Une famille de Posets définie à partir de graphes orientés.

François Viard

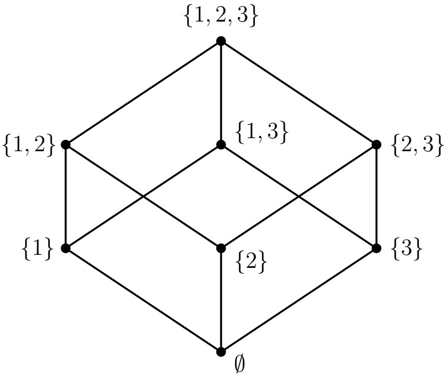
ICJ - Lyon 1

Septembre 2015, LIX

Plan

Posets: quelques définitions.

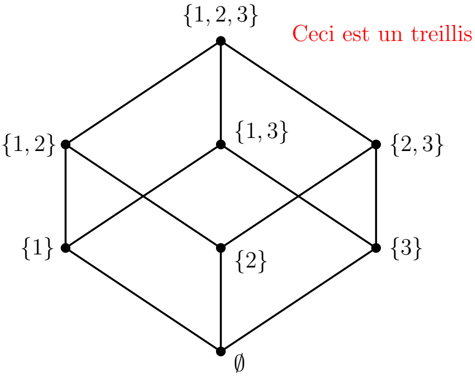
$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réflexive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1,2,3\}$ ordonnées par inclusion.

Posets: quelques définitions.

$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réfléxive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1,2,3\}$ ordonnées par inclusion.

Treillis complet :=

Pour tout $S \subseteq P$,

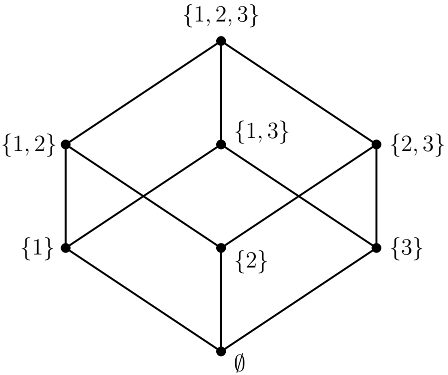
S admet une borne inférieure

et une borne supérieure

pour l'ordre "$\leq$".

Posets: quelques définitions.

$\mathcal{P} = (P, \leq)$	"$\leq$" est une relation binaire *réfléxive*, *antysimétrique* et *transitive*.



Parties de $\{1,2,3\}$ ordonnées par inclusion.

Treillis complet :=

Pour tout $S \subseteq P$,

S admet une borne inférieure

et une borne supérieure

pour l'ordre "$\leq$".

Fonction de möbius sur $\mathcal{P}$:=

Définie récursivement par:

1) $\forall x \in P,\ \mu(x,x) = 1;$

2) $\mu(x,y) = -\sum_{x \leq c < y} \mu(x,c).$

Degré sortant et graphes valués

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe orienté quelconque (on ne suppose pas que G est simple, donc il peut y avoir des multi-arêtes) et z un sommet de G. On définit les statistiques suivante:

Degré sortant et graphes valués

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe orienté quelconque (on ne suppose pas que G est simple, donc il peut y avoir des multi-arêtes) et z un sommet de G. On définit les statistiques suivante:

- le degré sortant de z, noté $d^+(z)$, est le nombre d'arêtes sortant de z dans G (comptées avec multiplicité), et qui peut être infini;

Degré sortant et graphes valués

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe orienté quelconque (on ne suppose pas que G est simple, donc il peut y avoir des multi-arêtes) et z un sommet de G. On définit les statistiques suivante:

- le degré sortant de z, noté $d^+(z)$, est le nombre d'arêtes sortant de z dans G (comptées avec multiplicité), et qui peut être infini;
- pour tout $A \subseteq V(G)$, $d^+_A(z)$ est le nombre d'arêtes sortant de z et arrivant sur un point de A.

Degré sortant et graphes valués

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe orienté quelconque (on ne suppose pas que G est simple, donc il peut y avoir des multi-arêtes) et z un sommet de G. On définit les statistiques suivante:

- le degré sortant de z, noté $d^+(z)$, est le nombre d'arêtes sortant de z dans G (comptées avec multiplicité), et qui peut être infini;
- pour tout $A \subseteq V(G)$, $d_A^+(z)$ est le nombre d'arêtes sortant de z et arrivant sur un point de A.

