Une étude comparée de deux ensembles de quadrangulations

Emmanuel Guitter (IPhT, CEA Saclay)

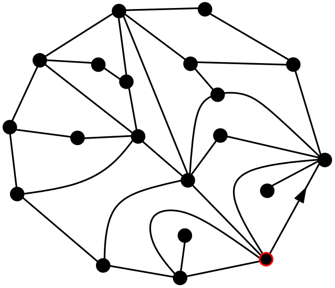
28 oct 2015

travail en commun avec Éric Fusy

Quadrangulations planaires à bord

$\equiv$ cartes planaires enracinées dont toutes les faces internes ont degré 4

$\Rightarrow$ la face externe a degré pair
(= longueur du bord)



1ère caractérisation

F_n = fonction génératrice des quadrangulations à bord de longueur $2n$

ou sous forme compacte

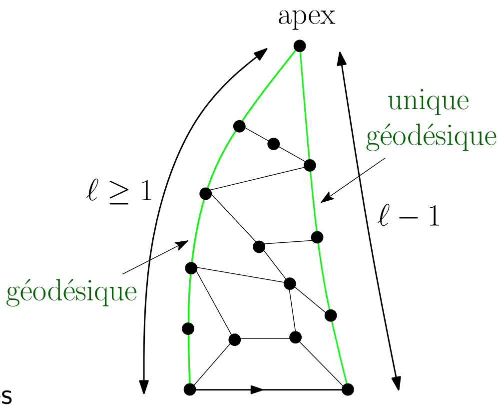
$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$$

“Slices” $=$ portions de quadrangulation

$\equiv$ quadrangulations à bord particulières

apex $\equiv$ sommet à distance ℓ du sommet racine le long du bord (de longueur 2ℓ)

- est à distance ℓ du sommet racine sur la carte (bord gauche $=$ géodésique)
- est à distance $\ell - 1$ de l'extrémité de l'arête racine (bord droit $=$ géodésique)
- le bord droit est l'unique géodésique entre ses extrémités

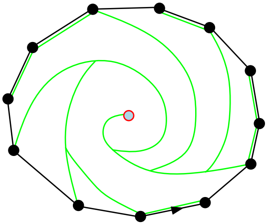


2ème caractérisation

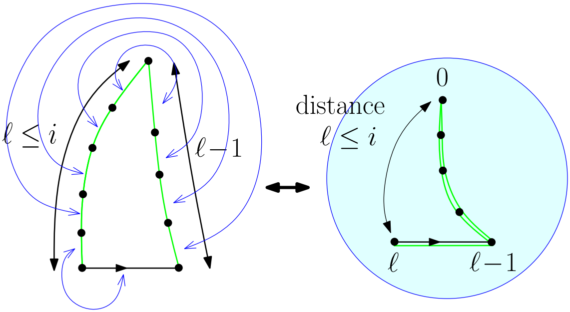
$R_i =$ fonction génératrice des slices avec $\ell \leq i$

- les F_n et les R_i sont intimement liés $\rightarrow$ on a typiquement

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n = \cfrac{1}{1 - z \cfrac{R_1}{1 - z \cfrac{R_2}{1 - z \cfrac{R_3}{1 - z \cfrac{R_4}{1 - \cdots}}}}}$$



- la connaissance des R_i donne immédiatement la fonction à deux points dépendant des distances



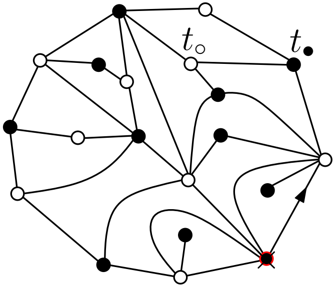
1er ensemble: quadrangulations bicoloriées

On bicolorie la quadrangulation en noir et blanc (sommet racine = noir)

- poids $t_\bullet$ par sommet noir autre que le sommet racine

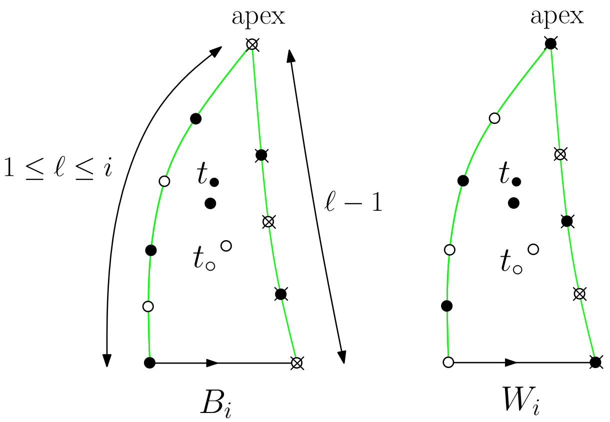
- poids $t_\circ$ par sommet blanc

$$F_n \to F_n^{(1)}(t_\bullet, t_\circ)$$



R_i se décline sous deux espèces

$$R_i \to \begin{cases} B_i(t_\bullet, t_\circ) \\ \\ W_i(t_\bullet, t_\circ) \end{cases}$$



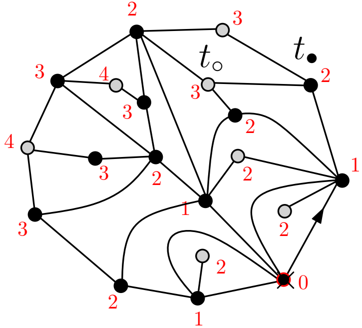
2ème ensemble: maxima locaux pour la distance au sommet racine

(introduit par Ambjørn et Budd)

On étiquette les sommets par leur distance de graphe au sommet racine
On distingue les maxima locaux pour cet étiquetage

- poids $t_\circ$ par maximum local

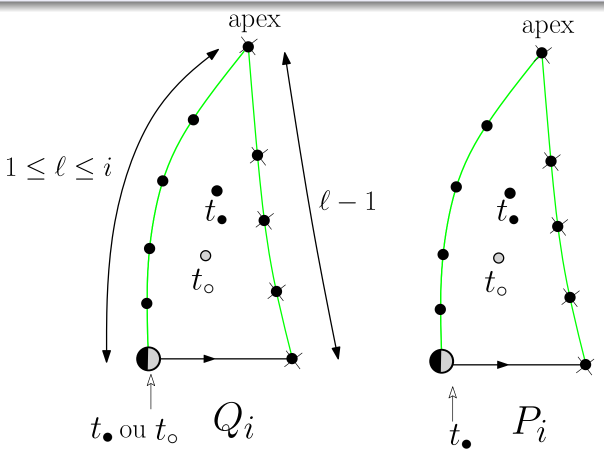
- poids $t_\bullet$ pour les autres sommets différents du sommet racine



$$F_n \to F_n^{(2)}(t_\bullet, t_\circ)$$

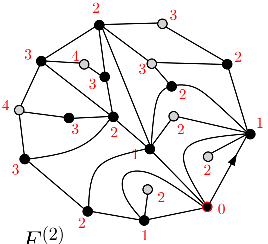
Pour les slices, on regarde les maxima locaux pour la distance à l'apex

$$R_i \to \begin{cases} Q_i(t_\bullet, t_\circ) \\ \\ P_i(t_\bullet, t_\circ) \end{cases}$$

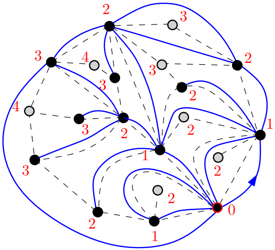


Comparaison des F_n

on a l'identité $\quad F_n^{(2)}(t_\bullet, t_\circ) = F_n^{(1)}(t_\bullet, t_\circ)$



$F_n^{(2)}$

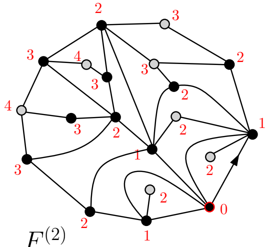


Bijection d'Ambjørn-Budd (généralisée)

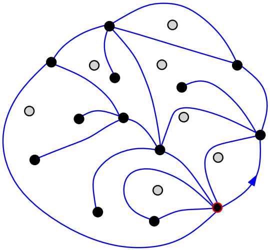
- dans chaque face interne, on relie les deux coins suivis (dans le sens horaire) par une étiquette plus grande
- dans la face externe, on relie cycliquement les coins successifs suivis (dans le sens anti-horaire) par une étiquette plus grande

Comparaison des F_n

on a l'identité $\quad F_n^{(2)}(t_\bullet, t_\circ) = F_n^{(1)}(t_\bullet, t_\circ)$



