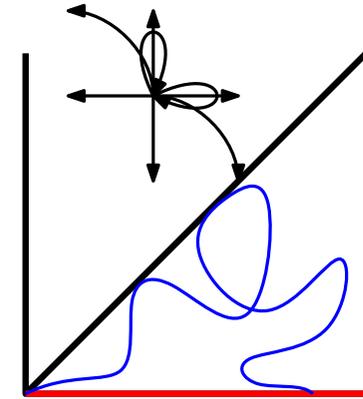
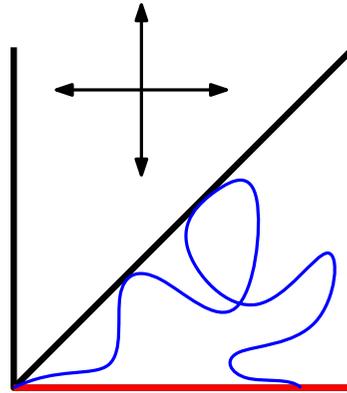


# Contrainte de domaine $\leftrightarrow$ Contrainte d'arrivée

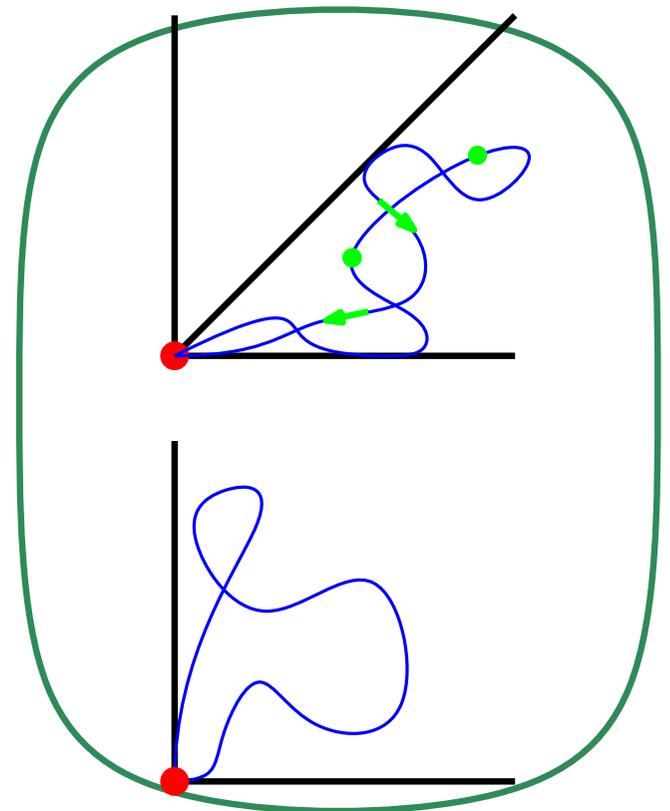
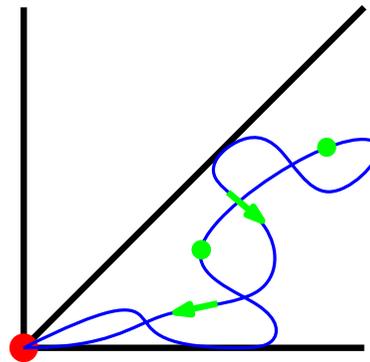
cas Simple

cas Hésitant

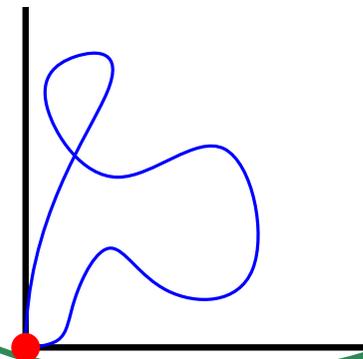
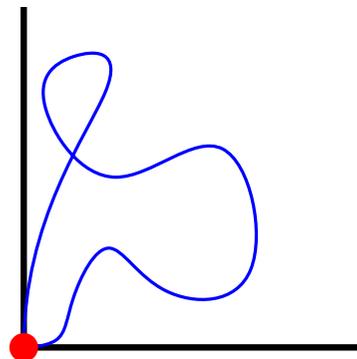
Chemin sous-diagonal  
finissant sur l'axe



