Une extension de l'ordre faible sur les groupes de Coxeter.

François Viard

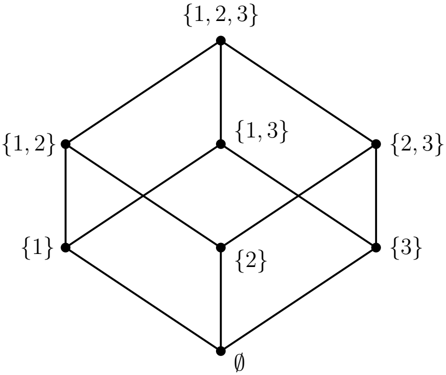
ICJ - Lyon 1

Octobre 2015, LIX

Plan

Treillis et sections initiales

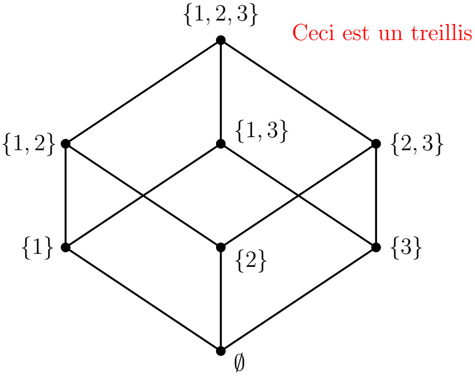
$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réflexive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1, 2, 3\}$ ordonnées par inclusion.

Treillis et sections initiales

$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réfléxive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1, 2, 3\}$ ordonnées par inclusion.

Treillis complet :=

Pour tout $S \subseteq P$,

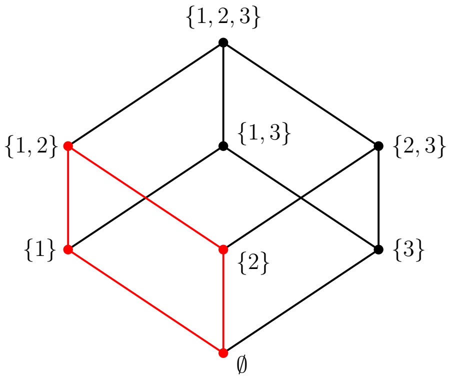
S admet une borne inférieure

et une borne supérieure

pour l'ordre "$\leq$".

Treillis et sections initiales

$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réfléxive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1,2,3\}$ ordonnées par inclusion.

Treillis complet :=

Pour tout $S \subseteq P$,
S admet une borne inférieure
et une borne supérieure
pour l'ordre "$\leq$".

Section initiale de $\mathcal{P}$:=

Une partie $X \subseteq P$ telle que
pour tout $x, y \in P$ avec $x \leq y$,
si $y \in X$, alors $x \in X$.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W = < S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

- Tout $\omega \in W$ s'écrit comme un produit d'un nombre minimal d'éléments de S. Ce nombre minimal est noté $\ell(\omega)$ et est appelé la longueur de ω.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

- Tout $\omega \in W$ s'écrit comme un produit d'un nombre minimal d'éléments de S. Ce nombre minimal est noté $\ell(\omega)$ et est appelé la longueur de ω.
- On définit l'ordre faible $\leq_R$ sur W comme suit: $\omega \leq_R \tau$ si et seulement si il existe $s_1, \ldots, s_k$ dans S tel que $\tau = \omega s_1 \cdots s_k$ et $\ell(\omega) + k = \ell(\tau)$.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

W infini

- $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

W infini

- $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur.
- Pas d'élément maximal.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

W infini

- $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur.
- Pas d'élément maximal.
- Donc pas d'équivalent évident pour les expressions réduites de ω_0.

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

W infini

- $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur.
- Pas d'élément maximal.
- Donc pas d'équivalent évident pour les expressions réduites de ω_0.

Question

Si W est infini, peut-on trouver un poset P_W tel que:

- un sous poset de P_W est isomorphe à $(W, \leq_R)$ (idéalement, ce sous poset devrait-être une section initiale de P_W);

Différences entre le cas fini et infini

W fini

- $(W, \leq_R)$ est un treillis complet.
- On a un élément maximal noté ω_0.
- Les chaines maximales de $(W, \leq_R)$ sont encodés par les expressions réduites de ω_0.

W infini

- $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur.
- Pas d'élément maximal.
- Donc pas d'équivalent évident pour les expressions réduites de ω_0.

Question

Si W est infini, peut-on trouver un poset P_W tel que:

- un sous poset de P_W est isomorphe à $(W, \leq_R)$ (idéalement, ce sous poset devrait-être une section initiale de P_W);
- les propriétés de P_W généralisent celles de l'ordre faible dans le cas fini ?

Système de racine d'un groupe de Coxeter

Soit W un groupe de Coxeter de rang fini n (*i.e.* $n = |S|$), on considère un système de racine Φ de W.

Système de racine d'un groupe de Coxeter

Soit W un groupe de Coxeter de rang fini n (*i.e.* $n = |S|$), on considère un système de racine Φ de W. Sans définir précisément ce qu'est un système de racine, on peut dire que :

- Φ est une sous partie discrète de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle W agit;
- il existe une partition de Φ en deux sous-parties Φ^+ et $\Phi^- = -\Phi^+$, séparées par un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, appelés respectivement racines positives et négatives de Φ.

Système de racine d'un groupe de Coxeter

Soit W un groupe de Coxeter de rang fini n (*i.e.* $n = |S|$), on considère un système de racine Φ de W. Sans définire précisément ce qu'est un système de racine, on peut dire que :

- Φ est une sous partie discrète de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle W agit;
- il existe une partition de Φ en deux sous-parties Φ^+ et $\Phi^- = -\Phi^+$, séparées par un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, appelés respectivement racines positives et négatives de Φ.

Définition

Soit $w \in W$, l'ensemble d'inversion de w est définit comme étant

$$\mathrm{Inv}(w) := \Phi^+ \cap w(\Phi^-).$$

Système de racine d'un groupe de Coxeter

Soit W un groupe de Coxeter de rang fini n (*i.e.* $n = |S|$), on considère un système de racine Φ de W. Sans définire précisément ce qu'est un système de racine, on peut dire que :

- Φ est une sous partie discrète de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle W agit;
- il existe une partition de Φ en deux sous-parties Φ^+ et $\Phi^- = -\Phi^+$, séparées par un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, appelés respectivement racines positives et négatives de Φ.

Définition

Soit $w \in W$, l'ensemble d'inversion de w est définit comme étant

$$\mathrm{Inv}(w) := \Phi^+ \cap w(\Phi^-).$$

Propriété

Pour tout $w, w' \in W$, on a que $w \leq_R w'$ si et seulement si $\mathrm{Inv}(w) \subseteq \mathrm{Inv}(w')$.

