

Représentations d'algèbres affines quantiques aux racines de l'unité et algèbres amassées généralisées

Anne-Sophie GLEITZ

IRMA, Université de Strasbourg

Journées du GT CombAlg, LIX, 22 septembre 2015

Table des matières

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$
- 3 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_3)$

Table des matières

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$
- 3 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_3)$

Algèbres amassées

- Introduites par Fomin et Zelevinsky (2001)
- Anneaux commutatifs, unitaires et intègres, munis de générateurs, les *variables d'amas*, rassemblées dans des *amas*, tous de même cardinal.
- On passe de l'amas x à l'amas $(x \setminus \{x\}) \cup \{x'\}$ à l'aide d'une *relation d'échange* : $xx' = m_+ + m_-$.

Classification en type fini (Fomin-Zelevinsky, 2001)

Les algèbres amassées de type fini peuvent être classifiées en termes des matrices de Cartan de types A_n à G_2 .

Exemple : type C_2 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$

Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

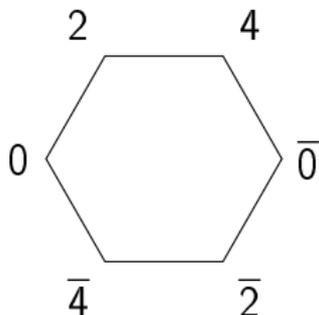
$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple : type C_2 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$

Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

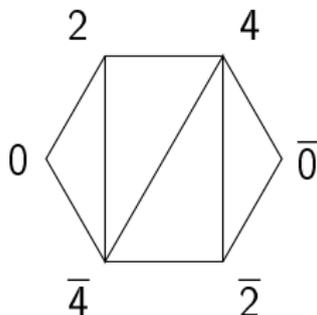
$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone P_6 :



Exemple : type C_2 Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

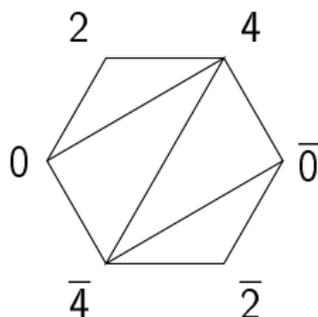
L'hexagone \mathbf{P}_6 :

Exemple : type C_2

Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :



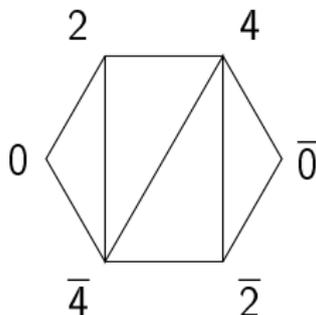
$$x_{2\bar{4}}x_{0\bar{4}} = x_{4\bar{4}} + 1$$

Exemple : type C_2

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :

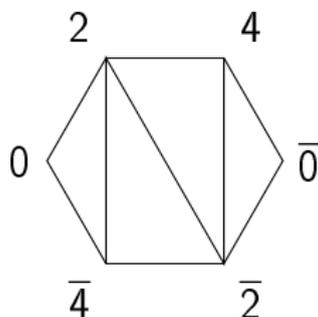


Exemple : type C_2

Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :



$$x_{4\bar{4}} x_{2\bar{2}} = x_{2\bar{4}}^2 + 1$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

$$x_{04} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

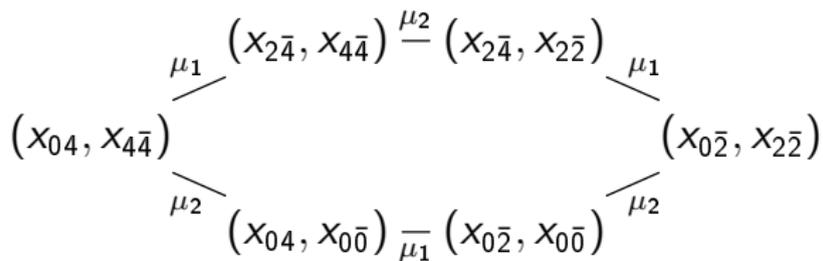
$$x_{0\bar{4}} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