Excursion  
sous-diagonale  
marquée

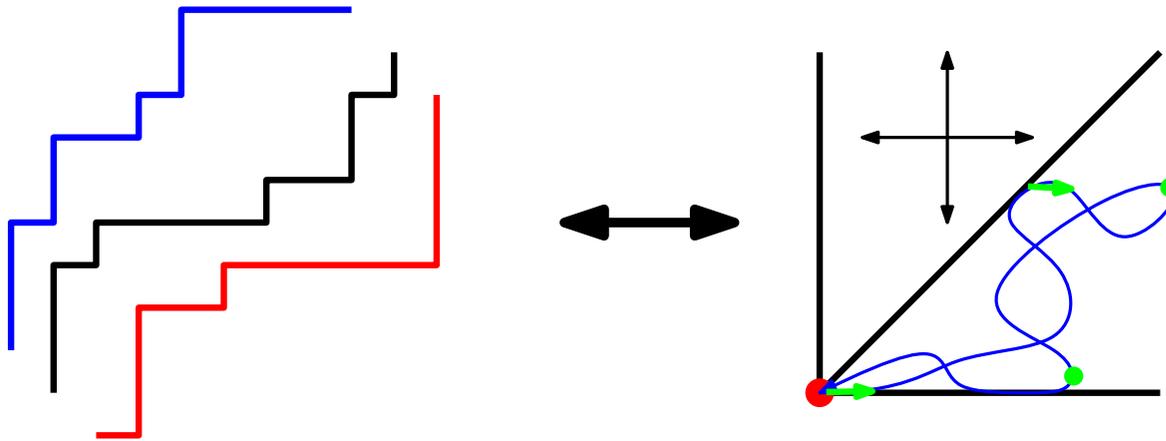


Excursion dans le  
quart de plan



# Stratégie :

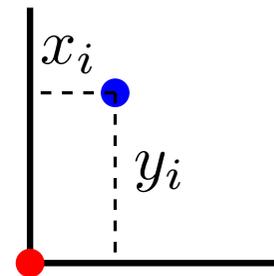
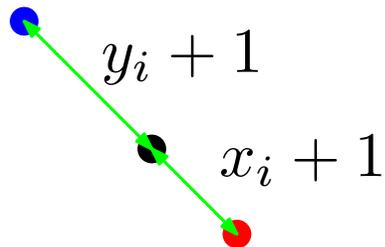
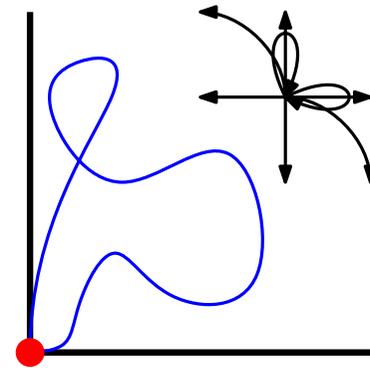
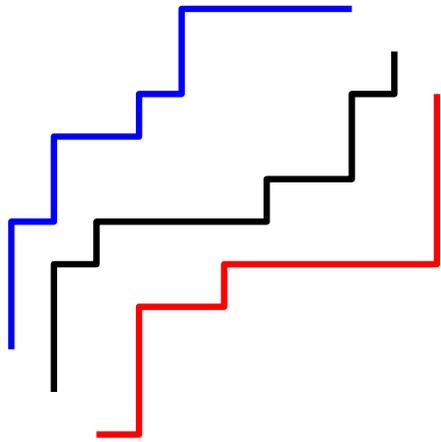
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Les triplets de chemins de longueur  $n$   
sont en bijection avec  
les excursions Simples sous-diagonales avec des pics  
marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.

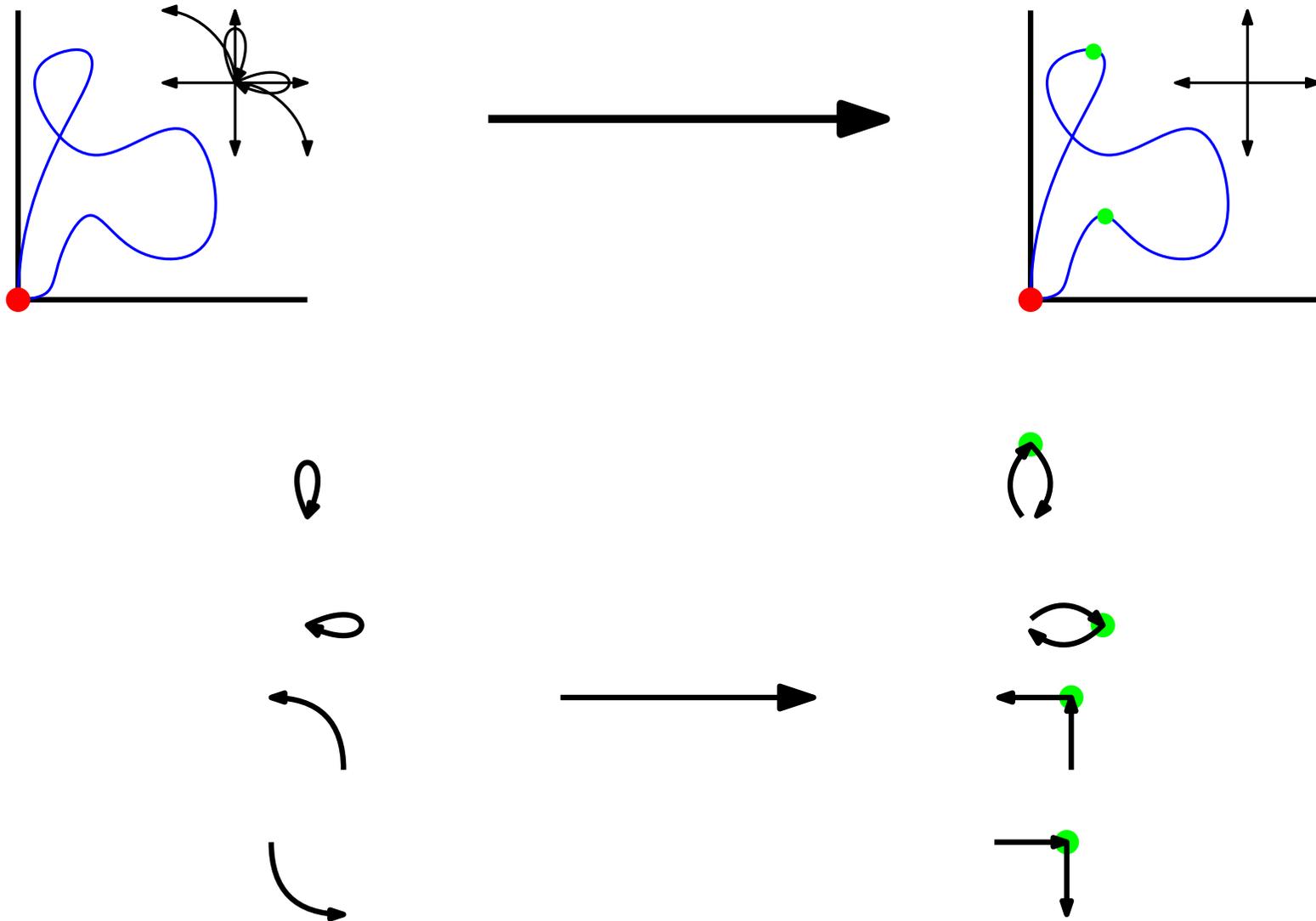
# Stratégie :