Une caractérisation géométrique des ensembles d'inversion

Définition

Soit $A \subseteq \Phi^+$, on dit que A est clos si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ tels que $\gamma = a\alpha + b\beta$ avec $a > 0$ et $b > 0$,

$$\text{si } \alpha, \beta \in A, \text{ alors } \gamma \in A.$$

On dit que A est bi-clos si et seulement si A et $\Phi^+ \setminus A$ sont clos. On note $\mathcal{B}(\Phi^+)$ l'ensemble des bi-clos de Φ^+.

Une caractérisation géométrique des ensembles d'inversion

Définition

Soit $A \subseteq \Phi^+$, on dit que A est clos si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ tels que $\gamma = a\alpha + b\beta$ avec $a > 0$ et $b > 0$,

$$\text{si } \alpha, \beta \in A, \text{ alors } \gamma \in A.$$

On dit que A est bi-clos si et seulement si A et $\Phi^+ \setminus A$ sont clos. On note $\mathcal{B}(\Phi^+)$ l'ensemble des bi-clos de Φ^+.

Proposition, Pilkington 2006

Les ensembles d'inversions de W sont exactement les ensembles bi-clos **finis** de Φ^+.

Une caractérisation géométrique des ensembles d'inversion

Définition

Soit $A \subseteq \Phi^+$, on dit que A est <u>clos</u> si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ tels que $\gamma = a\alpha + b\beta$ avec $a > 0$ et $b > 0$,

$$\text{si } \alpha, \beta \in A, \ \text{alors } \gamma \in A.$$

On dit que A est <u>bi-clos</u> si et seulement si A et $\Phi^+ \setminus A$ sont clos. On note $\mathcal{B}(\Phi^+)$ l'ensemble des bi-clos de Φ^+.

Proposition, Pilkington 2006

Les ensembles d'inversions de W sont exactement les ensembles bi-clos **finis** de Φ^+.

- Ainsi, le poset obtenu en ordonnant par inclusion les bi-clos fini de Φ^+ est isomorphe à $(W, \leq_R)$.

Une caractérisation géométrique des ensembles d'inversion

Définition

Soit $A \subseteq \Phi^+$, on dit que A est clos si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ tels que $\gamma = a\alpha + b\beta$ avec $a > 0$ et $b > 0$,

$$\text{si } \alpha, \beta \in A, \text{ alors } \gamma \in A.$$

On dit que A est bi-clos si et seulement si A et $\Phi^+ \setminus A$ sont clos. On note $\mathcal{B}(\Phi^+)$ l'ensemble des bi-clos de Φ^+.

Proposition, Pilkington 2006

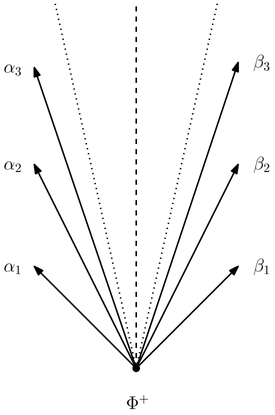
Les ensembles d'inversions de W sont exactement les ensembles bi-clos **finis** de Φ^+.

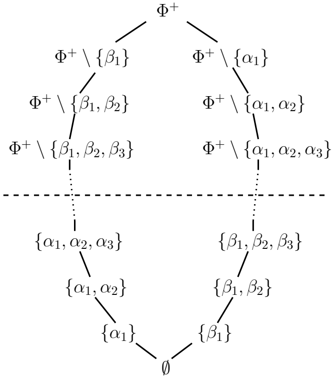
- Ainsi, le poset obtenu en ordonnant par inclusion les bi-clos fini de Φ^+ est isomorphe à $(W, \leq_R)$.
- Donc $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ fournit une extension naturelle de l'ordre faible.

Première conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 2011 (mais aussi 1994)

Le poset $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est un treillis complet.



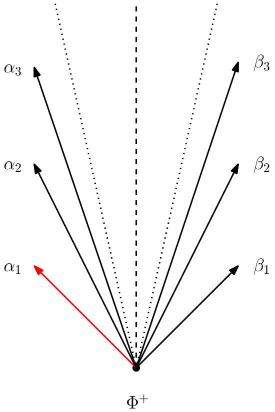


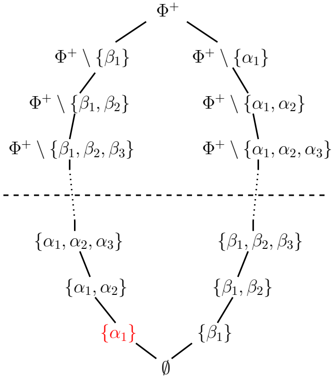
$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

Première conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 2011 (mais aussi 1994)

Le poset $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est un treillis complet.



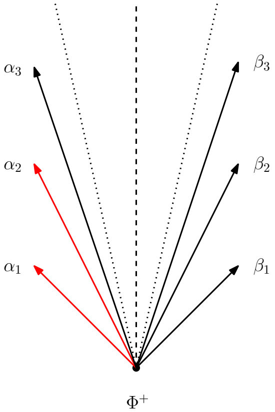


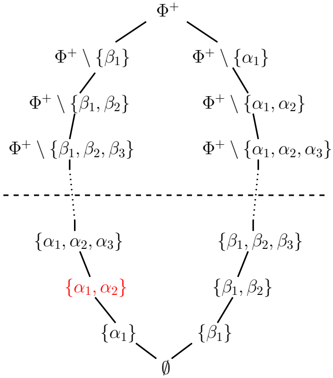
$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

Première conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 2011 (mais aussi 1994)

Le poset $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est un treillis complet.



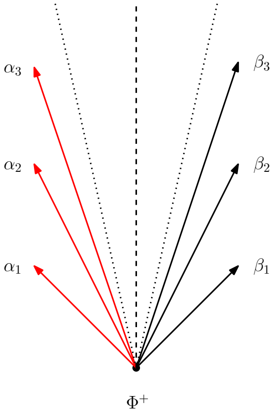


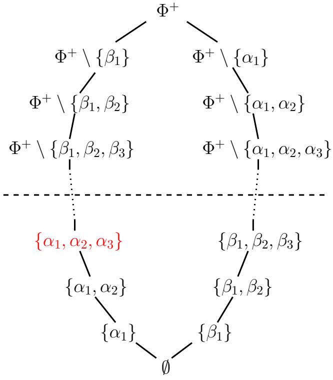
$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

Première conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 2011 (mais aussi 1994)

Le poset $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est un treillis complet.



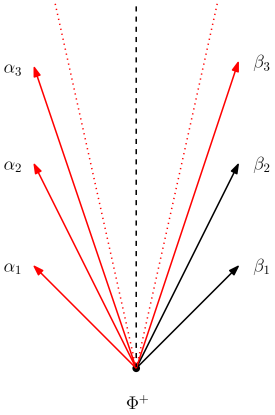


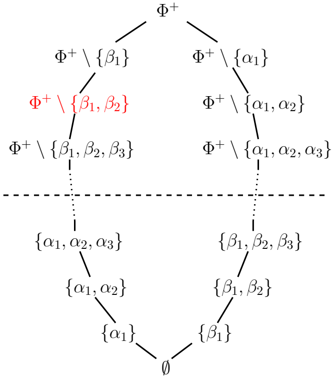
$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

Première conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 2011 (mais aussi 1994)

Le poset $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est un treillis complet.





