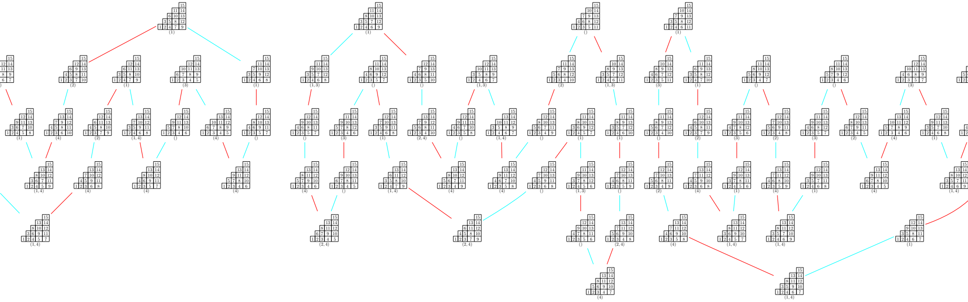
Nombre moyen de tresses dans les mots réduits et tableaux justifiés à droite

A. Schilling, N. M. Thiéry, G. White et N. Williams

Laboratoire de Recherche en Informatique, Université Paris Sud 11

Journées du GDR CombAlg, 21 Septembre 2015



Mots réduits $\mathbf{w}$ pour w_0 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Tri par bulle de dcba

Mots réduits **w** pour w_0 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Tri par bulle de dcba

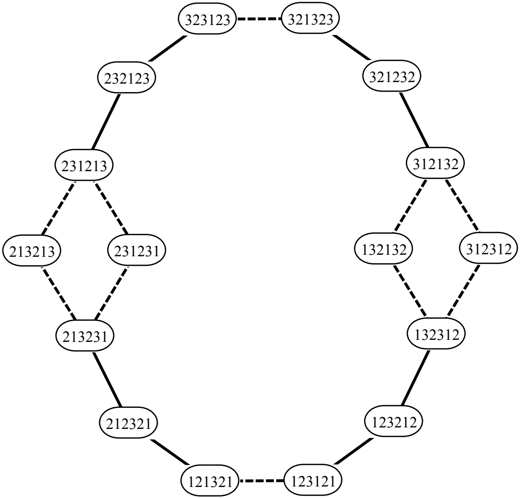
Définition

$\mathrm{Red}(w_0)$: ensemble des mots réduits w pour w_0 dans $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Pour $\mathfrak{S}_3$, $\mathrm{Red}(w_0) = \{121, 212\}$

Exemple : Red(w_0) pour $\mathfrak{S}_4$



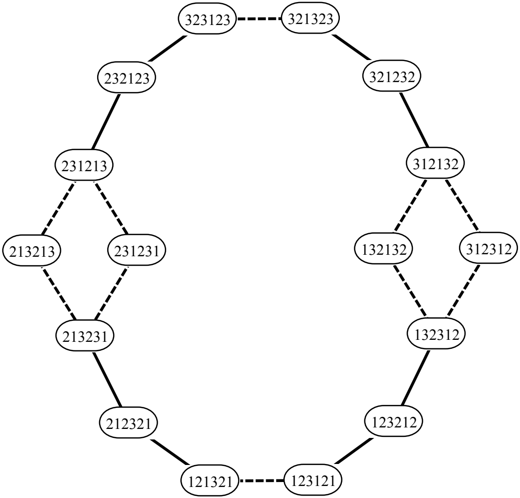
trait plein : tresse $iji = jij$ pointillé : commutation triviale $ij = ji$

Proposition

On peut passer de tout mot réduit à tout mot réduit par les opérations suivantes :

- *Commutations triviales* : $ij \longrightarrow ji$, avec $|i-j| > 1$
- *Relations de tresses* : $iji \longrightarrow iji$, avec $|i-j| = 1$

Nombres de tresses dans les mots réduits ?



Tresse dans $\mathbf{w}$: occurrence de iji dans $\mathbf{w}$, avec $|i - j| = 1$

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

Démonstration.