se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

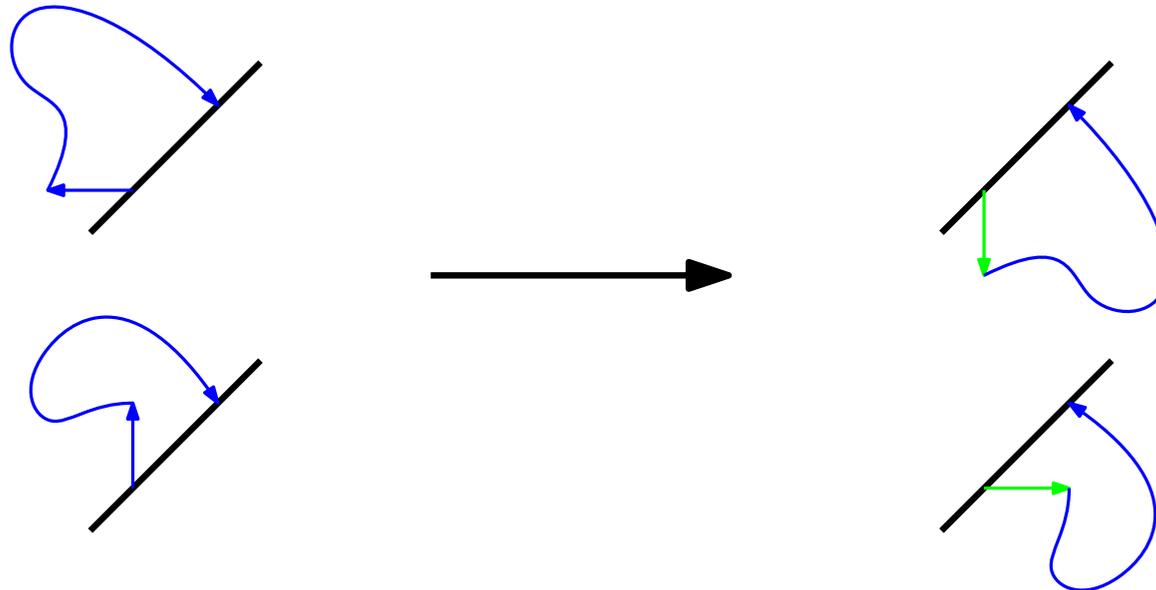
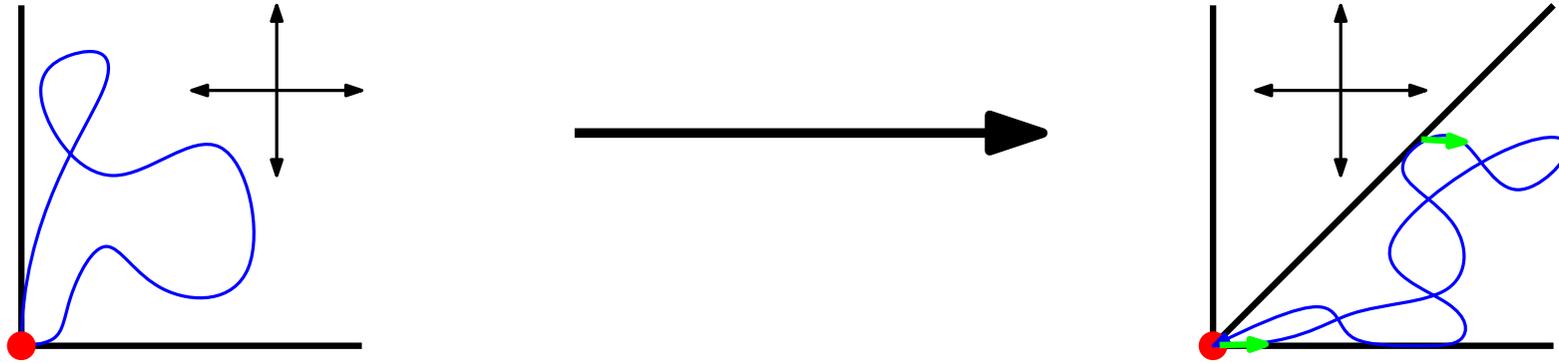


# Stratégie :

se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Stratégie :  
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Stratégie :  
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Les triplets de chemins de longueur  $n$   
sont en bijection avec  
les excursions Simples sous-diagonales avec des pics  
marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.