$F_n^{(2)}$



carte à bord sans ponts*

de longueur n

avec un $\circ$

dans chaque face

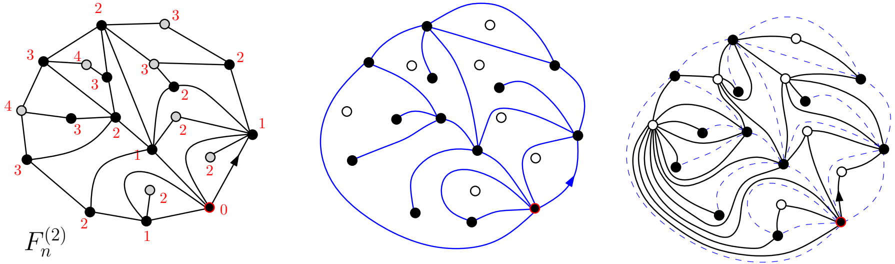
* en fait la face externe est une hyperarête

Bijection d'Ambjørn-Budd (généralisée)

- dans chaque face interne, on relie les deux coins suivis (dans le sens horaire) par une étiquette plus grande
- dans la face externe, on relie cycliquement les coins successifs suivis (dans le sens anti-horaire) par une étiquette plus grande

Comparaison des F_n

on a l'identité $\quad F_n^{(2)}(t_\bullet, t_\circ) = F_n^{(1)}(t_\bullet, t_\circ)$

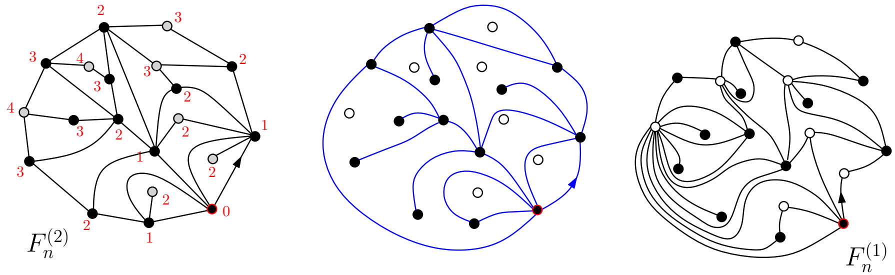


Bijection classique (généralisée)

- on colorie les sommets gris en blanc !
- dans chaque face interne, on relie le sommet blanc aux coins noirs de la face

Comparaison des F_n

on a l'identité $\quad F_n^{(2)}(t_\bullet, t_\circ) = F_n^{(1)}(t_\bullet, t_\circ)$

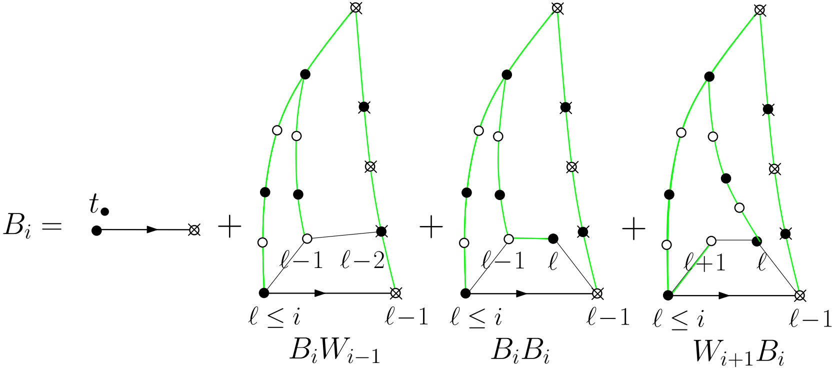


Bijection classique (généralisée)

- on colorie les sommets gris en blanc !
- dans chaque face interne, on relie le sommet blanc aux coins noirs de la face

Comparaison des (B_i, W_i) et des (P_i, Q_i)

Récurrence pour (B_i, W_i):

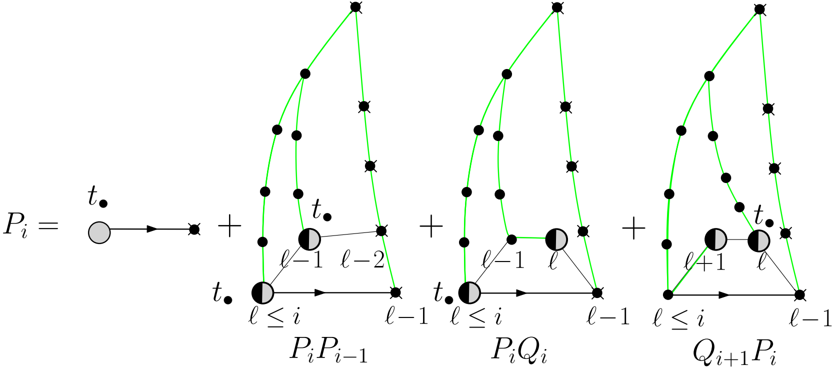


$$B_i = t_\bullet + B_i(W_{i-1} + B_i + W_{i+1})$$

$$W_i = t_\circ + W_i(B_{i-1} + W_i + B_{i+1})$$

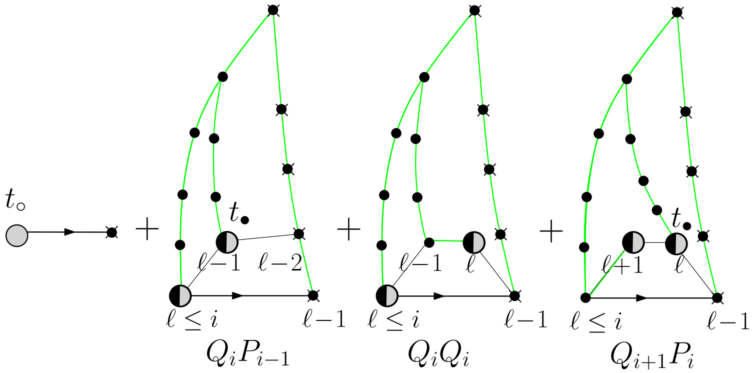
pour $i \geq 1$, avec $B_0 = W_0 = 0$

Récurrence pour (P_i, Q_i):



$$P_i = t_\bullet + P_i(P_{i-1} + Q_i + Q_{i+1})$$

Récurrence pour (P_i, Q_i):

$Q_i =$ 

$$P_i = t_\bullet + P_i(P_{i-1} + Q_i + Q_{i+1})$$

$$Q_i = t_\circ + Q_i(P_{i-1} + Q_i) + P_i Q_{i+1}$$

pour $i \geq 1$, avec $P_0 = Q_0 = 0$

Comparaison des slices à bord de longueur arbitraire

Si on supprime la contrainte $\ell \leq i$:

$$B_i \to B \equiv \lim_{i\to\infty} B_i$$

On définit de même les limites W, P et Q de W_i, P_i et Q_i

alors

$$B = t_\bullet + B(2W + B) \qquad W = t_\circ + W(2B + W)$$

$$P = t_\bullet + P(2Q + P) \qquad Q = t_\circ + Q(2P + Q)$$

et donc

$$P = B \qquad Q = W$$

Comparaison des deux ensembles

ensemble 1

$F_n^{(1)}$
B
W

ensemble 2

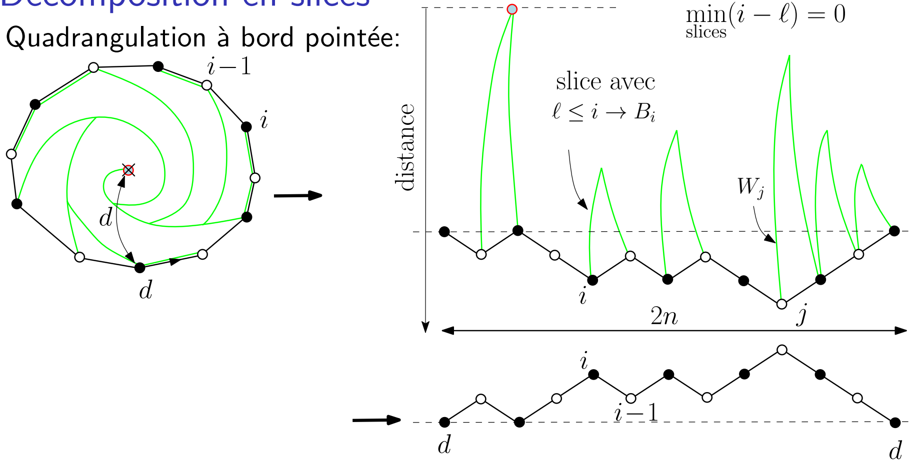
$F_n^{(2)}$
P
Q

en revanche, les B_i et W_i ne sont pas égaux aux P_i et Q_i

$$B_2 = t_\bullet + t_\bullet(t_\bullet + 2t_\circ) + t_\bullet(2t_\bullet^2 + 9t_\bullet t_\circ + 6t_\circ^2) + \cdots$$
$$W_2 = t_\circ + t_\circ(2t_\bullet + t_\circ) + t_\circ(6t_\bullet^2 + 9t_\bullet t_\circ + 2t_\circ^2) + \cdots$$
$$P_2 = t_\bullet + t_\bullet(t_\bullet + 2t_\circ) + t_\bullet(t_\bullet^2 + 10t_\bullet t_\circ + 6t_\circ^2) + \cdots$$
$$Q_2 = t_\circ + t_\circ(2t_\bullet + t_\circ) + t_\circ(5t_\bullet^2 + 10t_\bullet t_\circ + 2t_\circ^2) + \cdots$$