1. Correspondance de Edelman Green
2. Énoncé sur les tableaux de Young standards escaliers
3. Opérateurs de promotion
4. Chirurgie et formule des équerres $\square$

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

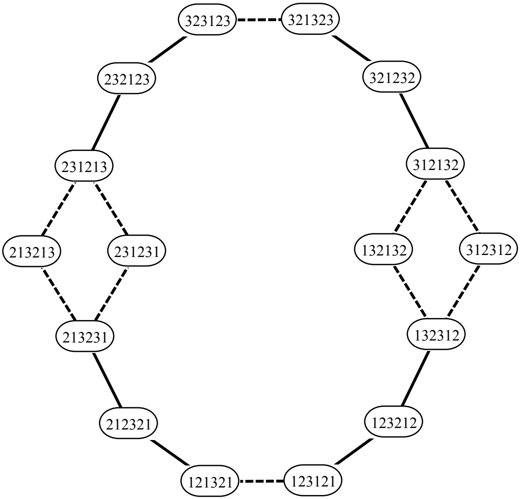
Démonstration.

1. Correspondance de Edelman Green
2. Énoncé sur les tableaux de Young standards escaliers
3. Opérateurs de promotion
4. Chirurgie et formule des équerres $\square$

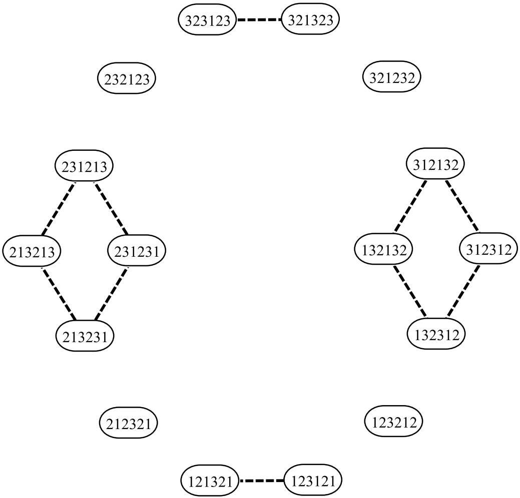
Question

Raffiner ce théorème ?

Nombre de tresses dans les classes de commutation



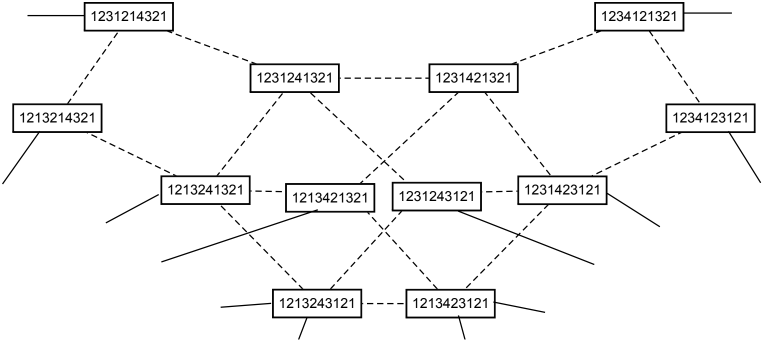
Nombre de tresses dans les classes de commutation



Classe de commutation Com(w) : comp. connexe commutations

Nombre de tresses dans les classes de commutation

Exemple ($n = 5$)



Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 12 \cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 12\cdots n\ \cdots 123\ 12\ 1$

Conjecture (Nathan Williams '14)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 12\cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (Schilling, T., Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 12\cdots n\ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (Schilling, T., Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Démonstration par les tableaux.

1. Empilements de Viennot
2. Énoncé équivalent sur les tableaux standards calés à droite
3. Bijection à coup de jeu de taquin $\square$

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 12 \cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (Schilling, T., Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Démonstration par les tableaux.

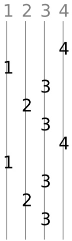
1. Empilements de Viennot
2. Énoncé équivalent sur les tableaux standards calés à droite
3. Bijection à coup de jeu de taquin □

Démonstration par homomésie.