Définition

Dans cet exposé, on appellera graphe valué un couple $\mathcal{G} = (G, \theta)$ formé d'un graphe orienté G et d'une application $\theta : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que

$$\text{pour tout } z \in V(G),\ 0 \leq \theta(z) \leq d^+(z).$$

Treillis associé à un graphe valué

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

Treillis associé à un graphe valué

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

Théorème, V. 2015

Le poset $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est un treillis complet.

Treillis associé à un graphe valué

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

Théorème, V. 2015

Le poset $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est un treillis complet.

Dans la suite de cet exposé, on va restreindre un peu notre étude:

- au cas où le graphe est <u>simple</u> et <u>acyclique</u>;

Treillis associé à un graphe valué

Définition

Soit $\mathcal{G} = (G, \theta)$ un graphe valué, on note $IS(\mathcal{G})$ l'ensemble des sous-parties de $V(G)$ définie par

$$IS(\mathcal{G}) := \left\{ A \subseteq V(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(z) \leq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in A \\ \theta(z) \geq d_A^+(z) \text{ pour tout } z \in V(G) \setminus A \end{array} \right\}.$$

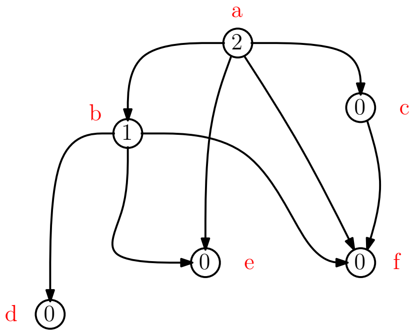
Théorème, V. 2015

Le poset $(IS(\mathcal{G}), \subseteq)$ est un treillis complet.

Dans la suite de cet exposé, on va restreindre un peu notre étude:

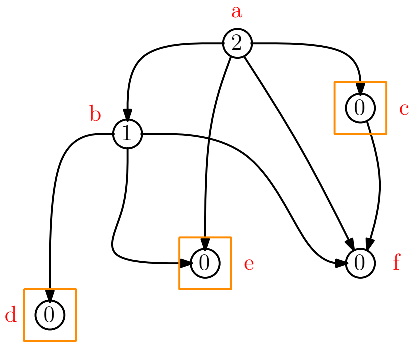
- au cas où le graphe est simple et acyclique;
- on va considérer $IS_0(\mathcal{G}) := \{A \in IS(\mathcal{G}) | A \text{ est } \textit{fini}\}$.

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



$L = [\ ]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



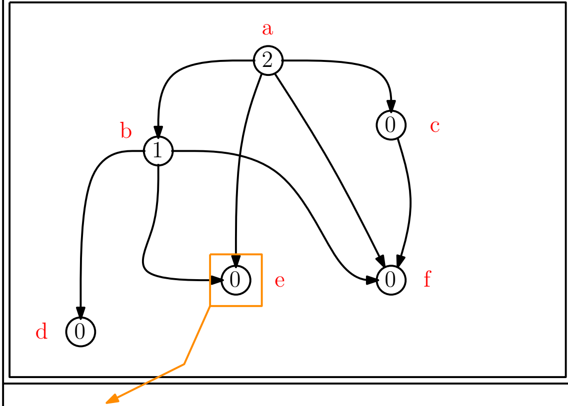
Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

$L = [\ ]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



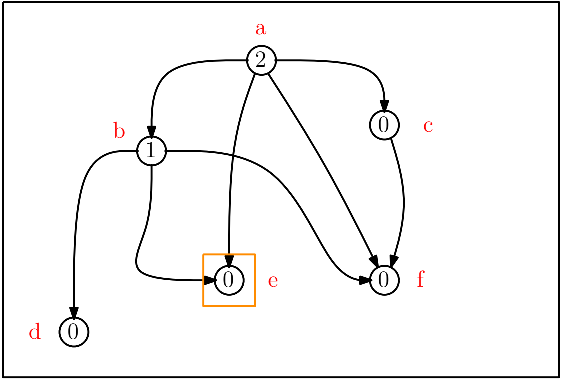
Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

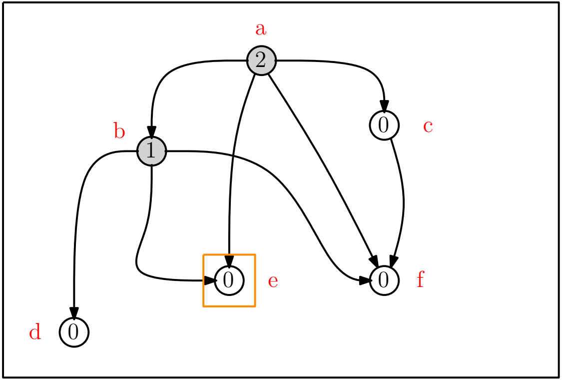
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