# Stratégie :

se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Les triplets de chemins de longueur  $n$   
sont en bijection avec  
les excursions Simples sous-diagonales avec des pics  
marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.

Les diagrammes de partition ouvertes sans  
3-croisements améliorés de longueur  $n$   
sont en bijection avec  
les excursions Simples sous-diagonales avec des pics  
marqués et des *pas gauche le long de l'axe* marqués.

# Inversion des statistiques

## Théorème :

Il existe une bijection entre :

- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $i$  pas quittant la diagonale, et  $j$  pas gauche le long de l'axe,  
et :
- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $j$  pas quittant la diagonale, et  $i$  pas gauche le long de l'axe.

# Inversion des statistiques

## Théorème :

Il existe une bijection entre :

- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $i$  pas quittant la diagonale, et  $j$  pas gauche le long de l'axe,  
et :
- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $j$  pas quittant la diagonale, et  $i$  pas gauche le long de l'axe.

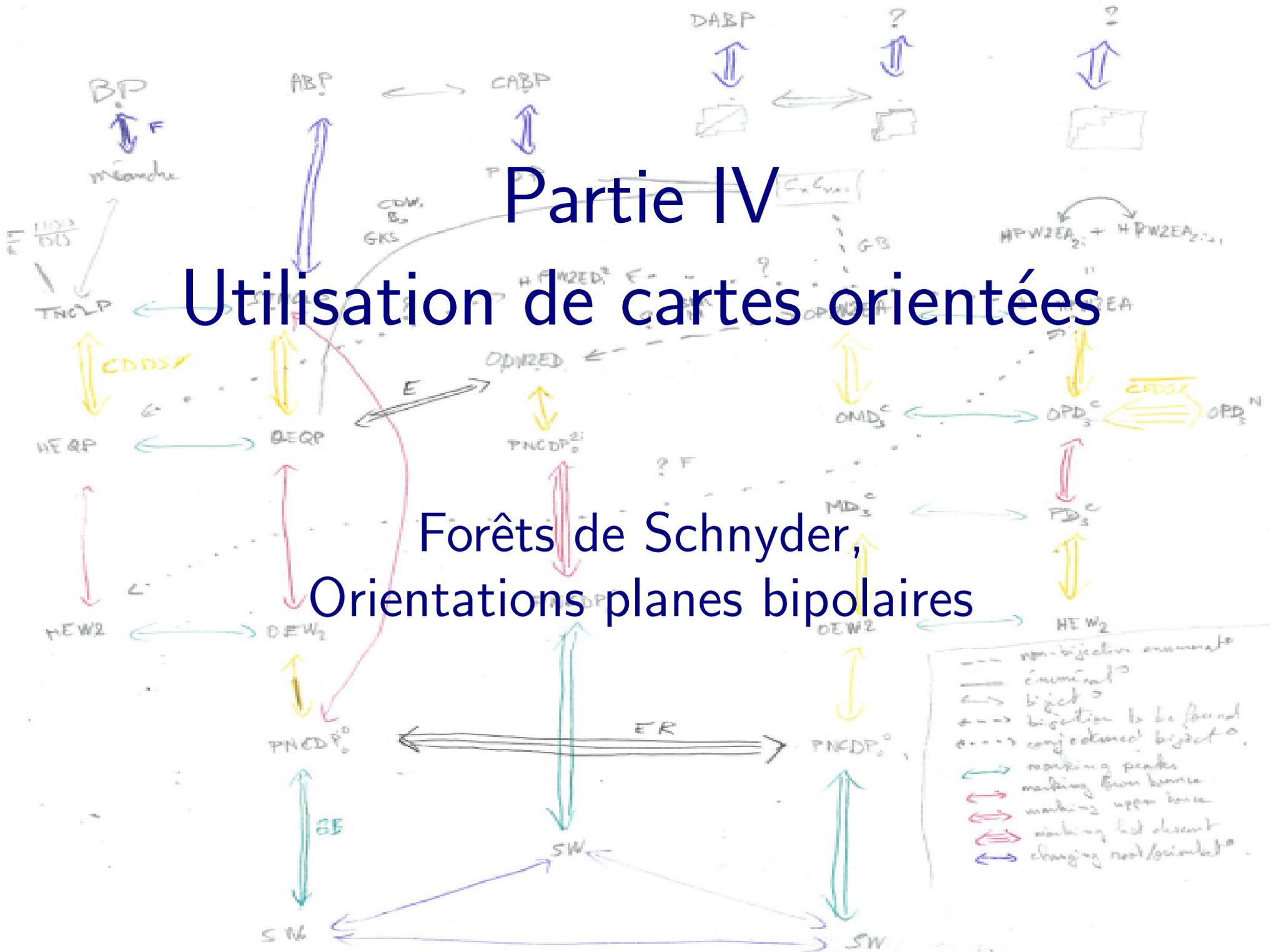
## Preuves :