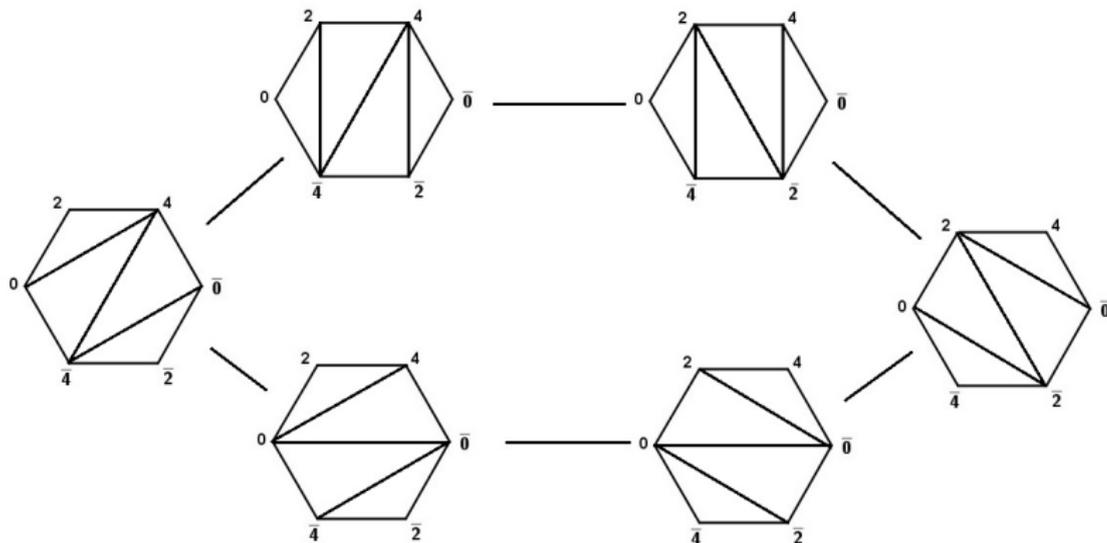
$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

L'algèbre amassée $\mathcal{A}(x^0, B)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ engendré par les variables d'amas.

Les amas en type C_2



Le cycloèdre de dimension 2



Algèbres amassées généralisées

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...
- Les relations d'échange peuvent contenir plus que 2 monômes dans le membre de droite.

Algèbres amassées généralisées

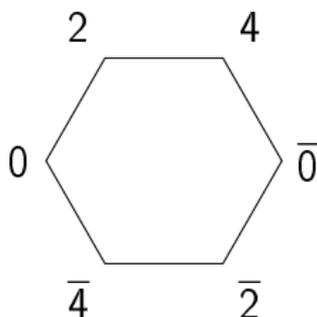
- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...
- Les relations d'échange peuvent contenir plus que 2 monômes dans le membre de droite.

Classification en type fini (Chekhov-Shapiro, 2011)

Les algèbres amassées généralisées de type fini peuvent être classifiées en termes des matrices de Cartan de types A_n à G_2 .

Exemple : type C_2 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(\lambda, x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :

$$x_{2\bar{4}}x_{0\bar{4}} = x_{4\bar{4}} + 1$$

$$x_{4\bar{4}}x_{2\bar{2}} = x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

$$x_{0\bar{4}} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}} x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2 x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + \lambda x_{2\bar{4}} x_{4\bar{4}} + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

L'algèbre amassée généralisée $\mathcal{A}(x^0, B)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(\lambda, x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ engendré par λ et les variables d'amas.

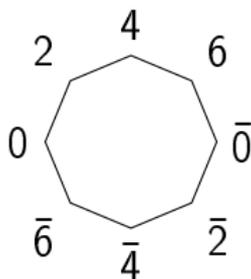
Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

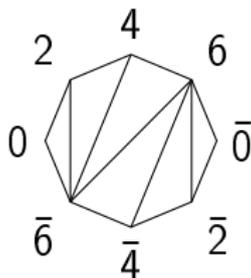
Exemple : type C_3 Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :

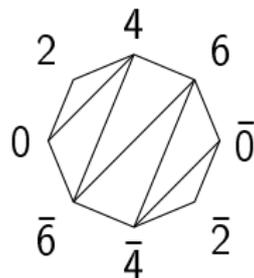
Exemple : type C_3 Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :

Exemple : type C_3 Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :

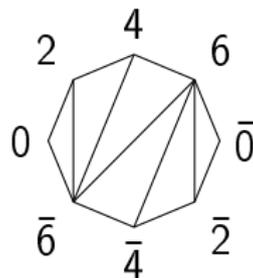
$$x_{2\bar{6}} x_{04} = x_{4\bar{6}} + 1$$

Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

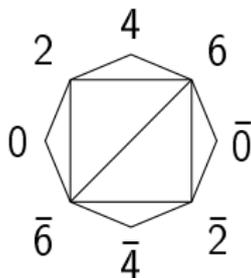
$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :



Exemple : type C_3 Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :

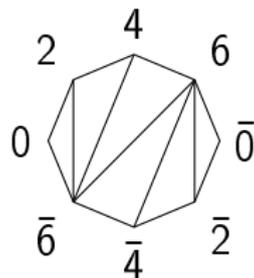
$$x_{4\bar{6}} x_{2\bar{6}} = x_{6\bar{6}} + x_{2\bar{6}}$$

Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone \mathbf{P}_8 :