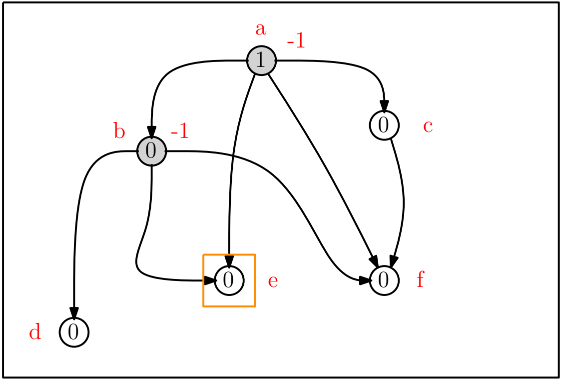
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

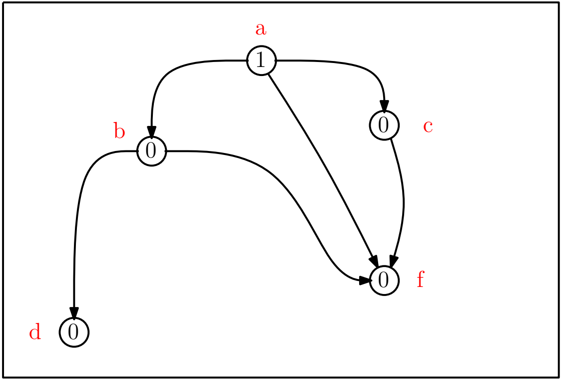
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y,z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

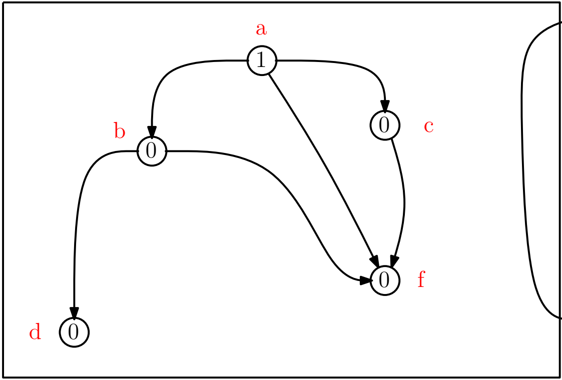
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

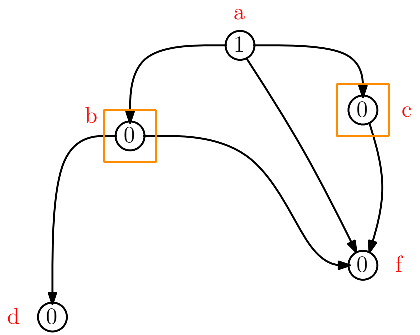
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

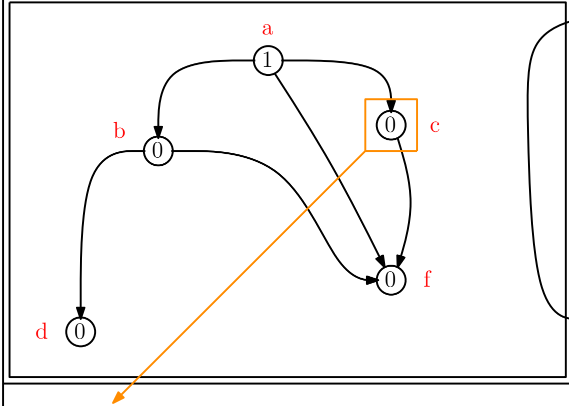
Choisir un de ces sommets
et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

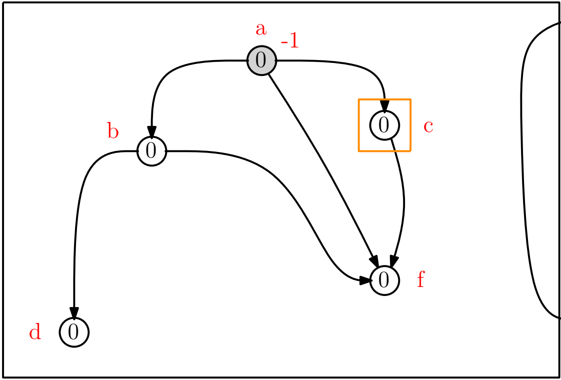
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