- Représentation par des paires de chemins de Dyck qui ne se croisent pas, et opérations locales sur le chemin inférieur. (Elizalde - Rubey 2012)
- Représentation par des forêts de Schnyder, puis changement de racine et d'orientation

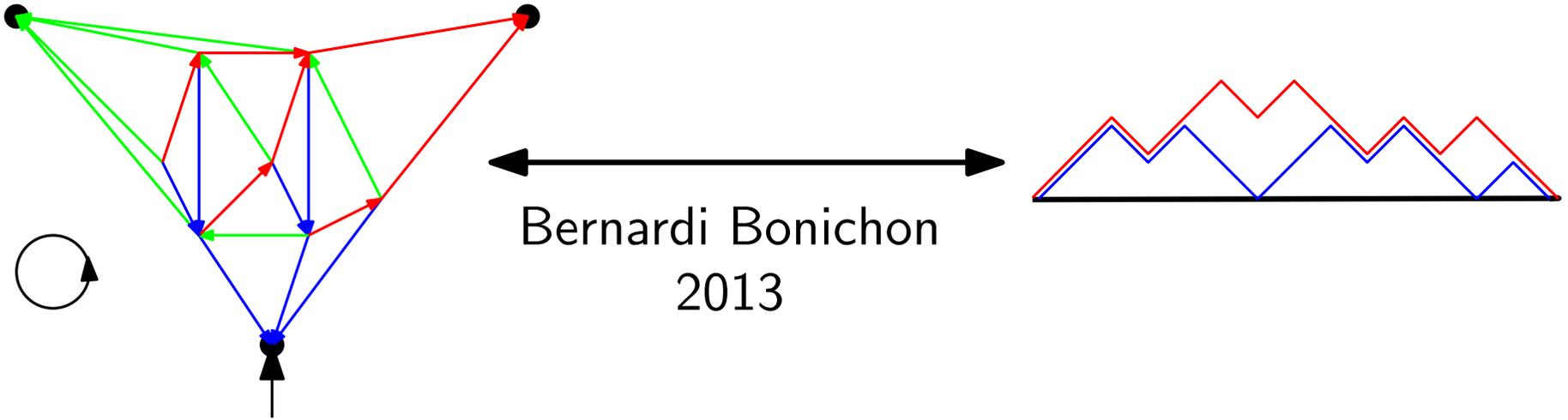
# Partie IV

## Utilisation de cartes orientées

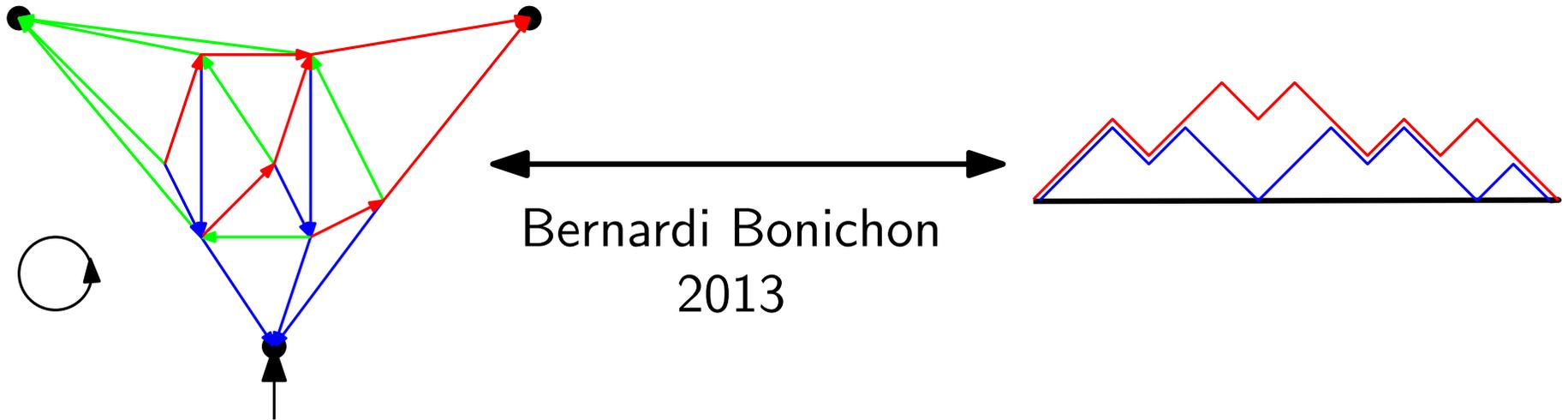
### Forêts de Schnyder, Orientations planes bipolaires



# Forêts de Schnyder



# Forêts de Schnyder



- degré de la racine bleue
- degré de la racine rouge
- degré de la racine verte
- nombre de feuilles de l'arbre bleu
- nombre de sommets internes de l'arbre rouge



- nombre de pas bleu quittant l'axe
- longueur de la dernière descente rouge
- nombre de pas montant communs
- nombre de pics bleu
- nombre de pics rouge

# Forêts de Schnyder

## Propriété :

Il existe une bijection entre :

- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $i$  pas quittant la diagonale, et  $j$  pas gauche le long de l'axe, et :
- les excursions Simples sous-diagonales de longueur  $n$  ayant  $p$  pics,  $j$  pas quittant la diagonale, et  $i$  pas gauche le long de l'axe

## Théorème :

Les triplets de chemins de longueur  $n$   
sont en bijection avec

Les diagrammes de partition ouvertes sans 3-croisements  
améliorés de longueur  $n$ .