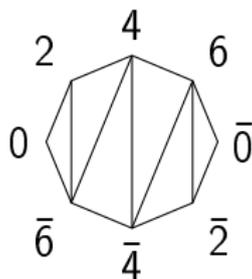


Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone \mathbf{P}_8 :



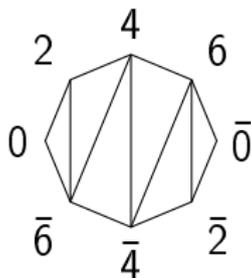
$$x_{6\bar{6}} x_{4\bar{4}} = x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{4\bar{6}} + 1$$

Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :



$$x_{6\bar{6}} x_{4\bar{4}} = x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{4\bar{6}} + 1$$

L'algèbre amassée généralisée $\mathcal{A}(\mathbf{x}^0, B)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(\lambda, x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}})$ engendré par λ et les variables d'amas.

Les variables d'amas

Il y en a 12 : les variables initiales $x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}$, et

$$x_{04} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}} (x_{4\bar{6}} + 1), \quad x_{26} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}} (x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}}), \quad x_{4\bar{4}} = \frac{1}{x_{6\bar{6}}} (1 + \lambda x_{4\bar{6}} + x_{4\bar{6}}^2),$$

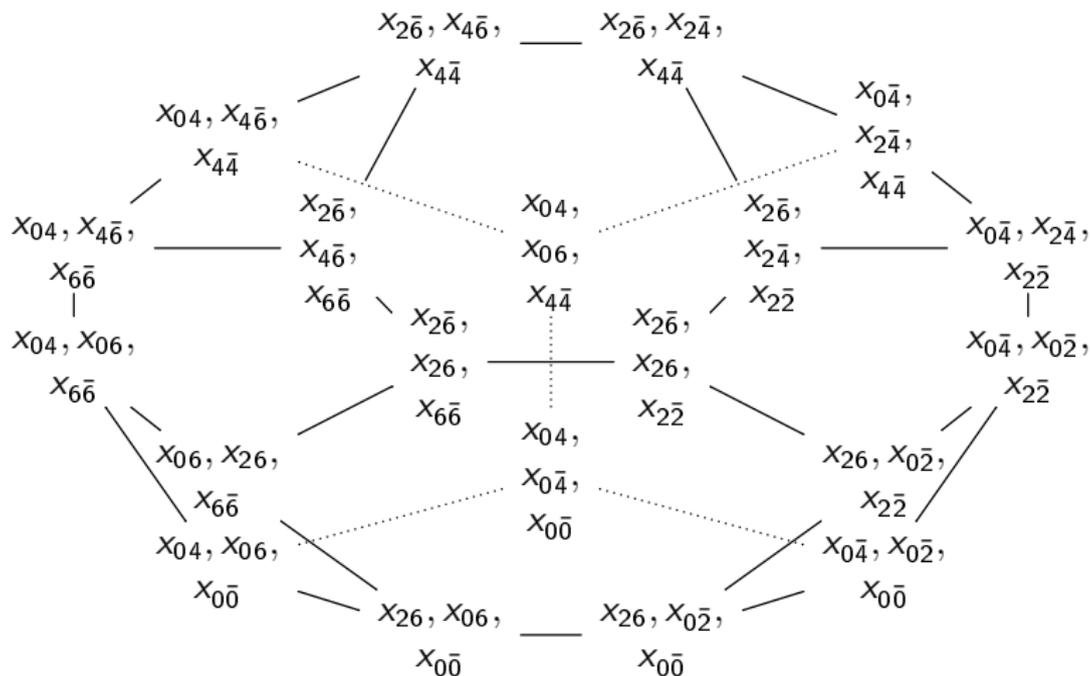
$$x_{0\bar{4}} = \frac{1}{x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}}} (x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + x_{2\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}), \quad x_{06} = \frac{1}{x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}} (x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{2\bar{4}} = \frac{1}{x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}}} (x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} + x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}^2),$$