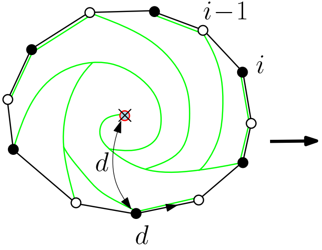
Décomposition en slices

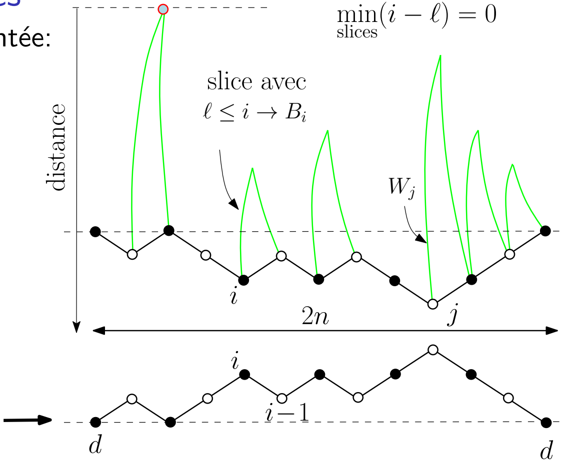
Quadrangulation à bord pointée:



Décomposition en slices

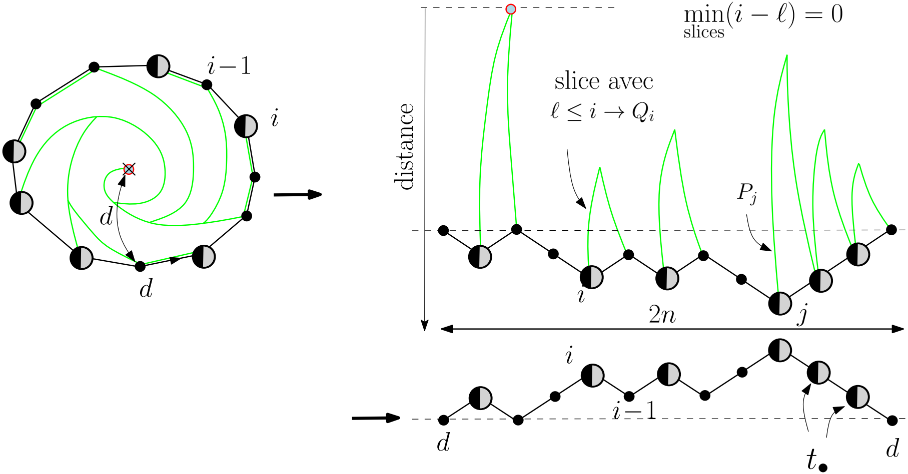
Quadrangulation à bord pointée:



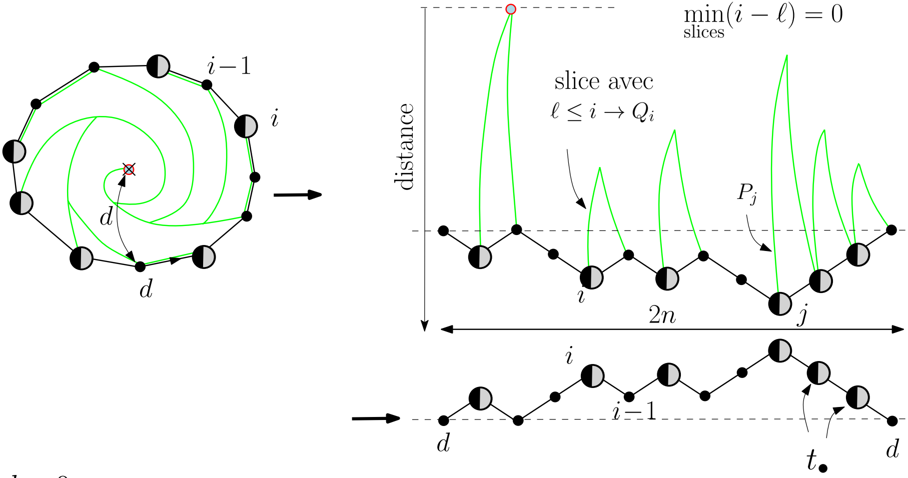


Suppression du pointage: $d = 0$

$F_n(t_\bullet, t_\circ) =$ f.g. des chemins de Dyck bicoloriés de longueur $2n$ (de 0 à 0 restant ≥ 0), avec poids B_i (resp. W_i) par descente $i \to i-1$ commençant par un sommet noir (resp. blanc)



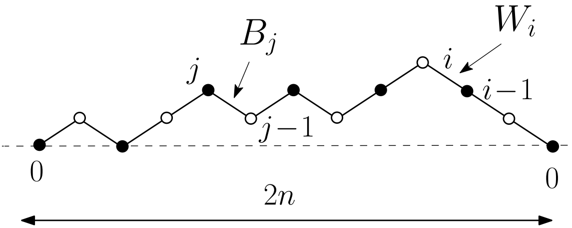
maxima locaux pour la distance au sommet pointé = maxima locaux dans les slices pour la distance à l'apex SAUF pour le sommet racine de chaque slice. Si on suit une descente, ce n'est pas un maximum local pour la distance au sommet pointé même si c'en est un dans sa slice $\to t_\bullet$
$\to$ la slice est énumérée par P_i

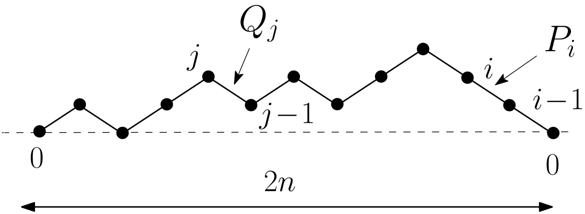


$d = 0$:

$F_n(t_\bullet, t_\circ)$ = f.g. des chemins de Dyck de longueur $2n$ (de 0 à 0 restant ≥ 0), avec poids Q_i (resp. P_i) par descente $i \to i-1$ suivant une montée (resp. une descente)

$\rightarrow$ deux interprétations pour $F_n(t_\bullet, t_\circ)$

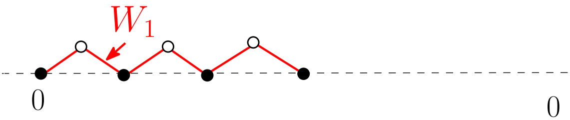




Fractions continues

Résultat classique sur les chemins de Dyck

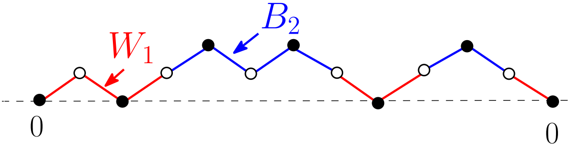
$$F(z) \equiv \sum_{n\geq 0} F_n z^n = \frac{1}{1 - zW_1}$$



Fractions continues

Résultat classique sur les chemins de Dyck

$$F(z) \equiv \sum_{n\geq 0} F_n z^n = \cfrac{1}{1 - z\cfrac{W_1}{1 - zB_2}}$$



Fractions continues

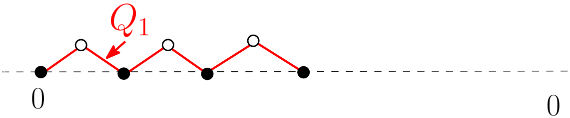
Résultat classique sur les chemins de Dyck

$$F(z) \equiv \sum_{n\geq 0} F_n z^n = \cfrac{1}{1 - z\cfrac{W_1}{1 - z\cfrac{B_2}{1 - z\cfrac{W_3}{1 - z\cfrac{B_4}{1 - \cdots}}}}}$$

$\rightarrow$ fraction continue de Stieltjes

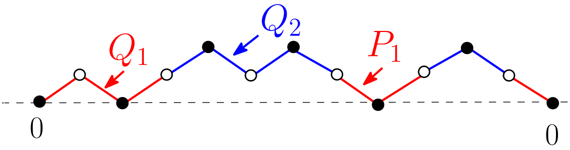
Mais on a aussi

$$F(z) = \frac{1}{1 - z Q_1}$$



Mais on a aussi

$$F(z) = \frac{1}{1 - zQ_1 - zP_1\left(\frac{1}{1-zQ_2} - 1\right)} = \frac{1}{1 - z(Q_1 - P_1) - z\frac{P_1}{1-zQ_2}}$$