$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

Ordres de réflexions et chaines maximales

Définition

Soit $I = (\Phi^+, \preceq)$ un ordre total sur Φ^+, on dit que I est un <u>ordre de réflexions</u> si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$, on a que

$$\text{si } \gamma = a\alpha + b\beta,\ \ a, b > 0,\ \ \text{alors } \alpha \preceq \gamma \preceq \beta \text{ ou } \beta \preceq \gamma \preceq \alpha.$$

Ordres de réflexions et chaines maximales

Définition

Soit $I = (\Phi^+, \preceq)$ un ordre total sur Φ^+, on dit que I est un ordre de réflexions si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$, on a que

$$\text{si } \gamma = a\alpha + b\beta,\ \ a, b > 0,\ \ \text{alors } \alpha \preceq \gamma \preceq \beta \text{ ou } \beta \preceq \gamma \preceq \alpha.$$

On a que toute section initiale d'un ordre de réflexions est un bi-clos.

Ordres de réflexions et chaines maximales

Définition

Soit $I = (\Phi^+, \preceq)$ un ordre total sur Φ^+, on dit que I est un ordre de réflexions si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$, on a que

$$\text{si } \gamma = a\alpha + b\beta,\ \ a, b > 0,\ \ \text{alors } \alpha \preceq \gamma \preceq \beta \text{ ou } \beta \preceq \gamma \preceq \alpha.$$

On a que toute section initiale d'un ordre de réflexions est un bi-clos.

Proposition (folklore ?)

Si W est fini, alors on a:

- $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est isomorphe à $(W, \leq_R)$;

Ordres de réflexions et chaines maximales

Définition

Soit $I = (\Phi^+, \preceq)$ un ordre total sur Φ^+, on dit que I est un <u>ordre de réflexions</u> si et seulement si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$, on a que

$$\text{si } \gamma = a\alpha + b\beta,\ a, b > 0,\ \text{alors } \alpha \preceq \gamma \preceq \beta \text{ ou } \beta \preceq \gamma \preceq \alpha.$$

On a que toute section initiale d'un ordre de réflexions est un bi-clos.

Proposition (folklore ?)

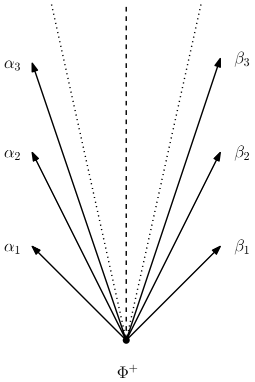
Si W est fini, alors on a:

- $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est isomorphe à $(W, \leq_R)$;
- une chaine $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un ordre de réflexions I tel que $\mathcal{C}$ soit égal à l'ensemble des sections initiales de I.

Deuxième conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 1994

Une chaine $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un ordre de réflexions I tel que $\mathcal{C}$ soit égal à l'ensemble des sections initiales de I.



$$\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \ldots \preceq \beta_3 \preceq \beta_2 \preceq \beta_1$$

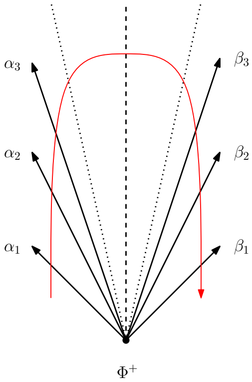
$$\beta_1 \preceq \beta_2 \preceq \beta_3 \preceq \ldots \preceq \alpha_3 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_1$$

Ordres de réflexions

Deuxième conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 1994

Une chaine $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un ordre de réflexions I tel que $\mathcal{C}$ soit égal à l'ensemble des sections initiales de I.



$\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \ldots \preceq \beta_3 \preceq \beta_2 \preceq \beta_1$

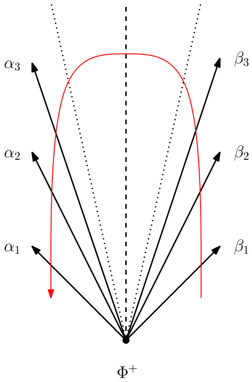
$\beta_1 \preceq \beta_2 \preceq \beta_3 \preceq \ldots \preceq \alpha_3 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_1$

Ordres de réflexions

Deuxième conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 1994

Une chaine $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un ordre de réflexions I tel que $\mathcal{C}$ soit égal à l'ensemble des sections initiales de I.



$\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \ldots \preceq \beta_3 \preceq \beta_2 \preceq \beta_1$

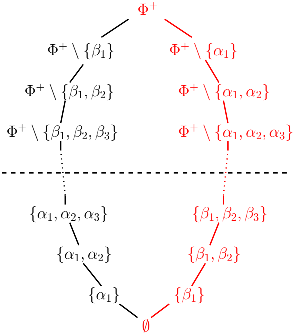
$\beta_1 \preceq \beta_2 \preceq \beta_3 \preceq \ldots \preceq \alpha_3 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_1$

Ordres de réflexions

Deuxième conjecture de Dyer

Conjecture, Dyer 1994

Une chaine $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un ordre de réflexions I tel que $\mathcal{C}$ soit égal à l'ensemble des sections initiales de I.



$(\mathcal{B}(\Phi^+), \subseteq)$

$\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \ldots \preceq \beta_3 \preceq \beta_2 \preceq \beta_1$

$\beta_1 \preceq \beta_2 \preceq \beta_3 \preceq \ldots \preceq \alpha_3 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_1$

Ordres de réflexions

Une approche avec des graphes orientés

Un graphe orienté est un couple $G = (\mathcal{V}(G), E(G))$ d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}(G)$ et d'un (multi)-ensemble d'arrêtes orienté $E(G) \subseteq \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$.

Une approche avec des graphes orientés

Un graphe orienté est un couple $G = (\mathcal{V}(G), E(G))$ d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}(G)$ et d'un (multi)-ensemble d'arrêtes orienté $E(G) \subseteq \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$.

Définition

Soit G un graphe, $A \subseteq \mathcal{V}(G)$ et $z \in \mathcal{V}(G)$. On définit les statistiques suivantes:

- le degré sortant de z, noté $d^+(G, z)$, est le nombre d'arêtes sortant de z dans G (comptées avec multiplicité), et qui peut être infini;

Une approche avec des graphes orientés

Un graphe orienté est un couple $G = (\mathcal{V}(G), E(G))$ d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}(G)$ et d'un (multi)-ensemble d'arrêtes orienté $E(G) \subseteq \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$.

Définition

Soit G un graphe, $A \subseteq \mathcal{V}(G)$ et $z \in \mathcal{V}(G)$. On définit les statistiques suivantes:

- le degré sortant de z, noté $d^+(G, z)$, est le nombre d'arêtes sortant de z dans G (comptées avec multiplicité), et qui peut être infini;
- pour tout $A \subseteq \mathcal{V}(G)$, $d_A^+(G, z)$ est le nombre d'arêtes sortant de z et arrivant sur un point de A (comptées là aussi avec multiplicité).