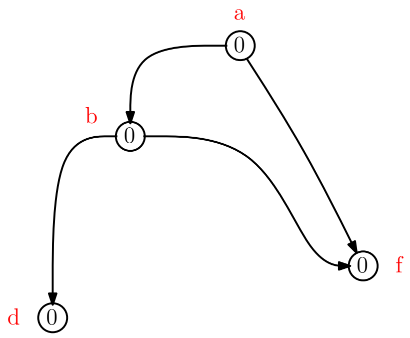
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

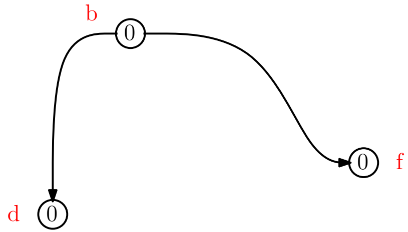
Choisir un de ces sommets
et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

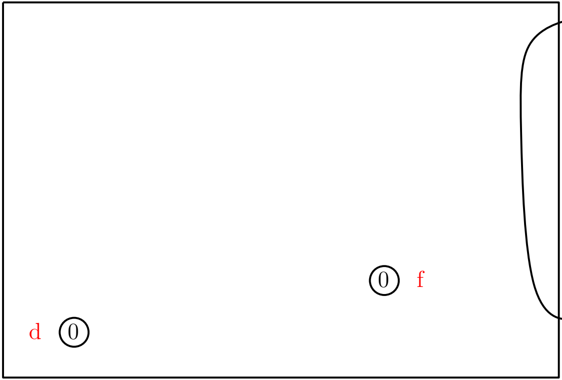
Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.



Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.

Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :
1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0.$

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets
et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.

Etape 1 :

Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$

2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d, f]$

Etude de $IS_0(\mathcal{G})$ dans le cas simple et acyclique.

Etape 1 :
Repérer les sommets z tels que :

1) $\theta_z = 0$
2) $\forall y \in V \mid (y, z) \in E, \theta_y \neq 0$.

Etape 2 :

Choisir un de ces sommets et l'ajouter à la liste.

Etape 3 :

Epluchage !

$L = [e, c, a, b, d, f]$ ⟵ Une telle suite est appelée un *épluchage de* G.

Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment. On définit les sections initiales de L comme étant les ensembles

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \ldots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

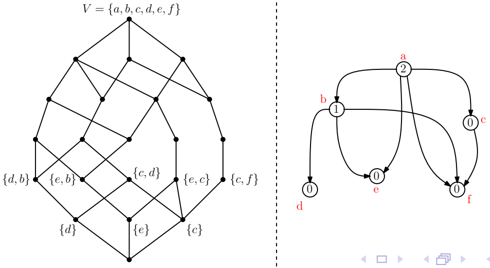
Section initiales d'un épluchage

Soit $L = [e, c, a, b, d, f]$ l'épluchage obtenu précédemment. On définit les sections initiales de L comme étant les ensembles

$$L_0 = \emptyset,\ L_1 = \{e\},\ L_2 = \{e, c\}, \dots,\ L_6 = \{e, c, a, b, d, f\}.$$

Proposition

Pour tout graphe valué $\mathcal{G} = (G, \theta)$ simple et acyclique, on a que $IS_0(\mathcal{G})$ est l'ensemble des sections initiales de tous les épluchage de $\mathcal{G}$ possibles, et $(IS_0(\mathcal{G}), \subseteq)$ est un semi-treillis inférieur gradué.



Fonction de Möbius sur $(IS_0(\mathcal{G}), \subseteq)$

Définition

Soit $A \in IS_0(\mathcal{G})$, on définit:

- $\mathcal{N}(A) = \{z \in A \mid \theta_z = 0\}$;
- $\mathcal{F}(A) = \{z \in A \mid A \setminus \{z\} \in IS_0(\mathcal{G})\}$.

Fonction de Möbius sur $(IS_0(\mathcal{G}), \subseteq)$

Définition

Soit $A \in IS_0(\mathcal{G})$, on définit:

- $\mathcal{N}(A) = \{z \in A \mid \theta_z = 0\}$;
- $\mathcal{F}(A) = \{z \in A \mid A \setminus \{z\} \in IS_0(\mathcal{G})\}$.