Mais on a aussi

$$F(z) = \cfrac{1}{1-z(Q_1-P_1)-z\cfrac{P_1}{1-z(Q_2-P_2)-z\cfrac{P_2}{1-z(Q_3-P_3)-z\cfrac{P_3}{1-\cdots}}}}$$

qui se réécrit

$$F(z) = \cfrac{1}{1-zY_1-z\cfrac{Y_2}{1-zY_3-z\cfrac{Y_4}{1-zY_5-z\cfrac{Y_6}{1-\cdots}}}}$$

où

$$Y_{2i-1} \equiv Q_i - P_i \ , \qquad Y_{2i} = P_i$$

$\rightarrow$ fraction continue de Thron ou T-fraction
(voir Roblet et Viennot 1994 - merci à A. Sokal)

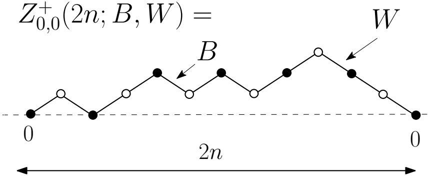
Expression pour F_n

De l'analyse de l'ensemble 1, on montre facilement que

$$F_n = A_0 \; Z^+_{0,0}(2n; B, W) + A_1 \; Z^+_{0,0}(2n+2; B, W)$$
$$A_0 = \frac{B}{t_\bullet}(1-B-W), \;\; A_1 = -\frac{B}{t_\bullet}$$

où

$Z^+_{0,0}(2n; B, W) =$



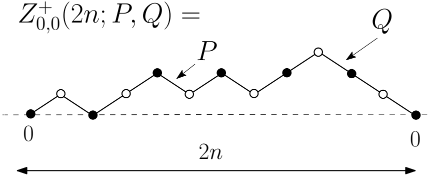
Expression pour F_n

On en déduit immédiatement que pour l'ensemble 2

$$F_n = A_0 \; Z^+_{0,0}(2n; P, Q) + A_1 \; Z^+_{0,0}(2n+2; P, Q)$$
$$A_0 = \frac{P}{t_\bullet}(1-P-Q), \;\; A_1 = -\frac{P}{t_\bullet}$$

où

$Z^+_{0,0}(2n; P, Q) =$



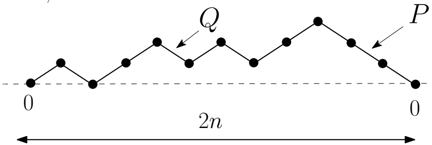
Expression pour F_n

On en déduit immédiatement que pour l'ensemble 2

$$F_n = A_0 \; Z^+_{0,0}(2n; P, Q) + A_1 \; Z^+_{0,0}(2n+2; P, Q)$$
$$A_0 = \frac{P}{t_\bullet}(1-P-Q), \; A_1 = -\frac{P}{t_\bullet}$$

où

$Z^+_{0,0}(2n; P, Q) =$



Posons en effet

$$Z(z;P,Q) \equiv \sum_{n\geq 0} Z^{+}_{0,0}(2n;P,Q) z^n$$

D'après la définition de l'ensemble 1, $Z(z;P,Q)$ est solution de

$$Z(z;P,Q) = \frac{1}{1 - z\,\dfrac{Q}{1 - z\,P\,Z(z;P,Q)}}$$

Cette équation est équivalente à

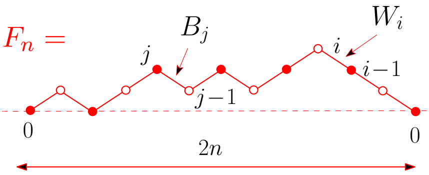
$$Z(z;P,Q) = \frac{1}{1 - z\,(Q-P) - z\,P\,Z(z;P,Q)}$$

d'où l'interprétation dans l'ensemble 2

Rq: $[Q^m P^{n-m}] Z^{+}_{0,0}(2n;P,Q) =$ nombre de Narayana $N(n,m)$

Comparaison des deux ensembles

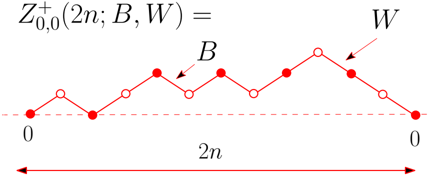
$F_n =$



$$= A_0 \; Z^+_{0,0}(2n; B, W) + A_1 \; Z^+_{0,0}(2n+2; B, W)$$

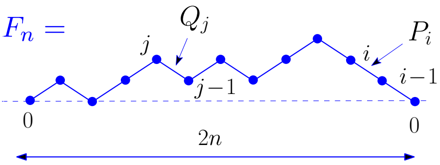
avec

$Z^+_{0,0}(2n; B, W) =$



P_i, Q_i: développement de $F(z)$ en fraction continue de Stieltjes

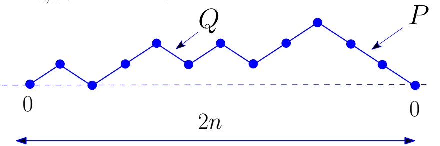
$F_n =$



$$= A_0 \; Z^+_{0,0}(2n; P, Q) + A_1 \; Z^+_{0,0}(2n+2; P, Q)$$

avec

$Z^+_{0,0}(2n; P, Q) =$



P_i, Q_i: développement de $F(z)$ en fraction continue de Thron

Le cas Stieltjes

On peut obtenir B_i et W_i à partir des F_n

En effet, un résultat standard de la théorie des fractions continues de Stieltjes dit que

$$B_{2i} = \frac{h_i^{(0)}}{h_{i-1}^{(0)}} \Big/ \frac{h_{i-1}^{(1)}}{h_{i-2}^{(1)}} \qquad W_{2i-1} = \frac{h_{i-1}^{(1)}}{h_{i-2}^{(1)}} \Big/ \frac{h_{i-1}^{(0)}}{h_{i-2}^{(0)}}$$

pour $i \geq 1$, en termes des déterminants de Hankel

$$h_i^{(0)} = \det(F_{n+m})_{0 \leq n,m \leq i} \qquad h_i^{(1)} = \det(F_{n+m+1})_{0 \leq n,m \leq i}$$

et la convention $h_{-1}^{(0)} = h_{-1}^{(1)} = 1$

Pour l'autre parité B_{2i-1} et W_{2i}, il suffit d'échanger $t_\bullet$ et $t_\circ$

Expressions pour B_i et W_i

Le calcul explicite des déterminants de Hankel conduit à

$$B_{2i} = B\frac{(1-x^{2i})(1-\gamma x^{2i+3})}{(1-\gamma x^{2i+1})(1-x^{2i+2})} \quad W_{2i+1} = W\frac{(1-\gamma x^{2i+1})(1-x^{2i+4})}{(1-x^{2i+2})(1-\gamma x^{2i+3})}$$

$$B_{2i+1} = B\frac{(1-x^{2i+1}/\gamma)(1-x^{2i+4})}{(1-x^{2i+2})(1-x^{2i+3}/\gamma)} \quad W_{2i} = W\frac{(1-x^{2i})(1-x^{2i+3}/\gamma)}{(1-x^{2i+1}/\gamma)(1-x^{2i+2})}$$

où x et γ sont obtenus en fonction de B et W (eux-mêmes fonctions de $t_\bullet$ et $t_\circ$) via

$$1-2(B+W)-\sqrt{BW}\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{B/W}+x}{1+\sqrt{B/W}\,x}$$

Le cas Thron

Peut-on obtenir de la même façon les P_i et Q_i à partir des F_n ?

Un résultat un peu moins standard (voir Di Francesco et Kedem 2010) nous dit que

P_i et Q_i s'expriment en termes de déterminants "de type Hankel"

$$\det(F_{n+m-i-2})_{0\leq n,m\leq i} \quad \text{et} \quad \det(F_{n+m-i-1})_{0\leq n,m\leq i}$$

Problème: Fait intervenir des F_n pour n négatif. Que valent-ils ?

En fait, n'importe quel choix de F_n pour n négatif donne une solution $(P_i, Q_i)_{i\geq 1}$ dont la fraction continue de Thron est égale à $F(z)$

Ce n'est pas surprenant car le système qui donne les P_i et Q_i en terme des F_n est sous-déterminé

$$F(z) = \cfrac{1}{1 - zY_1 - z\cfrac{Y_2}{1 - zY_3 - z\cfrac{Y_4}{1 - zY_5 - z\cfrac{Y_6}{1 - \cdots}}}}$$

donne en développant en z

$$\begin{aligned} F_1 &= (Y_1 + Y_2) \\ F_2 &= (Y_1 + Y_2)^2 + Y_2(Y_3 + Y_4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

et on voit qu'à chaque étape, deux nouveaux Y_i apparaissent

Il y a moins d'information dans les F_n que dans les P_i et Q_i

NB: Le même problème est en fait déjà présent dans le cas bicolorié où la donnée de $F_n(t_\bullet, t_\circ)$ ne permet pas de calculer tous les B_i et W_i mais seulement les B_{2i} et les W_{2i-1}. La moitié manquante de l'information n'est autre que $F_n(t_\circ, t_\bullet)$ et est donc facilement accessible par symétrie.