1. Action d'un groupe dihedral
2. Constat expérimental : Moyenne 1 sur chaque orbite
3. Bijection □

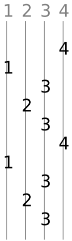
Empilements de Viennot

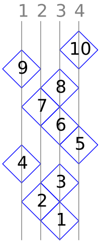
Exemple (mot réduit : 3231432314)



Empilements de Viennot

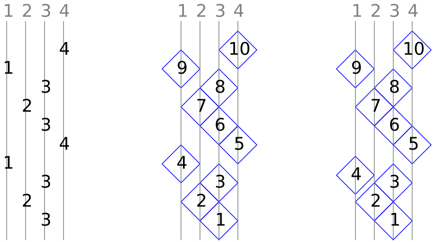
Exemple (mot réduit : 3231432314)





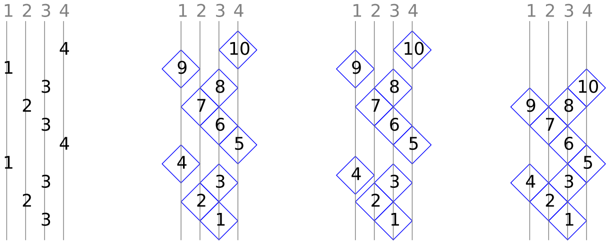
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



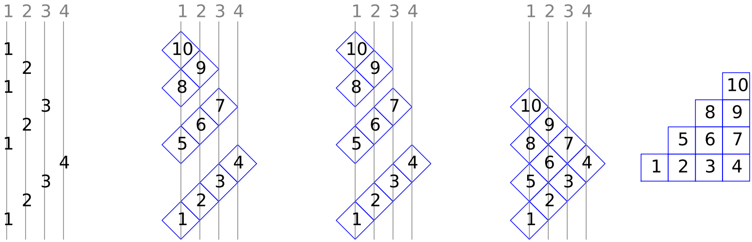
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



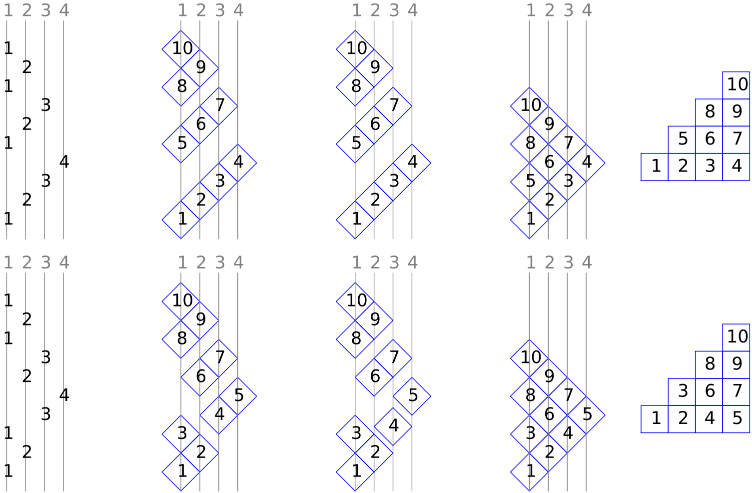
Empilements de Viennot

Exemple (mots réduits : 1234123121 et 1213423121)

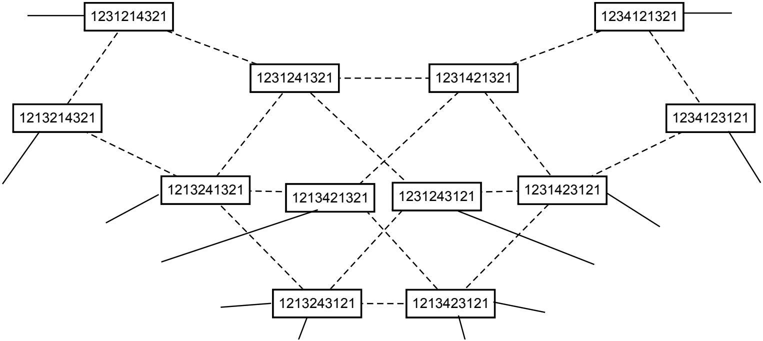


Empilements de Viennot

Exemple (mots réduits : 1234123121 et 1213423121)