Graphes valués et treillis associé

Définition

Dans cet exposé, on appellera graphe valué un couple $\mathcal{G} = (G, \theta)$ formé d'un graphe orienté G et d'une application $\theta : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que

$$\text{pour tout } z \in V(G),\ 0 \leq \theta(z) \leq d^+(G, z).$$

Graphes valués et treillis associé

Définition

Dans cet exposé, on appellera graphe valué un couple $\mathcal{G} = (G, \theta)$ formé d'un graphe orienté G et d'une application $\theta : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que

$$\text{pour tout } z \in V(G),\ 0 \leq \theta(z) \leq d^+(G, z).$$

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d^+_A(G, z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d^+_A(G, z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

Graphes valués et treillis associé

Définition

Dans cet exposé, on appellera graphe valué un couple $\mathcal{G} = (G, \theta)$ formé d'un graphe orienté G et d'une application $\theta : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que

$$\text{pour tout } z \in V(G),\ 0 \leq \theta(z) \leq d^+(G, z).$$

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d_A^+(G, z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(G, z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

Théorème, V. 2015

Le poset $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est un treillis complet.

L'idée générale (et les problèmes qu'elle pose)

L'idée est très simple : essayer de trouver un graphe valué $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+ \text{ et } IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+).$$

L'idée générale (et les problèmes qu'elle pose)

L'idée est très simple : essayer de trouver un graphe valué $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+ \text{ et } IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+).$$

Problèmes

- Comment construire un tel graphe valué ?

L'idée générale (et les problèmes qu'elle pose)

L'idée est très simple : essayer de trouver un graphe valué $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+ \text{ et } IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+).$$

Problèmes

- Comment construire un tel graphe valué ?
- Dès que W est infini, Φ^+ est aussi infini. De fait, le graphe valué obtenu sera infini et l'étude de $IS(\mathcal{G})$ risque d'être problématique. Peut-on contourner cette difficulté ?

L'idée générale (et les problèmes qu'elle pose)

L'idée est très simple : essayer de trouver un graphe valué $\mathcal{G}$ tel que

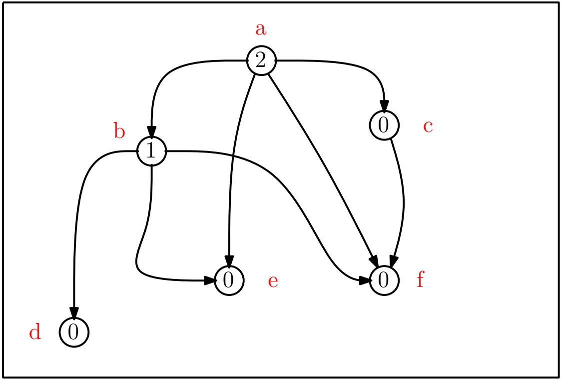
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+ \text{ et } IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+).$$

Problèmes

- Comment construire un tel graphe valué ?
- Dès que W est infini, Φ^+ est aussi infini. De fait, le graphe valué obtenu sera infini et l'étude de $IS(\mathcal{G})$ risque d'être problématique. Peut-on contourner cette difficulté ?
- Et la deuxième conjecture de Dyer ? Comment relier les graphes valués aux ordres de réflexions ?

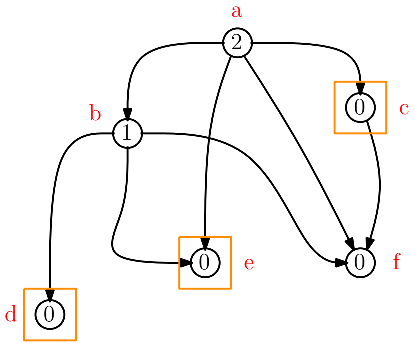
On va d'abord s'occuper des deux derniers points en s'intéressant au cas particulier des graphes valués simples, acycliques et fini.

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



$L = [\;]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.

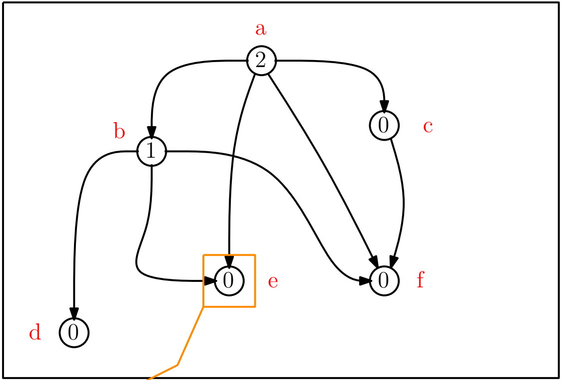


Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

$L = [\ ]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



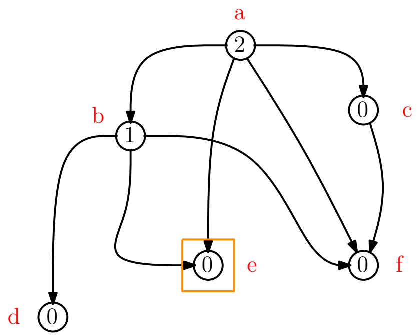
Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

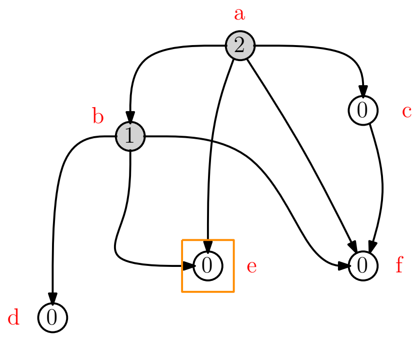
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

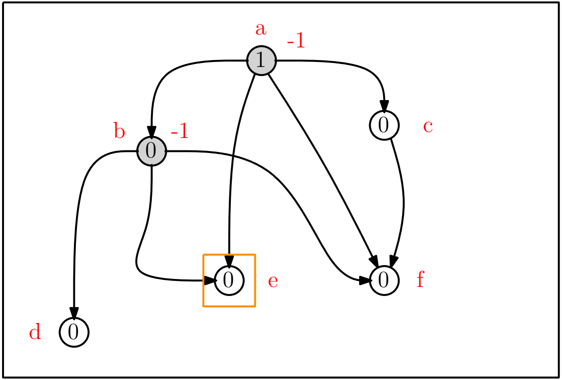
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

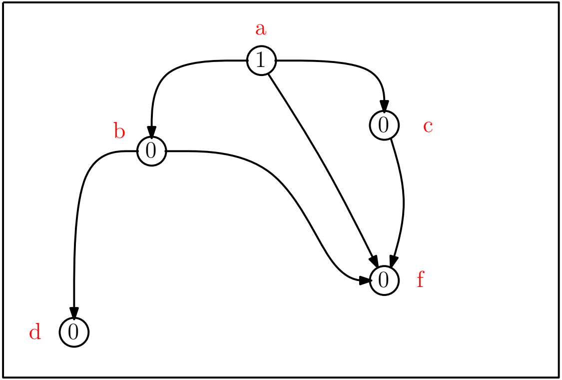
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