Ici, on a accès uniquement à certaines combinaisons de Y_i. La moitié manquante de l'information est la donnée de la fraction continue de Thron duale (voir Roblet et Viennot)

$$\tilde{F}(z) \equiv \sum_{n\geq 0} \tilde{F}_n z^n = \cfrac{1}{1 - z\tilde{Y}_1 - z\cfrac{\tilde{Y}_2}{1 - z\tilde{Y}_3 - z\cfrac{\tilde{Y}_4}{1 - z\tilde{Y}_5 - z\cfrac{\tilde{Y}_6}{1 - \cdots}}}}$$

où nous avons défini (en supposant $Y_{2i-1} \neq 0$ pour tout $i \geq 1$)

$$\tilde{Y}_{2i-1} \equiv \frac{1}{Y_{2i-1}}\ , \qquad \tilde{Y}_{2i} \equiv \frac{Y_{2i}}{Y_{2i-1} Y_{2i+1}}$$

En développant en z

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (Y_1 + Y_2) \\
\tilde{F}_1 &= \frac{(Y_2 + Y_3)}{Y_1 Y_3} \\
F_2 &= (Y_1 + Y_2)^2 + Y_2(Y_3 + Y_4) \\
\tilde{F}_2 &= \frac{(Y_2 + Y_3)^2}{(Y_1 Y_3)^2} + \frac{Y_2(Y_4 + Y_5)}{Y_1 Y_3^2 Y_5} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

et la donnée de $F(z)$, $\tilde{F}(z)$ et Y_1 fixe les Y_i (donc les P_i et Q_i)

Formules de Di Francesco Kedem

Si on pose

$$f_n \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ Y_1\, F_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \tilde{F}_{-n} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

et on définit

$$H_i^{(0)} \equiv \det(f_{n+m-i-1})_{1 \leq n,m \leq i} \qquad H_i^{(1)} \equiv (f_{n+m-i})_{1 \leq n,m \leq i}$$

alors

$$Y_{2i} = \frac{H_{i-1}^{(0)}}{H_i^{(0)}} \Big/ \frac{H_i^{(1)}}{H_{i+1}^{(1)}} \qquad Y_{2i-1} = \frac{H_i^{(1)}}{H_{i-1}^{(1)}} \Big/ \frac{H_i^{(0)}}{H_{i-1}^{(0)}}$$

avec la convention $H_0^{(0)} = H_0^{(1)} = 0$

Ces formules découlent immédiatement des expressions explicites

$$H_i^{(0)} \equiv \begin{vmatrix} f_{-(i-1)} & \cdots & \cdots & f_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & f_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_{i-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{Y_2}{Y_3}\right)^{i-1} \left(\frac{Y_4}{Y_5}\right)^{i-2} \cdots \left(\frac{Y_{2i-4}}{Y_{2i-3}}\right)^{2} \left(\frac{Y_{2i-2}}{Y_{2i-1}}\right)$$

$$H_i^{(1)} \equiv \begin{vmatrix} f_{-(i-2)} & \cdots & \cdots & f_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & f_2 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_i \end{vmatrix} = Y_1\, Y_3\, Y_5 \cdots Y_{2i-1}\, H_i^{(0)}$$

Peut-on facilement comprendre ces expressions ?

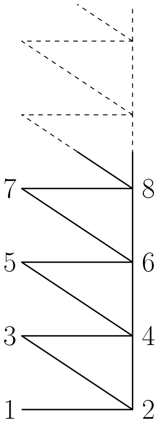
Une démonstration à coup d'empilements

On a $f_n \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ Y_1\, F_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \tilde{F}_{-n} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$ et donc

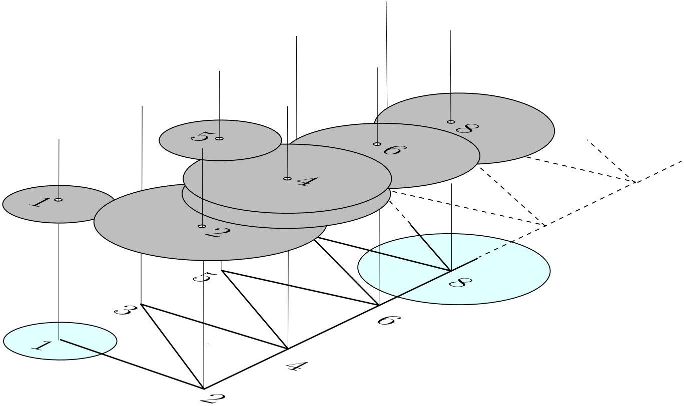
$$f^+(z) \equiv \sum_{n\geq 0} f_n z^n = 1 + z\, Y_1\, F(z) = \cfrac{1}{1 - z\cfrac{Y_1}{1 - z\cfrac{Y_2}{1 - zY_3 - z\cfrac{Y_4}{1 - zY_5 - z\cfrac{Y_6}{1 - \cdots}}}}}$$

$$f^-(z) \equiv \sum_{n\geq 0} f_{-n} z^n = \tilde{F}(z) = \cfrac{1}{1 - z\tilde{Y}_1 - z\cfrac{\tilde{Y}_2}{1 - z\tilde{Y}_3 - z\cfrac{\tilde{Y}_4}{1 - z\tilde{Y}_5 - z\cfrac{\tilde{Y}_6}{1 - \cdots}}}}$$

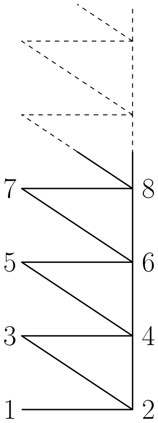
On voit que f_n et f_{-n} comptent des empilements de pièces sur le graphe



On voit que f_n et f_{-n} comptent des empilements de pièces sur le graphe



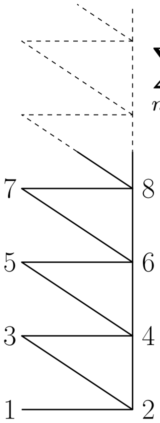
On voit que f_n et f_{-n} comptent des empilements de pièces sur le graphe



$$\sum_{n\geq 0} f_n z^n = \cfrac{1}{1 - z\cfrac{Y_1}{1 - z\cfrac{Y_2}{1 - zY_3 - z\cfrac{Y_4}{1 - zY_5 - z\cfrac{Y_6}{1 - \cdots}}}}}$$

f_n compte les empilements de n pièces de base $\{1\}$
avec poids Y_i par pièce à position i

On voit que f_n et f_{-n} comptent des empilements de pièces sur le graphe

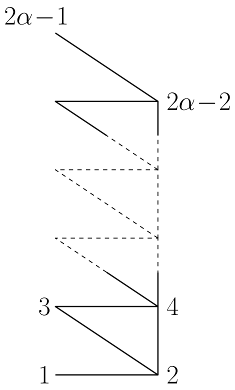


$$\sum_{n\geq 0} f_{-n} z^n = \cfrac{1}{1 - z\tilde{Y}_1 - z\cfrac{\tilde{Y}_2}{1 - z\tilde{Y}_3 - z\cfrac{\tilde{Y}_4}{1 - z\tilde{Y}_5 - z\cfrac{\tilde{Y}_6}{1 - \cdots}}}}$$

f_n compte les empilements de n pièces de base $\{1\}$
avec poids Y_i par pièce à position i

f_{-n} compte les empilements de n pièces de base $\{1,2\}$
avec poids $\tilde{Y}_i$ par pièce à position i

Si on se limite aux empilements sur un sous-graphe fini



$f_n^{(\alpha)} \equiv$ empilements de n pièces de base $\{1\}$ avec poids Y_i par pièce à position i

$f_{-n}^{(\alpha)} \equiv$ empilements de n pièces de base $\{1,2\}$ avec poids $\tilde{Y}_i$ par pièce à position i

$X_n^{(\alpha)} \equiv$ configurations de n pièces dures avec poids Y_i par pièce à position i

alors pour tout n, on a la dépendence linéaire à $\alpha+1$ termes

$$\sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m X_m^{(\alpha)}\, f_{n-m}^{(\alpha)} = 0$$

exemple: $\alpha = 3$ (relation linéaire à 4 termes)

$$X_0^{(3)} = 1$$
$$X_1^{(3)} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$$
$$X_2^{(3)} = Y_1(Y_3 + Y_4 + Y_5) + (Y_2 + Y_3)Y_5$$
$$X_3^{(3)} = Y_1 Y_3 Y_5$$

$$f_0^{(3)} = 1$$
$$f_1^{(3)} = Y_1$$
$$f_2^{(3)} = Y_1(Y_1 + Y_2)$$
$$f_{-1}^{(3)} = \frac{1}{Y_1} + \frac{Y_2}{Y_1 Y_3}$$

pour $n = 2$, la relation s'écrit

$$f_2^{(3)} X_0^{(3)} - f_1^{(3)} X_1^{(3)} + f_0^{(3)} X_2^{(3)} - f_{-1}^{(3)} X_3^{(3)} =$$
$$Y_1(Y_1 + Y_2) \times 1 - Y_1 \times (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) + 1 \times (Y_1(Y_3 + Y_4 + Y_5) + (Y_2 + Y_3)Y_5) - (\frac{1}{Y_1} + \frac{Y_2}{Y_1 Y_3}) \times Y_1 Y_3 Y_5 = 0 \checkmark$$