Tresses dans les tableaux : exemple pour $n = 5$



Énoncé équivalent sur les tableaux calés à droite

Tresse dans un tableau : i-1,i,i+1 sur une petite équerre

Théorème

En moyenne, un tableau standard escalier calé à droite a une tresse

Énoncé équivalent sur les tableaux calés à droite

Tresse dans un tableau : i-1,i,i+1 sur une petite équerre

Théorème

En moyenne, un tableau standard escalier calé à droite a une tresse

Comment démontrer cela ?

Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Théorème

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Théorème

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

Démonstration.

Bijection : (mot de Dyck, petit pic) $\longmapsto$ mot de Dyck $\square$

Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Théorème

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

Démonstration.

Bijection : (mot de Dyck, petit pic) $\longmapsto$ mot de Dyck $\square$

Cela suggère

- Chercher une preuve bijective
- Utiliser un opérateur cylique sur la fin d'un tableau
- Opérateur de promotion (jeu de taquin) ?

Bijection : (tableau, tresse) $\longmapsto$ tableau

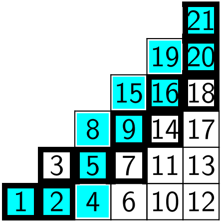
1. Effacer les deux cases de la tresse sur la diagonale
2. Les remplir respectivement par jeu de taquin vers les extrémités
3. Renuméroter pour avoir un tableau standard

Exemple

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\cline{6-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 21 \\
\cline{5-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 17 & 20 \\
\cline{4-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 10 & 16 & 19 \\
\cline{3-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 6 & 9 & 15 & 18 \\
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 5 & 8 & 12 & 14 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 13 \\
\hline
\end{array}, 5\right) \longmapsto
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\cline{6-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 21 \\
\cline{5-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 19 & 20 \\
\cline{4-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 15 & 16 & 18 \\
\cline{3-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 8 & 9 & 14 & 17 \\
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 6 & 10 & 12 \\
\hline
\end{array}$$

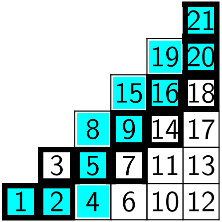
Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités
2. Où s'arrêter = retrouver k



Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités
2. Où s'arrêter = retrouver k



Lemme (clé combinatoire)

Dans un tableau standard escalier calé à droite, les chemins du jeu de taquin et son dual se croisent une unique fois, sur la diagonale

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Gyration paire et impaire

- $\tau_o = \tau_1 \tau_3 \tau_5 \cdots$
- $\tau_e = \tau_2 \tau_4 \tau_6 \cdots$

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Gyration paire et impaire

- $\tau_o = \tau_1 \tau_3 \tau_5 \cdots$
- $\tau_e = \tau_2 \tau_4 \tau_6 \cdots$

Proposition

$\langle \tau_o, \tau_e \rangle$: groupe dihédral d'ordre $|P|$
L'opérateur de gyration $\tau_o \tau_e$ est conjugé non trivialement à l'opérateur de promotion