# Forêts de Schnyder

## Propriété :

Il existe une bijection entre :

- les paires de chemins de Dyck non-intersectant de longueur  $n$  ayant  $i$  pas inférieurs quittant l'axe, et une dernière descente supérieure de longueur  $j$ , et :
- les paires de chemins de Dyck non-intersectant de longueur  $n$  ayant  $j$  pas inférieurs quittant l'axe, et une dernière descente supérieure de longueur  $i$ .

## Théorème (Elizalde 2014) :

Les excursions Simples du quart de plan de longueur  $n$  croisant  $i$  fois la diagonale  
sont en bijection avec

Les marches Simples sous-diagonales de longueur  $n$  qui finissent en  $(i, i)$ .

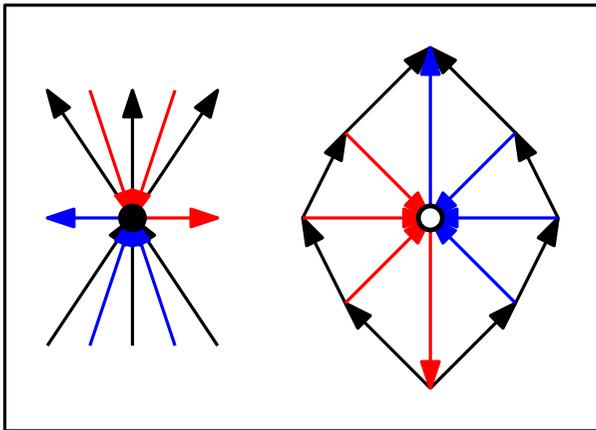
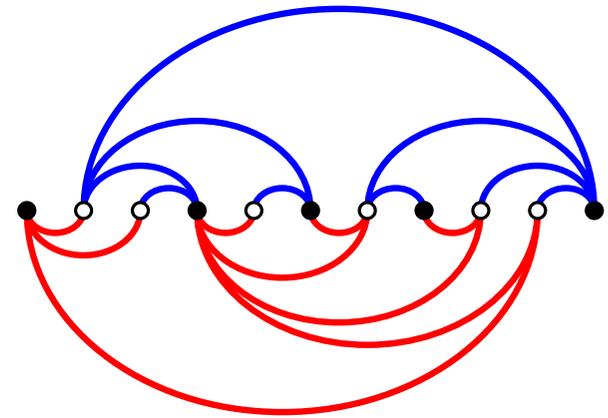
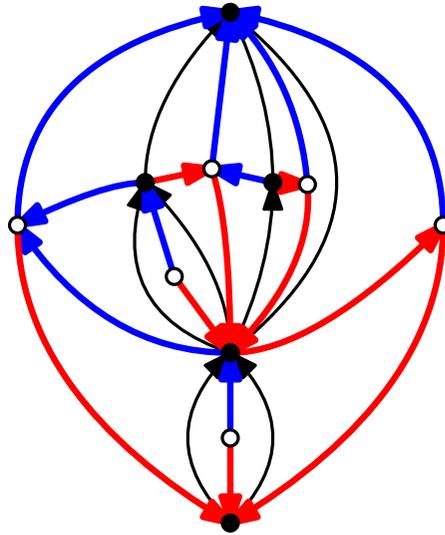
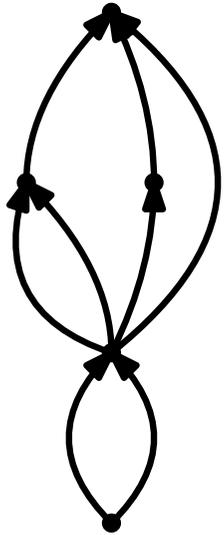
# Forêts de Schnyder