Dans le calcul de $H_i^{(0)} = \det(f_{n+m-i-1})_{1\leq n,m\leq i}$, on a i colonnes

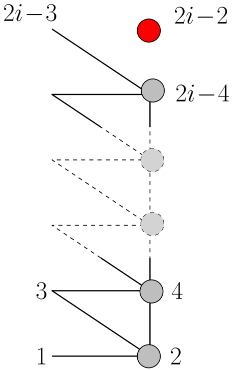
Pour utiliser la relation linéaire à i termes (qui donnerait un déterminant nul !), il faudrait rester sur le graphe de taille finie avec $\alpha = i-1$

En fait, pour $1 \leq n,m \leq i$, $f_{n+m-i-1} = f^{(i-1)}_{n+m-i-1}$ sauf pour $n = m = 1$ car f_{-i+1} (empilement de $i-1$ pièces de base $\{1,2\}$) atteint la position $2i-2$ sur le graphe infini $\rightarrow$ terme $\tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}$

Dans le calcul de $H_i^{(0)} = \det(f_{n+m-i-1})_{1\leq n,m\leq i}$, on a i colonnes

Pour utiliser la relation linéaire à i termes (qui donnerait un déterminant nul !), il faudrait rester sur le graphe de taille finie avec $\alpha = i-1$

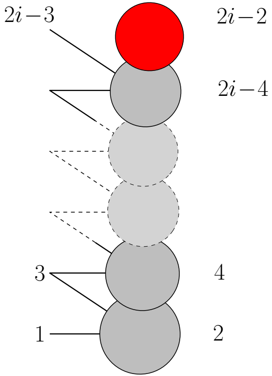
En fait, pour $1 \leq n, m \leq i$, $f_{n+m-i-1} = f_{n+m-i-1}^{(i-1)}$ sauf pour $n = m = 1$ car f_{-i+1} (empilement de $i-1$ pièces de base $\{1, 2\}$) atteint la position $2i-2$ sur le graphe infini $\to$ terme $\tilde{Y}_2\tilde{Y}_4 \cdots \tilde{Y}_{2i-2}$



Dans le calcul de $H_i^{(0)} = \det(f_{n+m-i-1})_{1\leq n,m\leq i}$, on a i colonnes

Pour utiliser la relation linéaire à i termes (qui donnerait un déterminant nul !), il faudrait rester sur le graphe de taille finie avec $\alpha = i-1$

En fait, pour $1 \leq n, m \leq i$, $f_{n+m-i-1} = f^{(i-1)}_{n+m-i-1}$ sauf pour $n = m = 1$ car f_{-i+1} (empilement de $i-1$ pièces de base $\{1,2\}$) atteint la position $2i-2$ sur le graphe infini → terme $\tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}$



Dans le calcul de $H_i^{(0)} = \det(f_{n+m-i-1})_{1\le n,m\le i}$, on a i colonnes

Pour utiliser la relation linéaire à i termes (qui donnerait un déterminant nul !), il faudrait rester sur le graphe de taille finie avec $\alpha = i-1$

En fait, pour $1 \le n,m \le i$, $f_{n+m-i-1} = f^{(i-1)}_{n+m-i-1}$ sauf pour $n=m=1$ car f_{-i+1} (empilement de $i-1$ pièces de base $\{1,2\}$) atteint la position $2i-2$ sur le graphe infini $\to$ terme $\tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}$

$$H_i^{(0)} = \begin{vmatrix} \tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2} & f_{-(i-2)} & \cdots & f_0 \\ 0 & f_{-(i-3)} & \iddots & f_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & f_1 & \cdots & f_{i-1} \end{vmatrix} = \tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}\, H_{i-1}^{(1)}$$

Dans le calcul de $H_i^{(0)} = \det(f_{n+m-i-1})_{1\le n,m\le i}$, on a i colonnes

Pour utiliser la relation linéaire à i termes (qui donnerait un déterminant nul !), il faudrait rester sur le graphe de taille finie avec $\alpha = i-1$

En fait, pour $1 \le n, m \le i$, $f_{n+m-i-1} = f^{(i-1)}_{n+m-i-1}$ sauf pour $n = m = 1$ car f_{-i+1} (empilement de $i-1$ pièces de base $\{1,2\}$) atteint la position $2i-2$ sur le graphe infini $\rightarrow$ terme $\tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}$

$$H_i^{(0)} = \begin{vmatrix} \tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2} & f_{-(i-2)} & \cdots & f_0 \\ 0 & f_{-(i-3)} & \iddots & f_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & f_1 & \cdots & f_{i-1} \end{vmatrix} = \tilde{Y}_2\tilde{Y}_4\cdots\tilde{Y}_{2i-2}\, H_{i-1}^{(1)}$$

De même, on montre

$$H_i^{(1)} = Y_1(Y_2Y_4\cdots Y_{2i-2})\, H_{i-1}^{(0)}$$

et les formules de Di Francesco Kedem en découlent immédiatement

Peut-on deviner $\tilde{F}_n$ connaissant F_n ?

On a besoin de connaître $f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ Y_1\, F_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \tilde{F}_{-n} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$

Faute de mieux, on va deviner les valeurs de Y_1 et $\tilde{F}_{-n}$.

Il y a un choix naturel dicté par le cas des fractions de Thron finies !

Imaginons connue la fraction continue finie

$$F^{(\alpha)}(z) = \cfrac{1}{1 - zY_1 - z\cfrac{Y_2}{1 - zY_3 - z\cfrac{Y_4}{\cfrac{\ddots}{1 - zY_{2\alpha-3} - z\cfrac{Y_{2\alpha-2}}{1 - Y_{2\alpha-1}}}}}}$$

on voit aisément que

$$F^{(\alpha)}(z) = \frac{\text{pol. de degré } \alpha - 1}{\text{pol. de degré } \alpha}$$

$F^{(\alpha)}(z)$ dépend de $\alpha + (\alpha+1)$ -1 (facteur global) -1 $(F^{(\alpha)}(0)=1)$
$= 2\alpha - 1$ coefficients.

La connaissance de $F^{(\alpha)}(z)$ seule est suffisante pour déterminer les $2\alpha - 1$ inconnues Y_i en jeu (i.e. $i = 1, 3, \cdots, 2\alpha - 1$)

Solution du "paradoxe"

$Y_{2\alpha} = 0 \Rightarrow \tilde{Y}_{2\alpha} = 0$

$$\tilde{F}^{(\alpha)}(z) = \sum_n \tilde{F}_n z^n == \cfrac{1}{1 - z\tilde{Y}_1 - z\cfrac{\tilde{Y}_2}{1 - z\tilde{Y}_3 - z\cfrac{\tilde{Y}_4}{\cfrac{\ddots}{1 - z\tilde{Y}_{2\alpha-3} - z\cfrac{\tilde{Y}_{2\alpha-2}}{1 - \tilde{Y}_{2\alpha-1}}}}}}$$

est aussi une T-fraction finie

$F^{(\alpha)}(z)$ dépend de $\alpha + (\alpha+1)$ -1 (facteur global) -1 ($F^{(\alpha)}(0) = 1$) $= 2\alpha - 1$ coefficients.

La connaissance de $F^{(\alpha)}(z)$ seule est suffisante pour déterminer les $2\alpha - 1$ inconnues Y_i en jeu (i.e. $i = 1, 3, \cdots, 2\alpha - 1$)

Solution du "paradoxe"

on a

$$\tilde{F}^{(\alpha)}(z) = -\frac{Y_1}{z} F^{(\alpha)}(1/z)$$

ce qui, en demandant $\tilde{F}^{(\alpha)}(0) = 1$, fixe Y_1 à

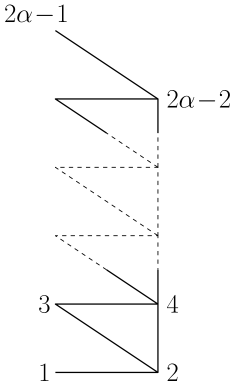
$$Y_1 = -\frac{1}{\lim\limits_{z \to \infty} z F^{(\alpha)}(z)}$$

ainsi que tous les $\tilde{F}_n$ ($n \geq 0$) via $\tilde{F}_n = -Y_1[z^{n+1}]F^{(\alpha)}(1/z)$