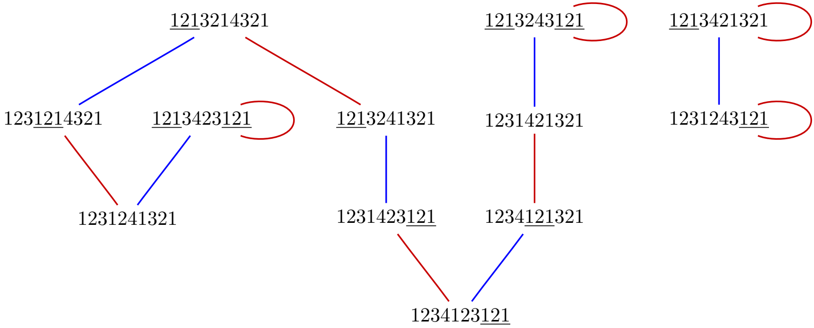
Homomésie

Théorème

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Reste vrai en se restreignant aux $\langle \tau_o, \tau_e \rangle$*-orbites !*

Exemple



Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$\begin{array}{c} 123{\color{red}1}2{\color{red}1}4321 \\ \big\downarrow {\scriptstyle \tau_o} \\ 12{\color{red}1}3{\color{red}2}14321 \\ \big\downarrow {\scriptstyle \tau_e} \\ 1{\color{red}2}1{\color{red}3}241321 \\ \big\downarrow {\scriptstyle \tau_o} \\ {\color{red}1}2{\color{red}3}1423121 \end{array}$$

Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$
\begin{array}{c}
123\color{red}{1}2\color{red}{1}4321 \\
\big\downarrow \tau_o \\
12\color{red}{1}3\color{red}{2}14321 \\
\big\downarrow \tau_e \\
1\color{red}{2}1\color{red}{3}241321 \\
\big\downarrow \tau_o \\
\color{red}{1}2\color{red}{3}1423121
\end{array}
$$

- $\mathbf{w}$: le mot réduit
- k : la position du milieu de la tresse
- $\tau_o(i) := \tau_o$ si i impair et τ_e sinon
- Renvoyer $\mathbf{w}.\tau_{o(k-2)} \cdots \tau_{o(2)}\tau_{o(1)}$

Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$
\begin{array}{c}
123\color{red}{1}2\color{red}{1}4321 \\
\big\downarrow \tau_o \\
12\color{red}{1}3\color{red}{2}14321 \\
\big\downarrow \tau_e \\
1\color{red}{2}1\color{red}{3}241321 \\
\big\downarrow \tau_o \\
\color{red}{1}2\color{red}{3}1423121
\end{array}
$$

- $\mathbf{w}$: le mot réduit
- k : la position du milieu de la tresse
- $\tau_o(i) := \tau_o$ si i impair et τ_e sinon
- Renvoyer $\mathbf{w}.\tau_{o(k-2)} \cdots \tau_{o(2)}\tau_{o(1)}$

Préserve les orbites par construction

Bijection inverse

Exemple

i	$\mathbf{w}$	a_i	c_i	$c_i - a_i$
2	1231423121	1	3	2
3	1213241321	2	3	1
4	1213214321	1	2	1
5	1231214321	1	1	0
6	1231241321	2	1	-1
7	1213423121	2	1	-1
8	1213423121	3	2	-1
9	1231241321	3	1	-2

Bijection inverse

Exemple

i	$\mathbf{w}$	a_i	c_i	$c_i - a_i$
2	1231423121	1	3	2
3	1213241321	2	3	1
4	1213214321	1	2	1
5	1231214321	1	1	0
6	1231241321	2	1	-1
7	1213423121	2	1	-1
8	1213423121	3	2	-1
9	1231241321	3	1	-2

Lemme (clé combinatoire)

Pour tout mot $\mathbf{w}$
Exactement un i *tel que* $a_i = c_i$, *et c'est alors une tresse*

Conclusion

- Démonstrations courtes par actions de groupes
- Aussi pour prouver des moyennes !
- Se prête bien à l'exploration informatique
- Premier exemple d'homomésie avec un groupe dihédral

Conclusion

- Démonstrations courtes par actions de groupes
- Aussi pour prouver des moyennes !
- Se prête bien à l'exploration informatique
- Premier exemple d'homomésie avec un groupe dihédral

Questions ouvertes

- Traiter d'autres classes de commutation ?
- Bijection équivariante vers des objets combinatoires où l'action de groupe est naturelle ?