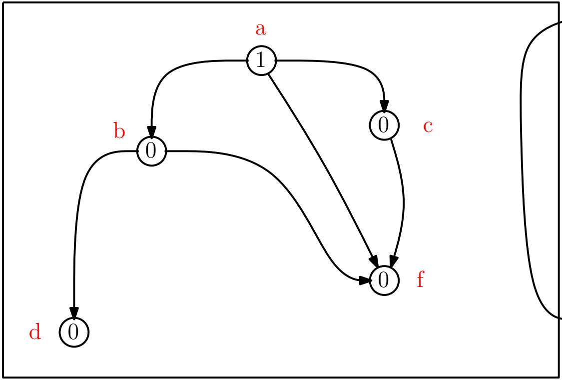
Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 : Repérer les sommets z tels que : 1) $\theta_z = 0$ 2) $\forall y \in V \mid (y,z) \in E, \theta_y \neq 0$.	
Etape 2 : Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.	
Etape 3 : Epluchage !	

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

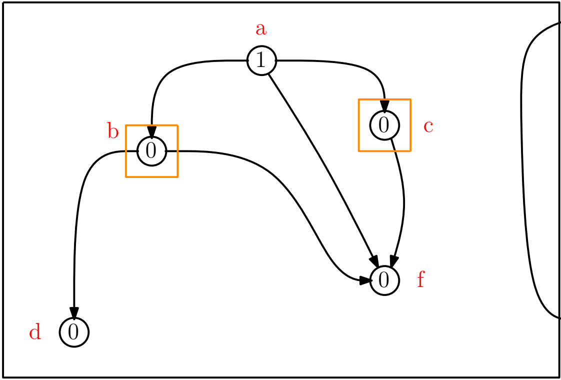
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

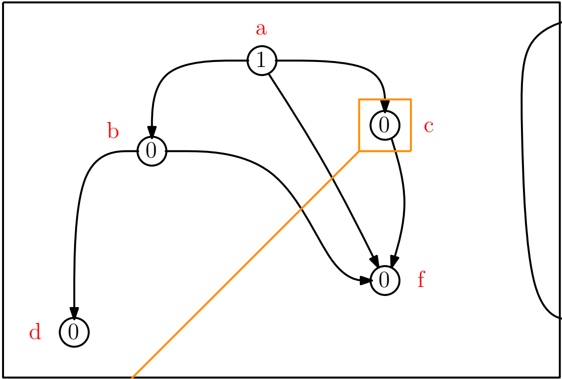
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

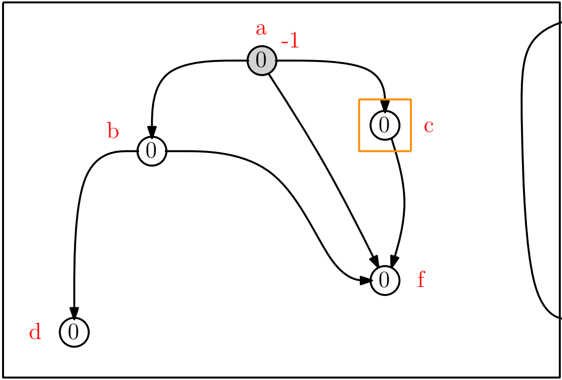
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

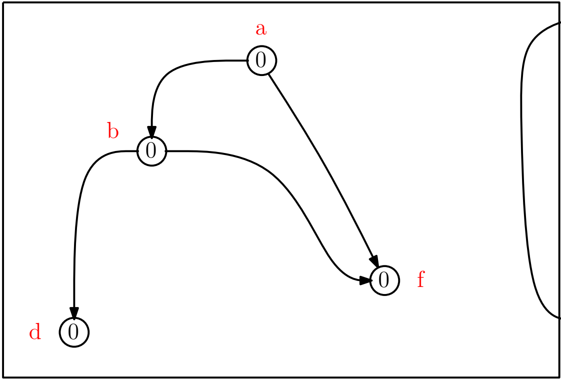
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

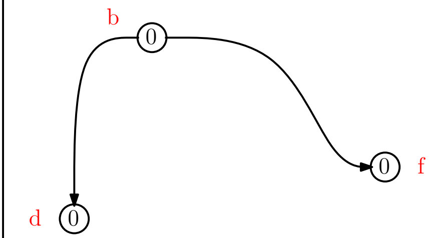
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

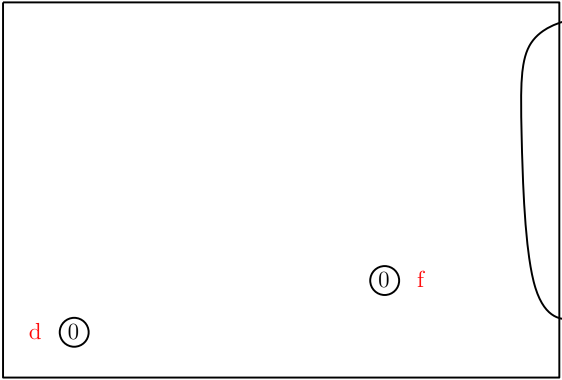
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.

Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y,z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.

Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d, f]$

Etude de $IS(\mathcal{G})$ dans le cas fini, simple et acyclique.

Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y,z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets
et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d, f] \longleftarrow$ Une telle suite est appelée un *épluchage de* G.

Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment, on peut le voir comme un ordre total sur $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ et il a donc des sections initiales:

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \dots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment, on peut le voir comme un ordre total sur $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ et il a donc des sections initiales:

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \dots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

Théorème, V. 2014

Pour tout graphe valué $\mathcal{G} = (G, \theta)$ fini, simple et acyclique, on a que :

- $IS(\mathcal{G})$ est l'ensemble des sections initiales de tous les épluchage de $\mathcal{G}$ possibles;

Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment, on peut le voir comme un ordre total sur $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ et il a donc des sections initiales:

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \ldots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

Théorème, V. 2014

Pour tout graphe valué $\mathcal{G} = (G, \theta)$ fini, simple et acyclique, on a que :

- $IS(\mathcal{G})$ est l'ensemble des sections initiales de tous les épluchage de $\mathcal{G}$ possibles;
- une chaine $\mathcal{C}$ de $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un épluchage L tel que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des sections initiales de L.

Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment, on peut le voir comme un ordre total sur $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ et il a donc des sections initiales:

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \dots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

Théorème, V. 2014

Pour tout graphe valué $\mathcal{G} = (G, \theta)$ fini, simple et acyclique, on a que :

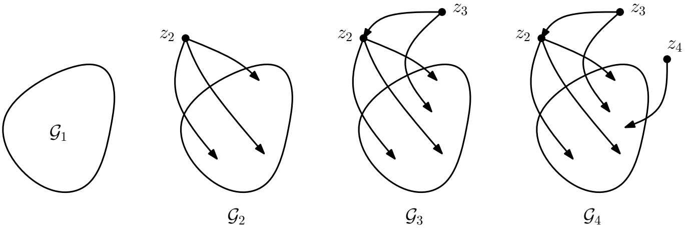
- $IS(\mathcal{G})$ est l'ensemble des sections initiales de tous les épluchage de $\mathcal{G}$ possibles;
- une chaine $\mathcal{C}$ de $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est maximale si et seulement si il existe un épluchage L tel que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des sections initiales de L.

Question

Peut-on trouver une famille de graphes valués infinis ayant des propriétés analogues ?

Limite de certaines suites de graphes valués

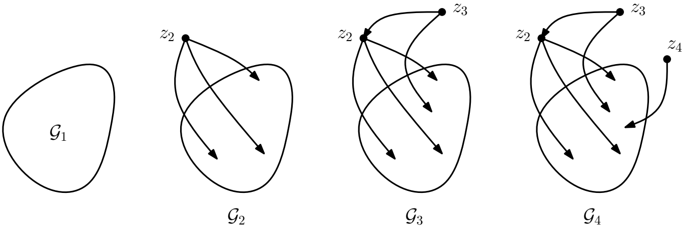
Une suite de graphe valués $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ est dites projective si elle est de la forme suivante:



où $\mathcal{G}_1$ est fini, simple et acyclique, et où la valuation est "fixée définitivement à chaque étape".

Limite de certaines suites de graphes valués

Une suite de graphe valués $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ est dites projective si elle est de la forme suivante:



où $\mathcal{G}_1$ est fini, simple et acyclique, et où la valuation est "fixée définitivement à chaque étape".

Définition

Une telle suite défini un graphe valué limite $\mathcal{G}_\infty$ défini par

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty) = \cup_{i\geq 1}\mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \text{ et } E(\mathcal{G}_\infty) = \cup_{i\geq 1}E(\mathcal{G}_i).$$

On dit que $\mathcal{G}_\infty$ est un graphe valué projectif.

La propriété fondamentale

Lemme

Soit $1 \leq i < j \leq \infty$, $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ et $z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$. On a :

$$d^+_A(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z).$$

La propriété fondamentale

Lemme

Soit $1 \leq i < j \leq \infty$, $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ et $z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$. On a :

$$d_A^+(\mathcal{G}_j, z) = d_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}^+(\mathcal{G}_j, z) = d_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}^+(\mathcal{G}_i, z).$$

$$A \in IS(\mathcal{G}_j) \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta(z) \leq d_A^+(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_j) \setminus A \end{cases}$$

La propriété fondamentale

Lemme

Soit $1 \leq i < j \leq \infty$, $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ et $z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$. On a :

$$d^+_A(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z).$$

$$A \in IS(\mathcal{G}_j) \iff \begin{cases} \theta(z) \leq d^+_A(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d^+_A(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_j) \setminus A \end{cases}$$

et on a donc

$$A \in IS(\mathcal{G}_j) \implies \begin{cases} \theta(z) \leq d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z) & \text{pour tout } z \in A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \\ \theta(z) \geq d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z) & \text{pour tout } z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \setminus A \end{cases}$$

La propriété fondamentale

Lemme

Soit $1 \leq i < j \leq \infty$, $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ et $z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$. On a :

$$d^+_A(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_j, z) = d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z).$$

$$A \in IS(\mathcal{G}_j) \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta(z) \leq d^+_A(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d^+_A(\mathcal{G}_j, z) & \text{pour tout } z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_j) \setminus A \end{cases}$$

et on a donc

$$A \in IS(\mathcal{G}_j) \Longrightarrow \begin{cases} \theta(z) \leq d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z) & \text{pour tout } z \in A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \\ \theta(z) \geq d^+_{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)}(\mathcal{G}_i, z) & \text{pour tout } z \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \setminus A \end{cases}$$

Proposition

Si $A \in IS(\mathcal{G}_j)$, alors $A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \in IS(\mathcal{G}_i)$.

Résultats principaux sur les graphes valués projectifs

Théorème, V. 2015

Soit $\mathcal{G}_\infty$ un graphe projectif et $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ une suite associée.

- Soit $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty)$, on a que $A \in IS(\mathcal{G}_\infty)$ si et seulement si $A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Résultats principaux sur les graphes valués projectifs

Théorème, V. 2015

Soit $\mathcal{G}_\infty$ un graphe projectif et $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ une suite associée.

- Soit $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty)$, on a que $A \in IS(\mathcal{G}_\infty)$ si et seulement si $A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, si on a une suite $(A_i)_{i\geq 1}$ telle que $A_i \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout i et $A_i = A_{i+1} \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$, alors $\cup_{i\geq 1} A_i \in IS(\mathcal{G}_\infty)$.

Résultats principaux sur les graphes valués projectifs

Théorème, V. 2015

Soit $\mathcal{G}_\infty$ un graphe projectif et $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ une suite associée.

- Soit $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty)$, on a que $A \in IS(\mathcal{G}_\infty)$ si et seulement si $A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, si on a une suite $(A_i)_{i\geq 1}$ telle que $A_i \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout i et $A_i = A_{i+1} \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$, alors $\cup_{i\geq 1} A_i \in IS(\mathcal{G}_\infty)$.
- Soit $X \subseteq IS(\mathcal{G}_\infty)$ et $X_i := \{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) | A \in X\}$, on a :

$$(\wedge_\infty X) \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) = \wedge_i X_i.$$

Résultats principaux sur les graphes valués projectifs

Théorème, V. 2015

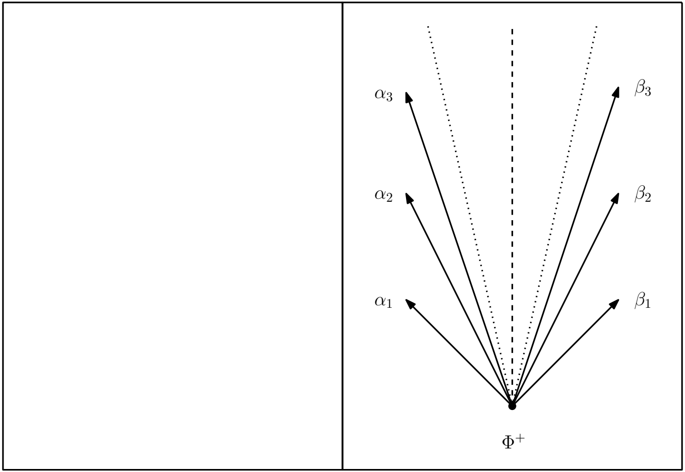
Soit $\mathcal{G}_\infty$ un graphe projectif et $(\mathcal{G}_i)_{i\geq 1}$ une suite associée.