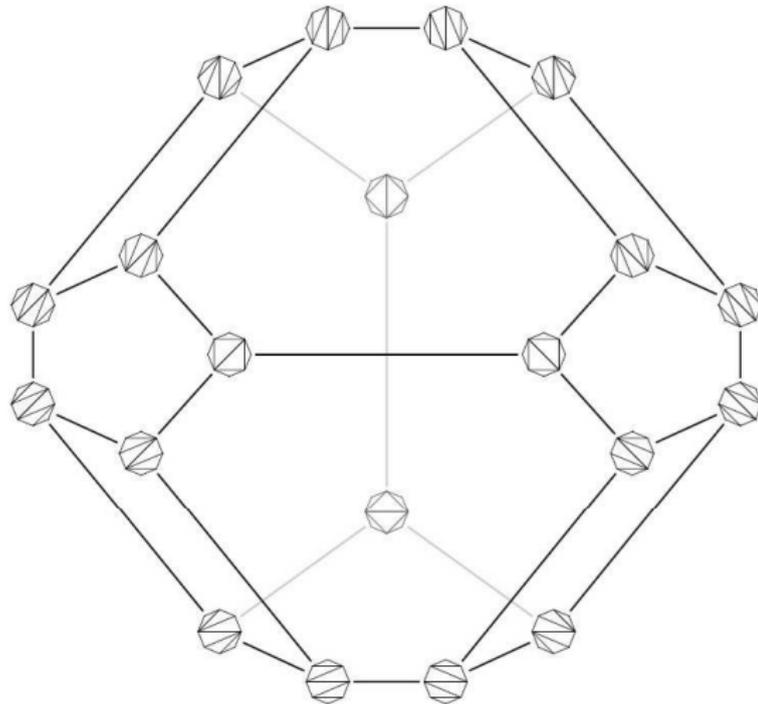
$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}}} \left(\begin{array}{c} x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}} \\ + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}} x_{6\bar{6}} \end{array} \right),$$

$$x_{2\bar{2}} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}}} (x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}} x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}}} \left(\begin{array}{c} x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2 x_{4\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}} + x_{2\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}}^2 \\ + x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}}^2 + 2x_{2\bar{6}} x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}} x_{4\bar{6}} x_{6\bar{6}} + 2x_{4\bar{6}}^2 x_{6\bar{6}}^2 \end{array} \right).$$

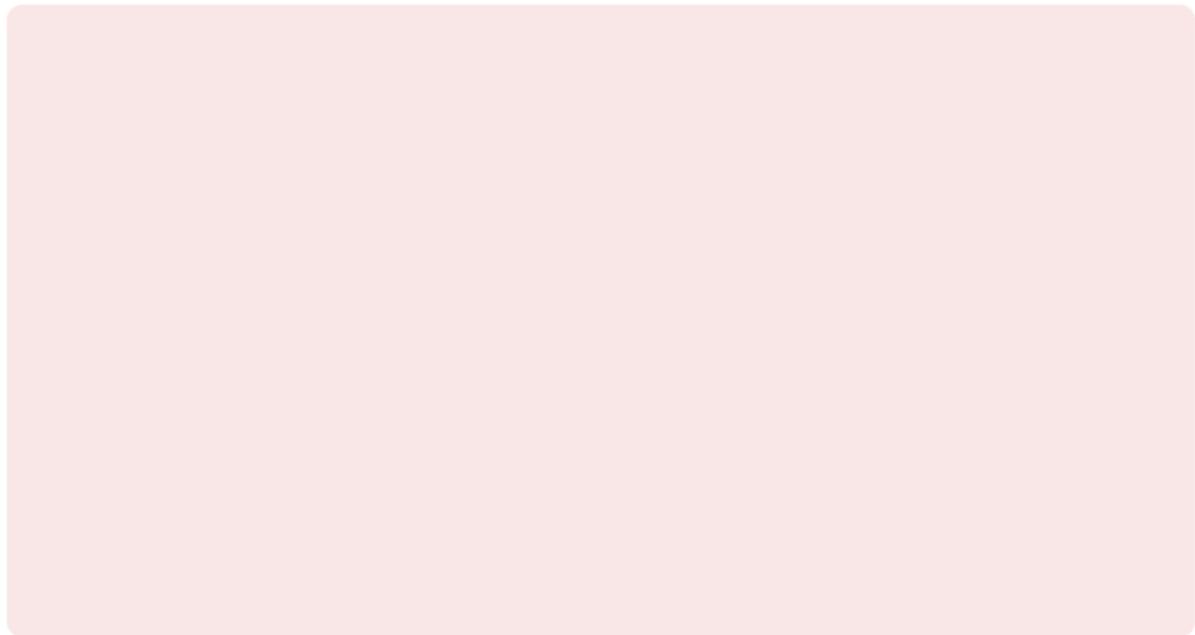
Les amas en type C_3 

Le cycloèdre de dimension 3



La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)



La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{\overline{2n, 2k}}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{\overline{2n, 2k}}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

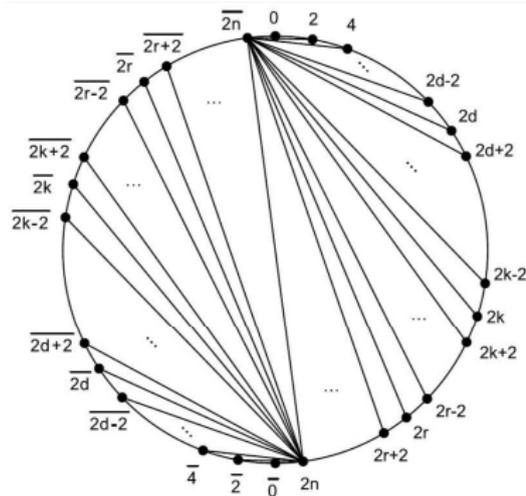
L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone \mathbf{P}_{2n+2} :