## Théorème :

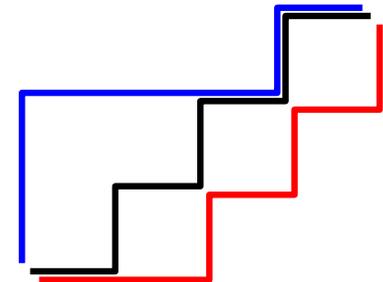
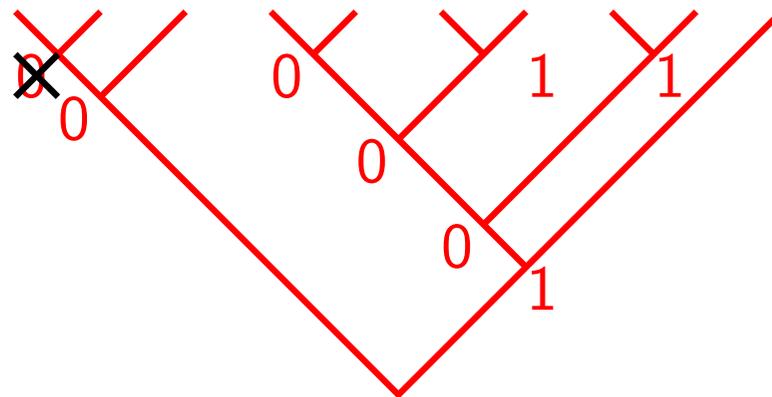
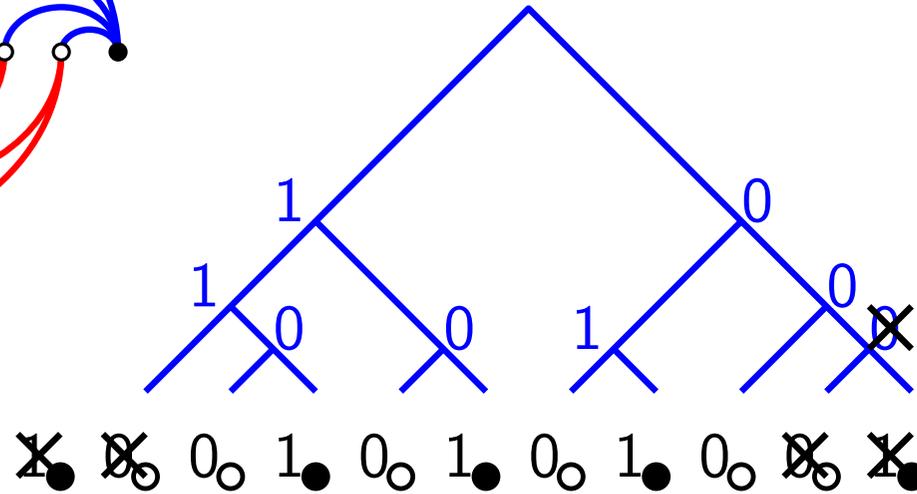
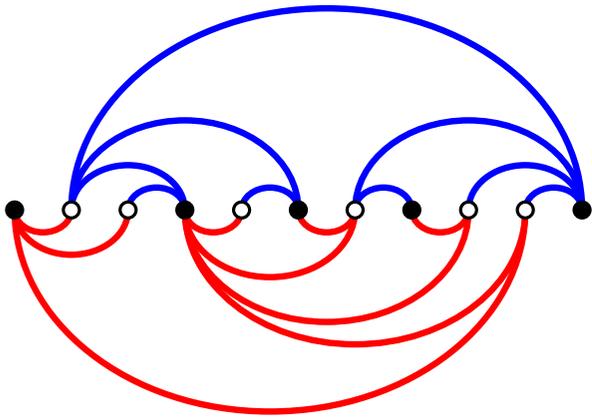
Il existe une bijection entre :

- les paires de chemins de Dyck non-intersectant de longueur  $n$  ayant  $i$  pics supérieurs, et  $n - j$  pics inférieurs, et :
- les paires de chemins de Dyck non-intersectant de longueur  $n$  ayant  $j$  pics supérieurs, et  $n - i$  pics inférieurs.