- Soit $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty)$, on a que $A \in IS(\mathcal{G}_\infty)$ si et seulement si $A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, si on a une suite $(A_i)_{i\geq 1}$ telle que $A_i \in IS(\mathcal{G}_i)$ pour tout i et $A_i = A_{i+1} \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i)$, alors $\cup_{i\geq 1} A_i \in IS(\mathcal{G}_\infty)$.
- Soit $X \subseteq IS(\mathcal{G}_\infty)$ et $X_i := \{A \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) | A \in X\}$, on a :

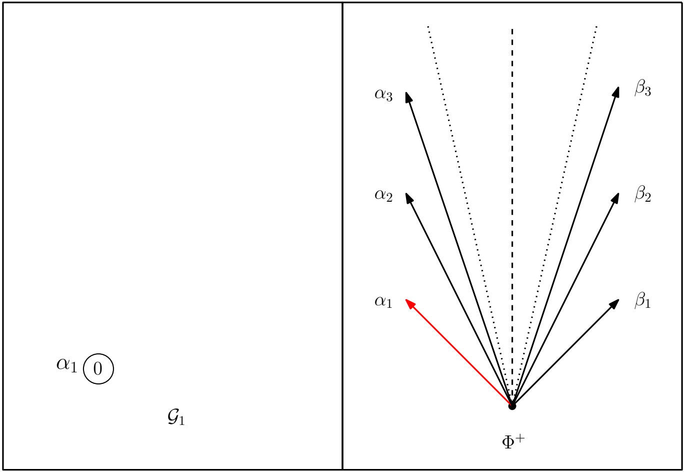
$$(\wedge_\infty X) \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}_i) = \wedge_i X_i.$$

- Il existe un ensemble $PS(\mathcal{G}_\infty)$ d'ordres totaux sur $\mathcal{V}(\mathcal{G}_\infty)$ tel que : pour tout chaine $\mathcal{C}$ de $(IS(\mathcal{G}_\infty), \subseteq)$, $\mathcal{C}$ est maximal si et seulement si il existe $I \in PS(\mathcal{G}_\infty)$ tel que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des sections initiales de I.