L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone \mathbf{P}_{2n+2} :



Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème (G., 2014)

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème (G., 2014)

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème (G., 2014)

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k(u) \in \mathbb{Z}[u]$ le k -ième polynôme de Tchebychev de 2^{de} espèce : $S_k(u)^2 = S_{k-1}(u)S_{k+1}(u) + 1$, où $S_0(u) = 1$ et $S_1(u) = u$.

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème (G., 2014)

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k(u) \in \mathbb{Z}[u]$ le k -ième polynôme de Tchebychev de 2^{de} espèce : $S_k(u)^2 = S_{k-1}(u)S_{k+1}(u) + 1$, où $S_0(u) = 1$ et $S_1(u) = u$.

Proposition (G., 2014)

L'ensemble $\mathcal{B} := \{S_k(\lambda) \cdot m, k \in \mathbb{N}, m \in \mathcal{M}_0\}$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$
- 3 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_3)$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$\begin{aligned}
 K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), & K_0 K_1 &= K_1 K_0, \\
 K_i E_i K_i^{-1} &= q^2 E_i, & K_i F_i K_i^{-1} &= q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}), \\
 K_i E_j K_i^{-1} &= q^{-2} E_j, & K_i F_j K_i^{-1} &= q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}), \\
 E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}),
 \end{aligned}$$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), \quad K_0 K_1 = K_1 K_0,$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}),$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}),$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}), \quad \text{et pour } i \neq j \in \{0, 1\},$$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), \quad K_0 K_1 = K_1 K_0,$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}),$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}),$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}), \quad \text{et pour } i \neq j \in \{0, 1\},$$

$$E_i^3 E_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i^2 E_j E_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i E_j E_i^2 - E_j E_i^3 = 0,$$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), \quad K_0 K_1 = K_1 K_0,$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}),$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}),$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}), \quad \text{et pour } i \neq j \in \{0, 1\},$$

$$E_i^3 E_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i^2 E_j E_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i E_j E_i^2 - E_j E_i^3 = 0,$$

$$F_i^3 F_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) F_i^2 F_j F_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) F_i F_j F_i^2 - F_j F_i^3 = 0.$$

Algèbres affines quantiques

Soit q une indéterminée (non racine de 1).

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), \quad K_0 K_1 = K_1 K_0,$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}),$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}),$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}), \quad \text{et pour } i \neq j \in \{0, 1\},$$

$$E_i^3 E_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i^2 E_j E_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i E_j E_i^2 - E_j E_i^3 = 0,$$

$$F_i^3 F_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) F_i^2 F_j F_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) F_i F_j F_i^2 - F_j F_i^3 = 0.$$

L'algèbre lacée quantique : $U_q(L\mathfrak{sl}_2) = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)/(K_0 K_1 - 1)$.

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .
- Forme entière restreinte : $U_q^{\text{res}}(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2)$, une $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2)$.

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .
- Forme entière restreinte : $U_q^{\text{res}}(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2)$, une $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2)$.
- $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2) = U_q^{\text{res}}(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}$ via $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[q, q^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .
- Forme entière restreinte : $U_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$, une $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.
- $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2) = U_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}$ via $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[q, q^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$
- \mathcal{C}_ε : catégorie (monoïdale, abélienne, non semi-simple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$.

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .
- Forme entière restreinte : $U_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$, une $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.
- $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2) = U_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}$ via $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[q, q^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$
- \mathcal{C}_ε : catégorie (monoïdale, abélienne, non semi-simple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$.

Tout objet V de \mathcal{C}_ε a un ε -caractère $\chi_\varepsilon(V) \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}, a \in \mathbb{C}^*]$.

Spécialisation à une racine de 1

- ε racine de l'unité d'ordre ℓ .
- Forme entière restreinte : $U_q^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$, une $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de $U_q(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$.
- $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2) = U_q^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}$ via $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[q, q^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$
- \mathcal{C}_ε : catégorie (monoïdale, abélienne, non semi-simple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$.

Tout objet V de \mathcal{C}_ε a un ε -caractère $\chi_\varepsilon(V) \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}, a \in \mathbb{C}^*]$.

Théorème (Chari-Pressley, 1997 ; Frenkel-Mukhin, 2002)

Les modules simples S de \mathcal{C}_ε sont paramétrés par le *plus haut monôme* m de leurs ε -caractères, où q est remplacé par ε ; c'est un monôme *dominant* (exposants positifs).