Une preuve via les pièces dures

$$f^{+(\alpha)}(z) \equiv 1 + z\,Y_1\,F^{(\alpha)}(z)$$

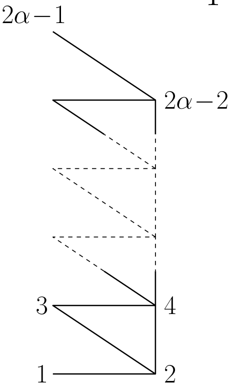
$$= \cfrac{1}{1 - z\cfrac{Y_1}{1 - z\cfrac{Y_2}{1 - zY_3 - z\cfrac{Y_4}{\cfrac{\ddots}{1 - zY_{2\alpha-3} - z\cfrac{Y_{2\alpha-2}}{1 - z\,Y_{2\alpha-1}}}}}}}$$



$$= \sum_{n\geq 0} f_n^{(\alpha)}\, z^n$$

$f_n^{(\alpha)}$ = f.g. d'empilements de n pièces de base $\{1\}$, sur graphe fini, avec poids Y_i

Une preuve via les pièces dures



$$f^{-(\alpha)}(z) \equiv \tilde{F}^{(\alpha)}(z)$$

$$= \cfrac{1}{1 - z\tilde{Y}_1 - z\cfrac{\tilde{Y}_2}{1 - z\tilde{Y}_3 - z\cfrac{\tilde{Y}_4}{\cfrac{\ddots}{1 - z\tilde{Y}_{2\alpha-3} - z\cfrac{\tilde{Y}_{2\alpha-2}}{1 - z\,\tilde{Y}_{2\alpha-1}}}}}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} f_{-n}^{(\alpha)}\, z^n$$

$f_{-n}^{(\alpha)} =$ f.g. d'empilements de n pièces de base $\{1, 2\}$, sur graphe fini, avec poids $\tilde{Y}_i$

$X_n^{(\alpha)} \equiv$ configurations de n pièces dures avec poids Y_i par pièce à position $i \to$ f.g. $X^{(\alpha)}(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} X_n^{(\alpha)}\, z^n$ (polynôme)

$\tilde{X}_n^{(\alpha)} \equiv$ configurations de n pièces dures avec poids $\tilde{Y}_i$ par pièce à position $i \to$ f.g. $\tilde{X}^{(\alpha)}(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \tilde{X}_n^{(\alpha)}\, z^n$ (polynôme)

alors on a le résultat classique

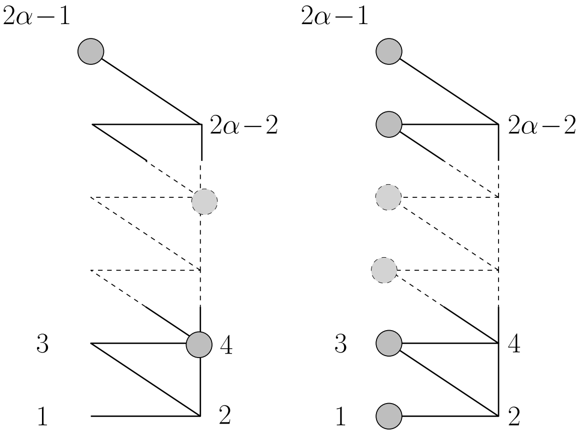
$$f^{+(\alpha)}(z) = \frac{X^{(\alpha)}(-z)|_{Y_1=0}}{X^{(\alpha)}(-z)}$$

$$f^{-(\alpha)}(z) = \frac{\tilde{X}^{(\alpha)}(-z)|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}}{\tilde{X}^{(\alpha)}(-z)}$$

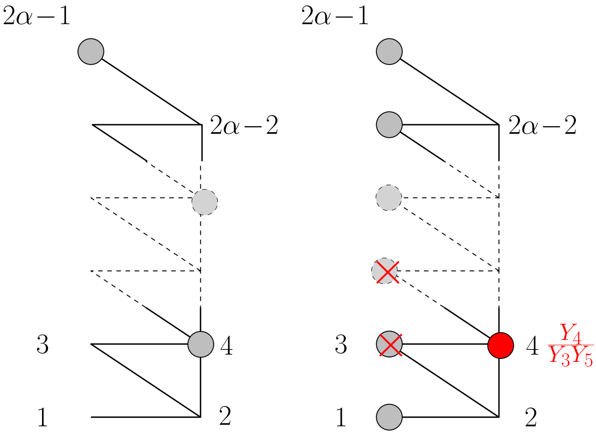
Par ailleurs

$$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)}\ \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}$$

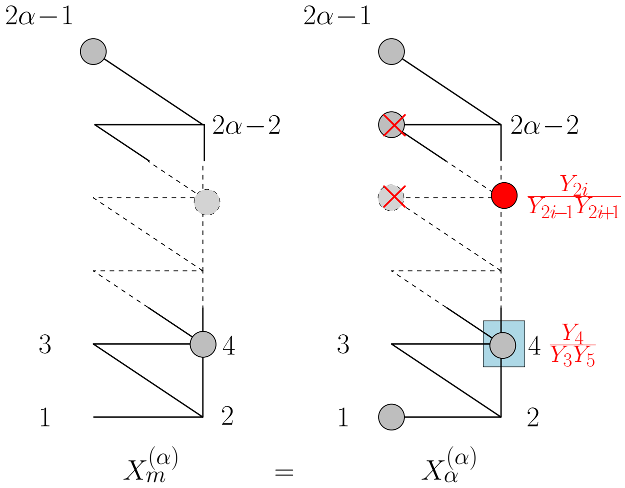
$$X_m^{(\alpha)}|_{Y_1=0} = X_\alpha^{(\alpha)}\ \left(\tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)} - \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}\right)$$



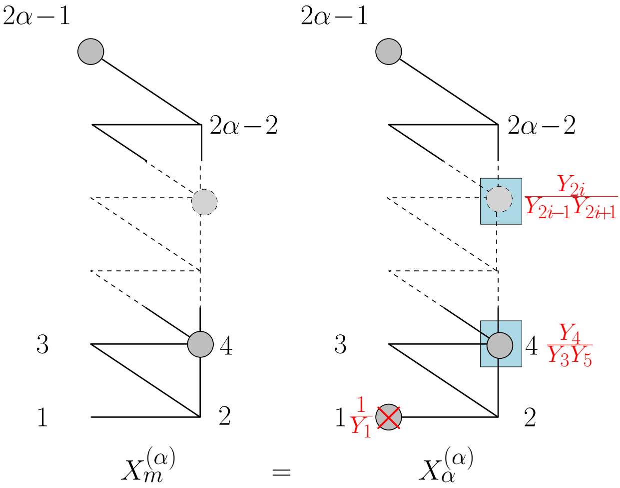
$$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)}$$

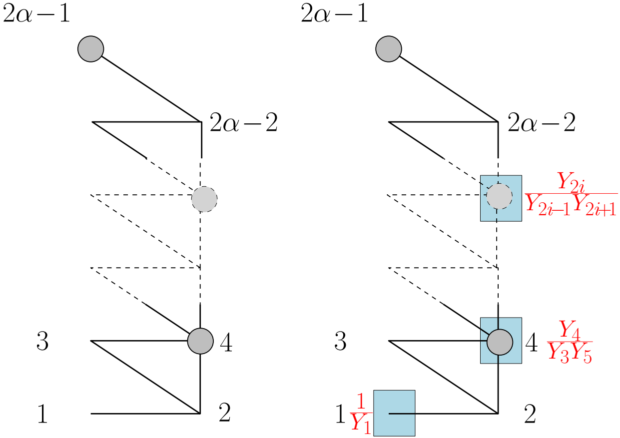


$$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)}$$

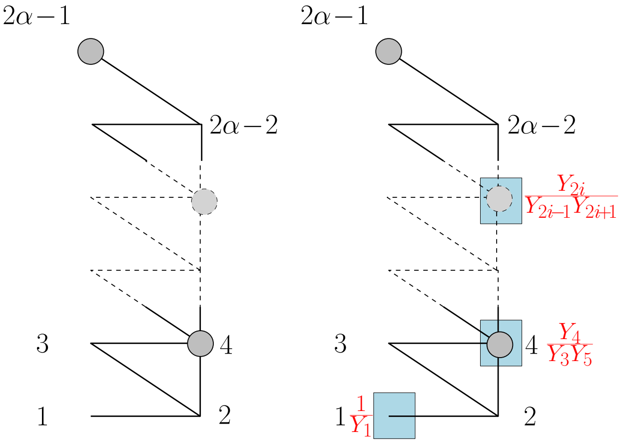


$2\alpha-1$
$2\alpha-2$
3
4
1
2
$X_m^{(\alpha)}$
$=$
$2\alpha-1$
$2\alpha-2$
$\frac{Y_{2i}}{Y_{2i-1}Y_{2i+1}}$
3
4
$\frac{Y_4}{Y_3Y_5}$
1
2
$X_\alpha^{(\alpha)}$


2α−1
2α−2
$\frac{Y_{2i}}{Y_{2i-1}Y_{2i+1}}$
3
4
$\frac{Y_4}{Y_3Y_5}$
1
$\frac{1}{Y_1}$
2
$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)}$



$$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)} \quad \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}$$



$$X_m^{(\alpha)} \quad = \quad X_\alpha^{(\alpha)} \quad \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}$$