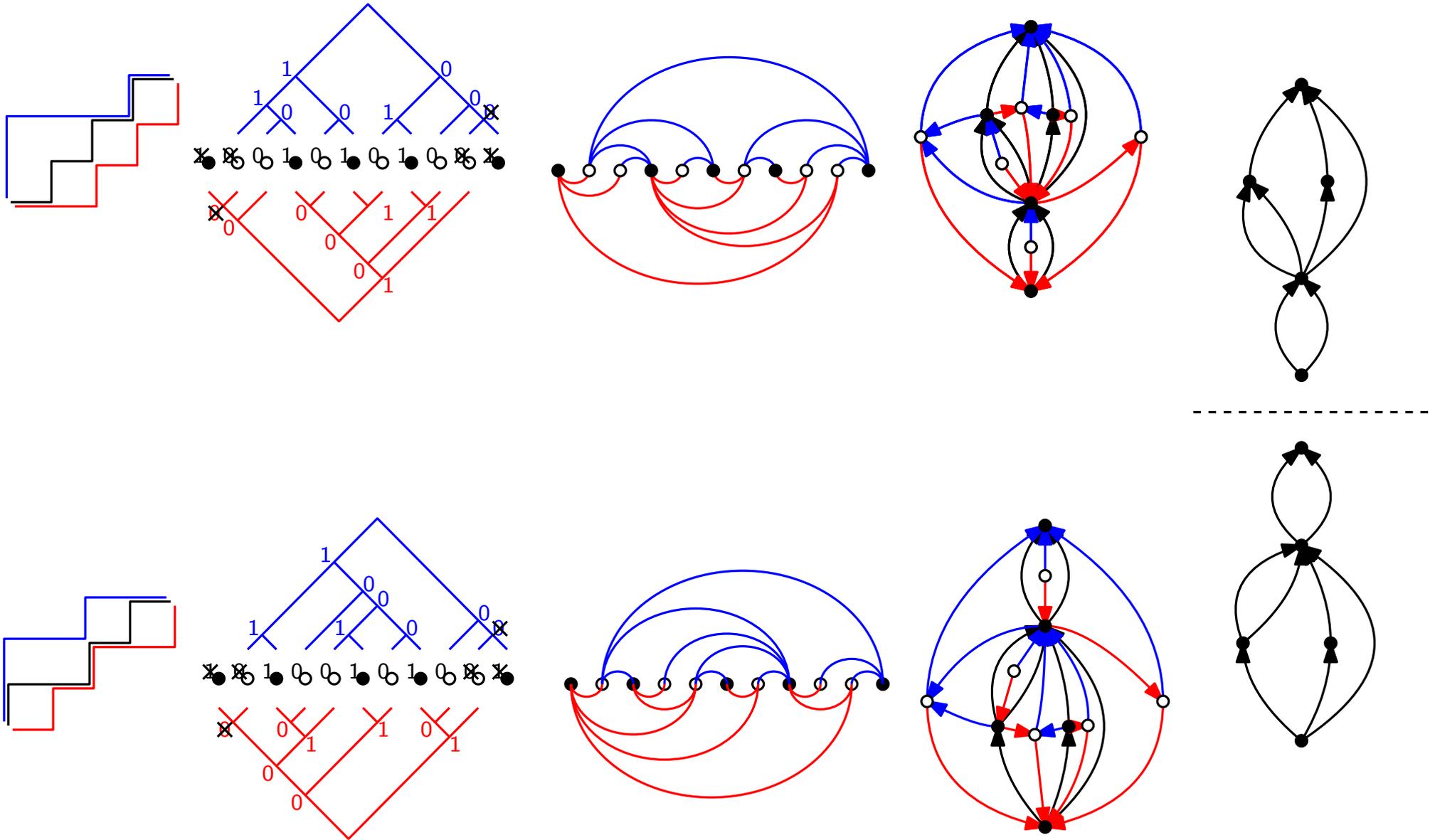
# Orientations planes bipolaires

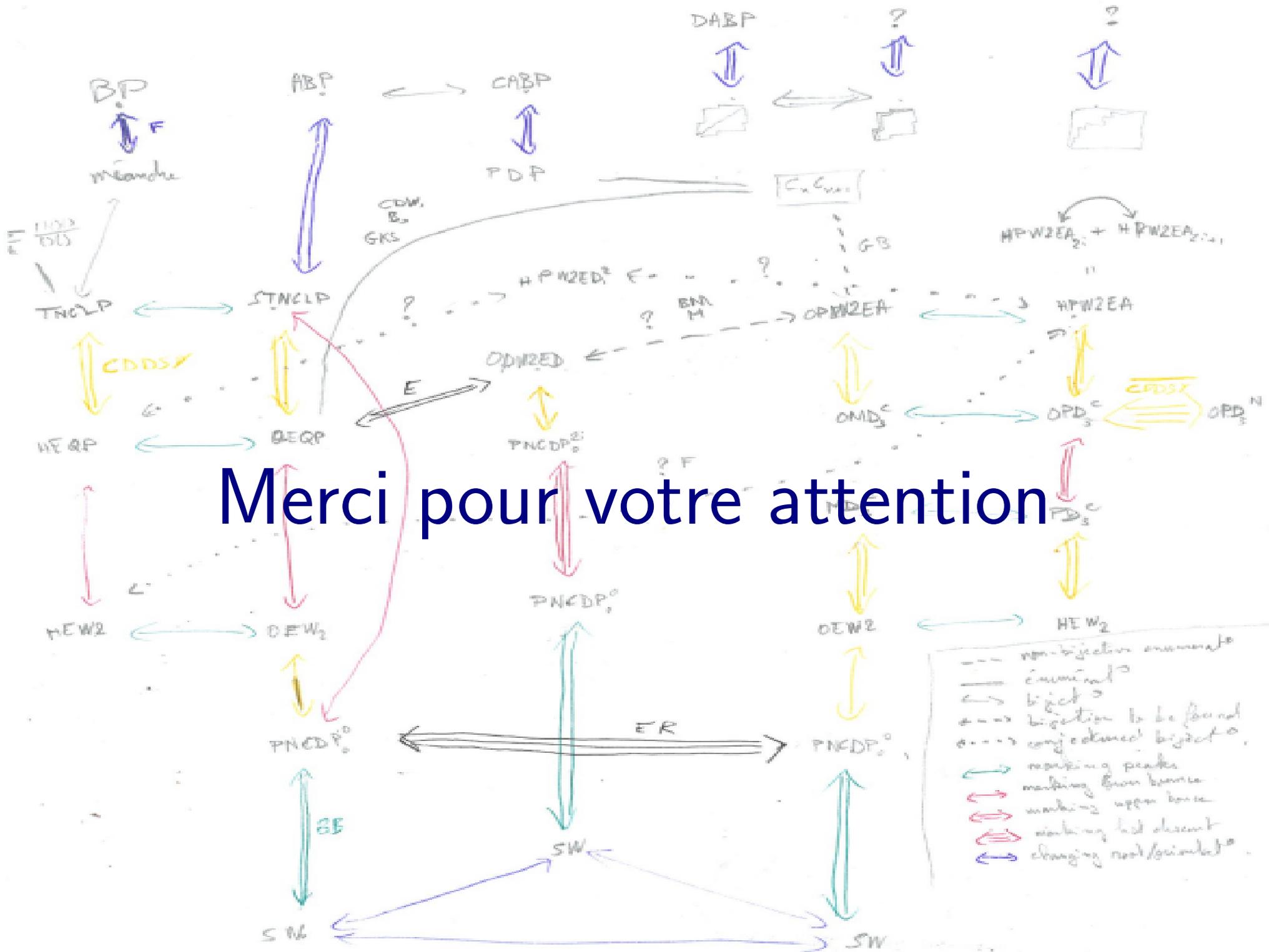


# Orientations planes bipolaires



# Orientations planes bipolaires





Merci pour votre attention