On écrit $S = L(m)$.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Soit $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ dont les objets V ont leur ε -caractère $\chi_{\varepsilon}(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2r}}^{\pm 1}, r \in \mathbb{Z}]$.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Soit $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ dont les objets V ont leur ε -caractère $\chi_{\varepsilon}(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2r}}^{\pm 1}, r \in \mathbb{Z}]$.

Soient $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $Y_1 := Y_0 Y_2 \cdots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Soit $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ dont les objets V ont leur ε -caractère $\chi_{\varepsilon}(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2r}}^{\pm 1}, r \in \mathbb{Z}]$.

Soient $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $Y_1 := Y_0 Y_2 \cdots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$, de la forme

$$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}),$$

for $r \in \mathbb{Z}, k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Soit $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ dont les objets V ont leur ε -caractère $\chi_{\varepsilon}(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2r}}^{\pm 1}, r \in \mathbb{Z}]$.

Soient $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \cdots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$, de la forme

$$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}),$$

for $r \in \mathbb{Z}, k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

$W_{\varepsilon}(1, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r})$ est un *module fondamental*.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Soit $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ dont les objets V ont leur ε -caractère $\chi_{\varepsilon}(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2r}}^{\pm 1}, r \in \mathbb{Z}]$.

Soient $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \cdots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$, de la forme

$$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}),$$

for $r \in \mathbb{Z}, k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

$W_{\varepsilon}(1, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r})$ est un *module fondamental*.

Convention : $W_{\varepsilon}(0, \varepsilon^{2r})$ est la représentation triviale.

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$$k \quad \left| \quad \begin{array}{l} V \in \mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}} \text{ de plus haut monôme} \\ Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)} \end{array} \right.$$

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

k	$V \in \mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ de plus haut monôme $Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}$
$k < \ell$	$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ irréductible

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

k	$V \in \mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ de plus haut monôme $Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}$
$k < \ell$	$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ irréductible
$k = \ell$	$L(\mathbf{Y}_1) \oplus W_{\varepsilon}(\ell - 1, \varepsilon^{2r+2})$ où $\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1)) = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^{-1}$ "Frobenius pullback"

La catégorie $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

k	$V \in \mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ de plus haut monôme $Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \cdots Y_{2(r+k-1)}$
$k < l$	$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ irréductible
$k = l$	$L(\mathbf{Y}_1) \oplus W_{\varepsilon}(l-1, \varepsilon^{2r+2})$ où $\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1)) = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^{-1}$ "Frobenius pullback"
$k = nl + b$	$\chi_{\varepsilon}(L(Y_{2r} \cdots Y_{2r+2nl+2b-2}))$ $= \chi_{\varepsilon}(W_{\varepsilon}(b, \varepsilon^{2r})) S_n(\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1)))$

Modules de Kirillov-Reshetikhin : relations

Les ε -caractères des modules $W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})$, pour $k < \ell - 1$, satisfont le **T-système** :

$$\begin{aligned} & \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r}))\chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r+2})) \\ &= \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k+1, \varepsilon^{2r}))\chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k-1, \varepsilon^{2r+2})) + 1. \end{aligned}$$

Modules de Kirillov-Reshetikhin : relations

Les ε -caractères des modules $W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})$, pour $k < \ell - 1$, satisfont le **T-système** :

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r}))\chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r+2})) \\ = \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k+1, \varepsilon^{2r}))\chi_\varepsilon(W_\varepsilon(k-1, \varepsilon^{2r+2})) + 1. \end{aligned}$$

La $(\ell - 1)$ -ème relation est différente :

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(\ell-1, 1))\chi_\varepsilon(W_\varepsilon(\ell-1, \varepsilon^2)) \\ = \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(\ell-2, \varepsilon^2))\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_1)) + 1 + \chi_\varepsilon(W_\varepsilon(\ell-2, \varepsilon^2))^2. \end{aligned}$$

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

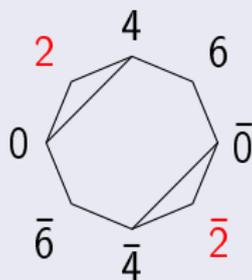
$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
 et $[\overline{2r - 2}, \overline{2r + 2k}]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
et $[\overline{2r - 2}, \overline{2r + 2k}]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(1, \varepsilon^2) = L(Y_2) \leftrightarrow$ diagonales de l'octogone \mathbf{P}_8 :

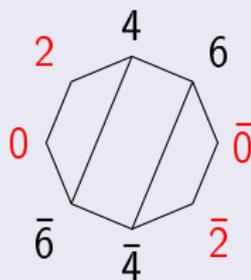


Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
et $[\overline{2r - 2}, \overline{2r + 2k}]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(2, \varepsilon^0) = L(Y_0 Y_2)$ \leftrightarrow diagonales de l'octogone \mathbf{P}_8 :