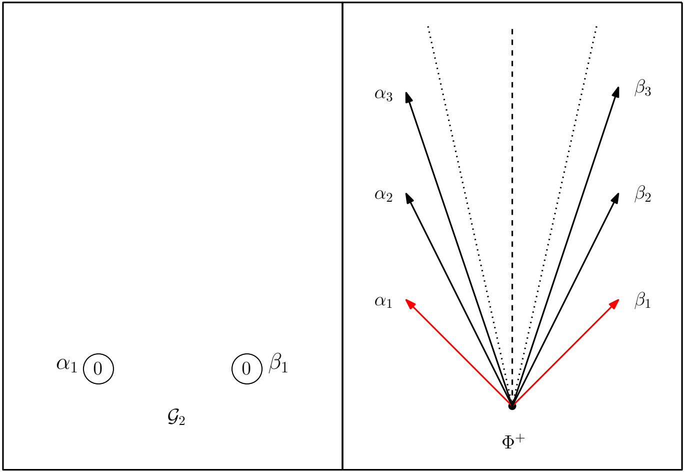
Le cas dihédral infini



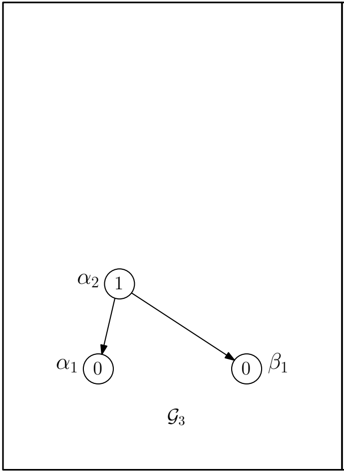
Le cas dihédral infini

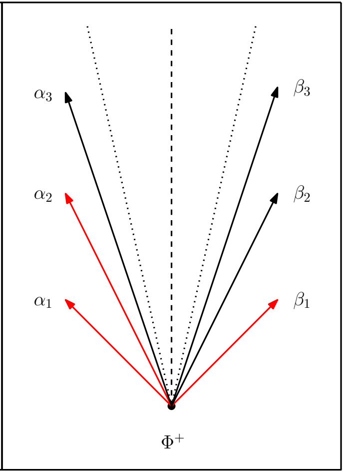


Le cas dihédral infini

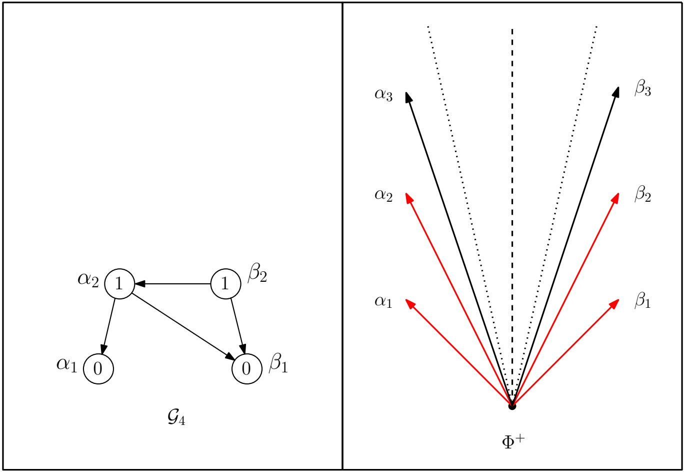


Le cas dihédral infini

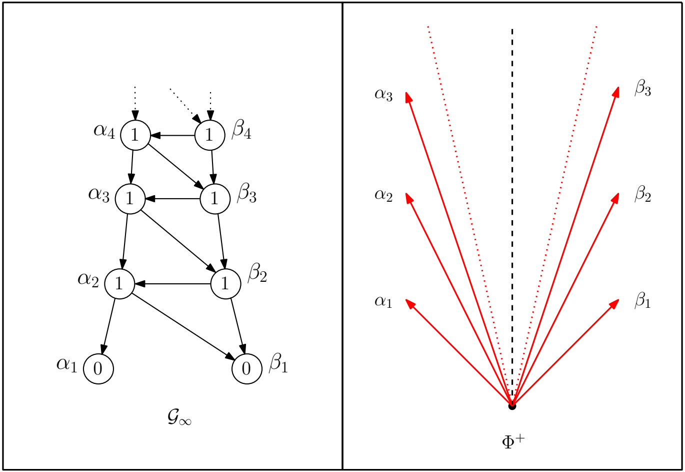




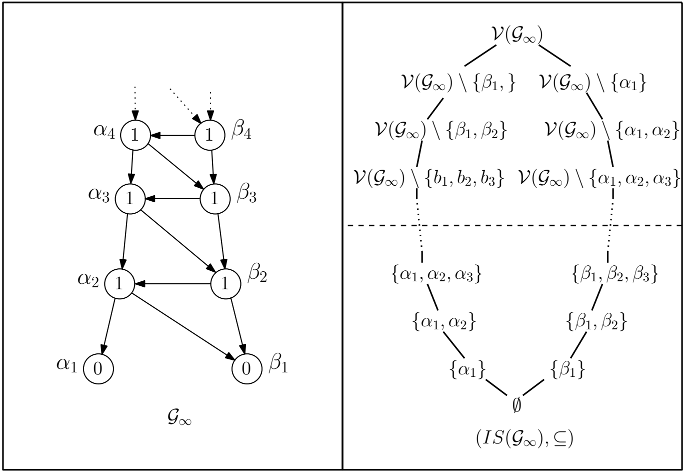
Le cas dihédral infini



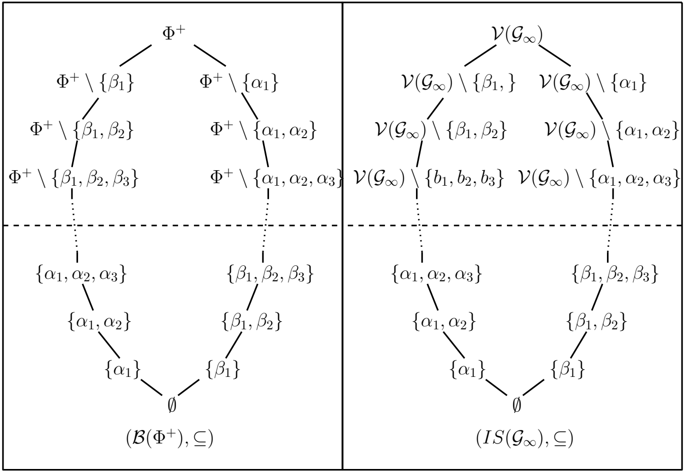
Le cas dihédral infini



Le cas dihédral infini



Le cas dihédral infini



Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Théorème, V. 2015

Il existe une famille explicite de graphes valués, que l'on dit bien assemblé sur Φ^+, tels que:

1. $\mathcal{G}$ est projectif avec $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+$;

Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Théorème, V. 2015

Il existe une famille explicite de graphes valués, que l'on dit <u>bien assemblé sur Φ^+</u>, tels que:

1. $\mathcal{G}$ est projectif avec $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+$;
2. $\mathcal{B}(\Phi^+) \subseteq IS(\mathcal{G})$ et tout ordre de réflexions est dans $PS(\mathcal{G})$;

Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Théorème, V. 2015

Il existe une famille explicite de graphes valués, que l'on dit <u>bien assemblé sur Φ^+</u>, tels que:

1. $\mathcal{G}$ est projectif avec $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+$;
2. $\mathcal{B}(\Phi^+) \subseteq IS(\mathcal{G})$ et tout ordre de réflexions est dans $PS(\mathcal{G})$;
3. si $A \in IS(\mathcal{G})$, alors $(\Phi^+ \setminus A) \in IS(\mathcal{G})$;

Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Théorème, V. 2015

Il existe une famille explicite de graphes valués, que l'on dit bien assemblé sur Φ^+, tels que:

1. $\mathcal{G}$ est projectif avec $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+$;
2. $\mathcal{B}(\Phi^+) \subseteq IS(\mathcal{G})$ et tout ordre de réflexions est dans $PS(\mathcal{G})$;
3. si $A \in IS(\mathcal{G})$, alors $(\Phi^+ \setminus A) \in IS(\mathcal{G})$;
4. on a que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$ si et seulement si $PS(\mathcal{G})$ est l'ensemble des ordres de réflexions de Φ^+ (*i.e.* les deux conjectures de Dyer sont équivalentes dans ce contexte).

Le cas général

Par manque de temps, je ne pourrai pas présenter la méthode générale pour construire un candidat de graphe valué, mais elle ressemble fortement à l'exemple précédent.

Théorème, V. 2015

Il existe une famille explicite de graphes valués, que l'on dit bien assemblé sur Φ^+, tels que:

1. $\mathcal{G}$ est projectif avec $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \Phi^+$;
2. $\mathcal{B}(\Phi^+) \subseteq IS(\mathcal{G})$ et tout ordre de réflexions est dans $PS(\mathcal{G})$;
3. si $A \in IS(\mathcal{G})$, alors $(\Phi^+ \setminus A) \in IS(\mathcal{G})$;
4. on a que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$ si et seulement si $PS(\mathcal{G})$ est l'ensemble des ordres de réflexions de Φ^+ (*i.e.* les deux conjectures de Dyer sont équivalentes dans ce contexte).

On peut noter que la structure projective des graphes bien assemblés, ainsi que le fait qu'on puisse construire explicitement les membres de cette famille, nous permet de faire de nombreux tests.

Conclusion et perspectives

Conjecture

Il existe un graphe valué $\mathcal{G}$ bien assemblé sur Φ^+ tel que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$.

Conclusion et perspectives

Conjecture

Il existe un graphe valué $\mathcal{G}$ bien assemblé sur Φ^+ tel que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$.

- La conjecture a été prouvé dans les cas suivant :

$$W = A_n,\ B_n,\ D_n,\ I_2(n),\ E_6,\ E_7 \text{ et } E_8$$

Conclusion et perspectives

Conjecture

Il existe un graphe valué $\mathcal{G}$ bien assemblé sur Φ^+ tel que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$.

- La conjecture a été prouvé dans les cas suivant :

$$W = A_n,\ B_n,\ D_n,\ I_2(n),\ E_6,\ E_7 \text{ et } E_8$$

- La structure projective permet d'envisager une preuve par récurrence de cette conjecture

Conclusion et perspectives

Conjecture

Il existe un graphe valué $\mathcal{G}$ bien assemblé sur Φ^+ tel que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$.

- La conjecture a été prouvé dans les cas suivant :

$$W = A_n,\ B_n,\ D_n,\ I_2(n),\ E_6,\ E_7 \text{ et } E_8$$

- La structure projective permet d'envisager une preuve par récurrence de cette conjecture
- La construction de ces graphes amène naturellement à associer une famille de graphes valués à chaque semi-treillis cambrien, fournissant ainsi des extensions de ces treillis en treillis complets. Par contre, pour l'instant le lien avec les algèbres amassés n'est pas clair du tout.

Conclusion et perspectives

Conjecture

Il existe un graphe valué $\mathcal{G}$ bien assemblé sur Φ^+ tel que $IS(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\Phi^+)$.

- La conjecture a été prouvé dans les cas suivant :

$$W = A_n,\ B_n,\ D_n,\ I_2(n),\ E_6,\ E_7 \text{ et } E_8$$

- La structure projective permet d'envisager une preuve par récurrence de cette conjecture
- La construction de ces graphes amène naturellement à associer une famille de graphes valués à chaque semi-treillis cambrien, fournissant ainsi des extensions de ces treillis en treillis complets. Par contre, pour l'instant le lien avec les algèbres amassés n'est pas clair du tout.

Merci pour votre attention !