$X_m^{(\alpha)}|_{Y_1=0} \rightarrow$ position 1 non occupée à gauche $\rightarrow$ position 1 ou 2 occupée à droite $\rightarrow X_\alpha^{(\alpha)} \underbrace{\left(\tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)} - \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}\right)}_{\text{complémentaire de 1 et 2 vides}}$

$$X_m^{(\alpha)} = X_\alpha^{(\alpha)}\ \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}$$

$$X_m^{(\alpha)}|_{Y_1=0} = X_\alpha^{(\alpha)}\ \left(\tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)} - \tilde{X}_{\alpha-m}^{(\alpha)}|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}\right)$$

$$X^{(\alpha)}(-1/z) = X_\alpha^{(\alpha)}\ (-1/z)^\alpha\ \tilde{X}^{(\alpha)}(-z)$$

$$X^{(\alpha)}(-1/z)|_{Y_1=0} = X_\alpha^{(\alpha)}\ (-1/z)^\alpha\ \left(\tilde{X}^{(\alpha)}(-z) - \tilde{X}^{(\alpha)}(-z)|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}\right)$$

$$f^{+(\alpha)}(1/z) = \frac{X^{(\alpha)}(-1/z)|_{Y_1=0}}{X^{(\alpha)}(-1/z)} = 1 - \frac{\tilde{X}^{(\alpha)}(-z)|_{\tilde{Y}_1=\tilde{Y}_2=0}}{\tilde{X}^{(\alpha)}(-z)} = 1 - f^{-(\alpha)}(z)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{Y_1}{z}F^{(\alpha)}(1/z) = 1 - \tilde{F}^{(\alpha)}(z) \qquad \Rightarrow \quad \tilde{F}^{(\alpha)}(z) = -\frac{Y_1}{z}F^{(\alpha)}(1/z)$$

Explication de la relation linéaire: on a

$$f^{-(\alpha)}(1/z) + f^{+(\alpha)}(z) - 1 = 0$$

et donc

$$X^{(\alpha)}(-z) f^{-(\alpha)}(1/z) + X^{(\alpha)}(-z) f^{+(\alpha)}(z) - X^{(\alpha)}(-z) = 0$$

Chacun des trois termes est un polynôme dont on peut extraire le terme en z^n ($n \in \mathbb{Z}$) (pour le premier terme, on utilise le développement à grand z et pour le second, le développement à petit z):

$$\sum_{m=\max(n,0)}^{\alpha} (-1)^m X_m^{(\alpha)} f_{-(m-n)}^{(\alpha)} + \sum_{m=0}^{\min(\alpha,n)} (-1)^m X_m^{(\alpha)} f_{n-m}^{(\alpha)} - \underbrace{(-1)^n X_n^{(\alpha)}}_{\neq 0 \text{ pour } n \in [0,\alpha]} = 0$$

qui, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, se réécrit

$$\sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m X_m^{(\alpha)} f_{n-m}^{(\alpha)} = 0$$

Une conjecture

on va supposer

$$\tilde{F}(z) = -\frac{Y_1}{z} F\left(1/z\right)$$

avec

$$Y_1 = -\frac{1}{\lim_{z\to\infty} zF(z)}$$

A partir de $F_n = A_0 \; Z_{0,0}^{+}(2n; P, Q) + A_1 \; Z_{0,0}^{+}(2n+2; P, Q)$

$$A_0 = \frac{P}{t_\bullet}(1-P-Q), \;\; A_1 = -\frac{Q}{t_\bullet}$$

on en déduit

$$\tilde{F}_n = \frac{Y_1}{(Q-P)^{2n+1}} \left(A_0 \; Z_{0,0}^{+}(2n; P, Q) + A_1 (Q-P)^2 \; Z_{0,0}^{+}(2n-2; P, Q) \right)$$

et

$$Y_1 = \frac{(Q-P)}{A_0 + A_1\,(Q-P)} = \frac{(Q-P)(1-P-2Q)}{1-2Q}$$

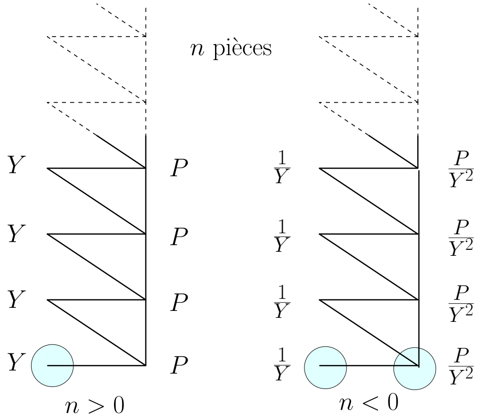
Calcul des Y_i

On a
$$f_n = \begin{cases} 1 = \frac{Y_1\,A_0}{Y} \times 1 + \frac{Y_1\,A_1}{Y} \times Y & \text{si } n = 0 \\ \frac{Y_1\,A_0}{Y}\, Y\, Z^{+}_{0,0}(2n-2; P, Q) + \frac{Y_1\,A_1}{Y}\, Y\, Z^{+}_{0,0}(2n; P, Q) & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{Y_1\,A_0}{Y}\, \frac{Z^{+}_{0,0}(2|n|; P, Q)}{Y^{2|n|}} + \frac{Y_1\,A_1}{Y}\, \frac{Z^{+}_{0,0}(2|n|-2; P, Q)}{Y^{2|n|-2}} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

où $Y \equiv Q - P$

On voit que
$$f_n = \frac{Y_1\,A_0}{Y}\, k_n + \frac{Y_1\,A_1}{Y}\, k_{n+1}$$

où k_n compte les empilements de n pièces avec poids Y et P et base $\{1\}$ pour $n \geq 0$ et avec poids $1/Y$ et P/Y^2 et base $\{1, 2\}$ pour $n < 0$

$k_n =$ 

$\rightarrow$ spécialisation des résultats précédents à $Y_{2i-1} = Y$ et $Y_{2i} = P$ ($\Rightarrow \tilde{Y}_{2i-1} = 1/Y$ et $\tilde{Y}_{2i} = P/Y^2$):
il existe des relations linéaires entre les k_n consécutifs, à des termes de bord près

$\rightarrow$ permet comme précédemment d'écrire des récurrences sur les déterminants

$$L_i^{(0)} \equiv \left(\frac{Y}{P}\right)^{\frac{i(i-1)}{2}} H_i^{(0)}, \qquad L_i^{(1)} \equiv \frac{1}{Y^{i-1}} \left(\frac{Y}{P}\right)^{\frac{i(i-1)}{2}} H_i^{(1)}$$

$$L_i^{(0)} = A_0 \frac{Y_1}{Y^2} L_{i-1}^{(1)} + A_1 Y_1\, L_{i-1}^{(0)}$$

$$L_i^{(1)} = A_0 \frac{Y_1}{Y} L_{i-1}^{(1)} + A_1 Y_1 (Y+P)\, L_{i-1}^{(0)}$$

ou encore

$$L_{i+1}^{(0)} = L_i^{(0)} - w\, L_{i-1}^{(0)} \qquad w \equiv -A_0 A_1 \frac{Y_1^2}{Y^2}\, P$$

avec $L_0^{(0)} = L_1^{(0)} = 1 \quad \Rightarrow L_i^{(0)} \propto$ pol. de Tchebychev en $1/\sqrt{4w}$

et $L_i^{(1)} = Y\, L_i^{(0)} + (Y_1 - Y) L_{i-1}^{(0)}$

Tous calculs faits, on obtient

$$P_i = P\frac{(1-y^i)(1-\alpha y^{i+3})}{(1-y^{i+1})(1-\alpha y^{i+2})} \qquad Q_i = Q\frac{(1-y^i)(1-\alpha^2 y^{i+3})}{(1-\alpha y^{i+1})(1-\alpha y^{i+2})}\ ,$$

où y et α sont obtenus en fonction de P et Q (eux-mêmes fonctions de $t_\bullet$ et $t_\circ$) via

$$(1-2Q)^2 - P(1-P-Q)\left(2+y+\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{y^2}\ \frac{y\,(1-P-2Q)-P}{(1-P-2Q)-y\,P}$$

(NB: on vérifie que $\alpha = 1/\gamma^2$ et $y = \gamma x$)

On retrouve les formules devinées par Ambjørn et Budd

Conclusion

Une méthode constructive pour calculer P_i et Q_i

Basée sur une conjecture (certes naturelle)

Peut-on la comprendre combinatoirement ?

Stieltjes et Thron sont deux extrêmes de fractions continues "mixtes"

Di Francesco Kedem considèrent aussi ces cas mixtes (mutations)

Correspondent-ils à d'autres ensembles de quadrangulations ?

Conclusion

Une méthode constructive pour calculer P_i et Q_i

Basée sur une conjecture (certes naturelle)

Peut-on la comprendre combinatoirement ?

Stieltjes et Thron sont deux extrêmes de fractions continues "mixtes"

Di Francesco Kedem considèrent aussi ces cas mixtes (mutations)

Correspondent-ils à d'autres ensembles de quadrangulations ?

Merci !