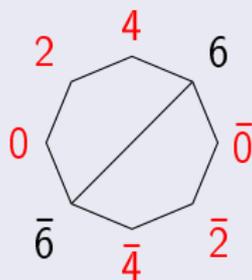


Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
et $[\overline{2r - 2}, \overline{2r + 2k}]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(3, \varepsilon^0) = L(Y_0 Y_2 Y_4) \leftrightarrow$ diamètre de l'octogone \mathbf{P}_8 :



Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Théorème (Chari-Pressley, 1997)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme

$$\bigotimes_{t=1}^r W_{\varepsilon}(k_t, \varepsilon^{2d_t})^{\otimes a_t} \otimes L(\mathbf{Y}_1^a),$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_r, a \in \mathbb{N}$,
et pour $t \neq s \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les diagonales $[2d_t - 2, 2d_t + 2k_t]$ et
 $[2d_s - 2, 2d_s + 2k_s]$ ne se coupent pas dans $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Théorème (Chari-Pressley, 1997)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme

$$\bigotimes_{t=1}^r W_{\varepsilon}(k_t, \varepsilon^{2d_t})^{\otimes a_t} \otimes L(\mathbf{Y}_1^a),$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_r, a \in \mathbb{N}$,
et pour $t \neq s \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les diagonales $[2d_t - 2, 2d_t + 2k_t]$ et
 $[2d_s - 2, 2d_s + 2k_s]$ ne se coupent pas dans $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Théorème (Chari-Pressley)

On a $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}[\chi_{\varepsilon}(L(Y_{\varepsilon^{2r}}))]$, $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

L'isomorphisme en type A_1

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

L'isomorphisme en type A_1

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G., 2014)

Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que

$$\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})], \quad \forall r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell,$$

$$\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)].$$

L'isomorphisme en type A_1

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G., 2014)

Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que

$$\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})], \quad \forall r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell,$$

$$\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)].$$

La \mathbb{Z} -base \mathcal{S} des monômes en les petites variables de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ est envoyée sur la base des classes des modules standard de R .

L'isomorphisme en type A_1

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G., 2014)

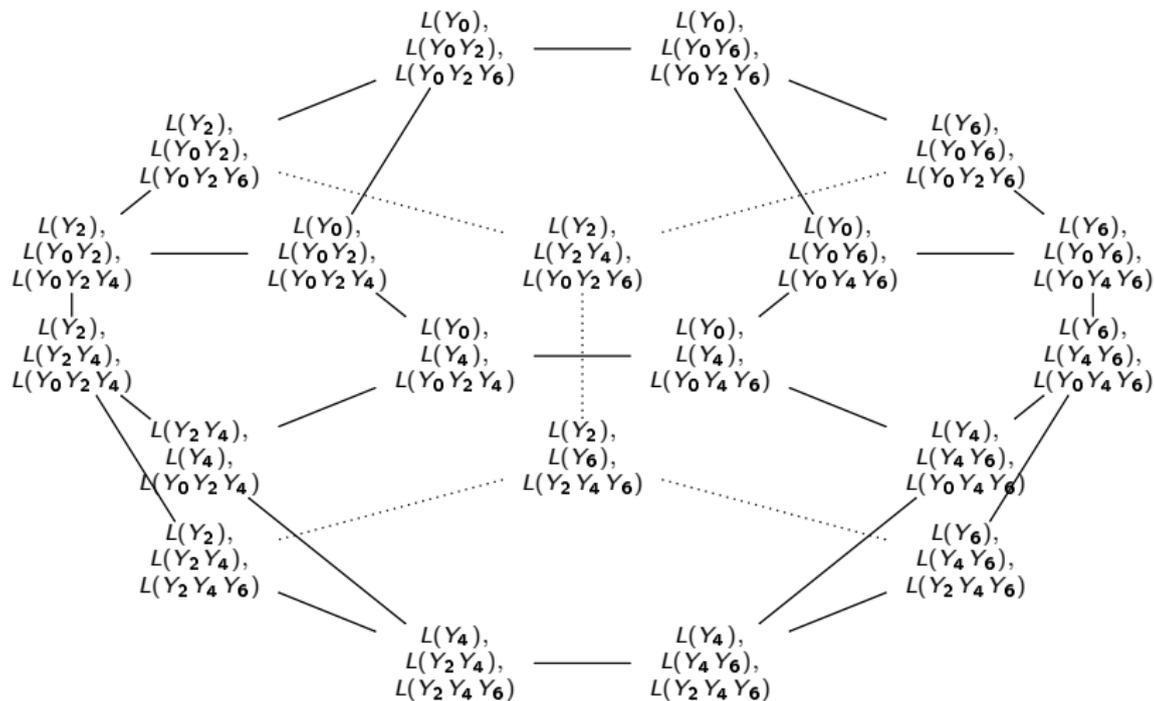
Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que

$$\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})], \quad \forall r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell,$$

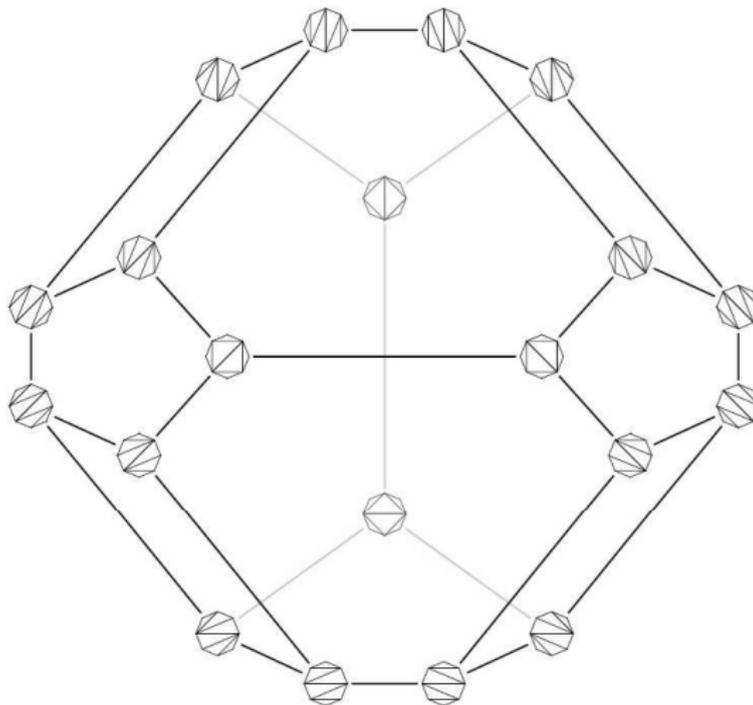
$$\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)].$$

La \mathbb{Z} -base \mathcal{S} des monômes en les petites variables de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ est envoyée sur la base des classes des modules standard de R .

La \mathbb{Z} -base \mathcal{B} de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ (monômes d'amas généralisés) est envoyée sur la base des classes des modules simples de R .

Exemple : $\ell = 4$: type C_3 

Le cycloèdre de dimension 3



- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_2)$
- 3 Combinatoire et représentations de $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathcal{L}\mathfrak{sl}_3)$

Type A_2

Théorème (G., 2014)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon^{\mathbb{Z}}})$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée de type G_2 .

Type A_2

Théorème (G., 2014)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée de type G_2 .

Conjecture (G., 2014)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 3$, l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ est isomorphe à l'algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_3 , de graine initiale (\mathbf{x}^0, B) avec

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} [L(Y_{1,0})], \\ [L(Y_{2,5})], \\ [L(Y_{1,0} Y_{1,4})], \\ [L(Y_{1,0} Y_{1,4} Y_{2,5} Y_{2,3})] \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Type A_2

Théorème (G., 2014)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée de type G_2 .

Conjecture (G., 2014)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 3$, l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ est isomorphe à l'algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_3 , de graine initiale (\mathbf{x}^0, B) avec

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} [L(Y_{1,0})], \\ [L(Y_{2,5})], \\ [L(Y_{1,0} Y_{1,4})], \\ [L(Y_{1,0} Y_{1,4} Y_{2,5} Y_{2,3})] \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coefficients : $\lambda_1 = [L(\mathbf{Y}_1)] = [L(Y_{1,0} Y_{1,2} Y_{1,4})]$ et
 $\lambda_2 = [L(\mathbf{Y}_2)] = [L(Y_{2,1} Y_{2,3} Y_{2,5})].$

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.
- Relations d'échange classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.
- Relations d'échange classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.
- Une seule relation généralisée :

$$x_{2\ell-2}x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.
- Relations d'échange classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.
- Une seule relation généralisée :

$$x_{2\ell-2}x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

- Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.
- Relations d'échange classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.
- Une seule relation généralisée :

$$x_{2\ell-2}x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

- Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.
- \mathcal{G}_ℓ de type infini :
monômes d'amas généralisés \leftrightarrow classes des modules simples.

Type A_2

- Conjecture générale pour A_2 , $\ell > 2$: algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.
- Relations d'échange classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.
- Une seule relation généralisée :

$$x_{2\ell-2}x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

- Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.
- \mathcal{G}_ℓ de type infini :
monômes d'amas généralisés \leftrightarrow classes des modules simples.

Autres cas : 2 graines pour A_3 , calculs préliminaires pour A_4 et D_4 .

: —)

Merci pour votre attention !