Théorème, V. 2014

On a les deux cas suivants:

- si $\mathcal{N}(A) = \mathcal{F}(A)$, alors $\mu(\emptyset, A) = (-1)^{|\mathcal{N}(A)|}$;
- sinon, $\mu(\emptyset, A) = 0$.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

- Tout $\omega \in W$ s'écrit comme un produit d'un nombre minimal d'éléments de S. Ce nombre minimal est noté $\ell(\omega)$ et est appelé la longueur de ω.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

- Tout $\omega \in W$ s'écrit comme un produit d'un nombre minimal d'éléments de S. Ce nombre minimal est noté $\ell(\omega)$ et est appelé la longueur de ω.
- On définit l'ordre faible $\leq_R$ sur W comme suit: $\omega \leq_R \tau$ si et seulement si il existe $s_1, \ldots, s_k$ dans S tel que $\tau = \omega s_1 \cdots s_k$ et $\ell(\omega) + k = \ell(\tau)$.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter

Un groupe de Coxeter W est un groupe qui a une présentation de la forme:

$$W =< S \mid s^2 = (st)^{m_{s,t}} = e >,$$

où S est un ensemble fixé de générateurs, et $m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour tout s et t dans S.

- Tout $\omega \in W$ s'écrit comme un produit d'un nombre minimal d'éléments de S. Ce nombre minimal est noté $\ell(\omega)$ et est appelé la <u>longueur</u> de ω.
- On définit <u>l'ordre faible</u> $\leq_R$ sur W comme suit: $\omega \leq_R \tau$ si et seulement si il existe $s_1, \ldots, s_k$ dans S tel que $\tau = \omega s_1 \cdots s_k$ et $\ell(\omega) + k = \ell(\tau)$.

Propriété classique

Le poset $(W, \leq_R)$ est un semi-treillis inférieur quand W est infini, un treillis complet quand W est fini, et sa fonction de Möbius prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

Le cas général

Théorème, V. 2014-2015

1. Pour tout groupe de Coxeter W, il existe un graphe valué $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.

Le cas général

Théorème, V. 2014-2015

1. Pour tout groupe de Coxeter W, il existe un graphe valué $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.
2. Dans les cas $W = A_n$, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ou $\widetilde{A_n}$ on a même que $(W, \leq_R)$ et $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$ sont isomorphes.

Le cas général

Théorème, V. 2014-2015

1. Pour tout groupe de Coxeter W, il existe un graphe valué $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.
2. Dans les cas $W = A_n$, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ou $\widetilde{A_n}$ on a même que $(W, \leq_R)$ et $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$ sont isomorphes.

- En général, il y a plusieurs graphes valués qui vérifient le point (1) pour chaque groupe de Coxeter.
- Le point (2) est vérifiée au cas par cas.

Le groupe symétrique

Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter, en prenant comme générateurs les transpositions élémentaires $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Le groupe symétrique

Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter, en prenant comme générateurs les transpositions élémentaires $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Définition/propriété

Soit $\sigma \in S_n$, on définit l'ensemble des inversions de σ comme étant:

$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(a, b) \mid 1 \leq a < b \leq n,\ \sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)\}.$$

On a que $\sigma \leq_R \omega$ si et seulement si $\mathrm{Inv}(\sigma) \subseteq \mathrm{Inv}(\omega)$.

Le groupe symétrique

Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter, en prenant comme générateurs les transpositions élémentaires $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Définition/propriété

Soit $\sigma \in S_n$, on définit l'ensemble des inversions de σ comme étant:

$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(a, b) \mid 1 \leq a < b \leq n,\ \sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)\}.$$

On a que $\sigma \leq_R \omega$ si et seulement si $\mathrm{Inv}(\sigma) \subseteq \mathrm{Inv}(\omega)$.

L'idée générale

Trouver une paire $\mathcal{G} = (G, \theta)$ telle que:

- les sommets de G soient indéxés par les couples d'entiers (a, b), $1 \leq a < b \leq n$;

Le groupe symétrique

Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter, en prenant comme générateurs les transpositions élémentaires $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Définition/propriété

Soit $\sigma \in S_n$, on définit l'ensemble des inversions de σ comme étant:

$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(a, b) \mid 1 \leq a < b \leq n,\ \sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)\}.$$

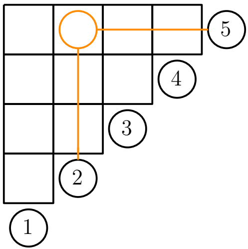
On a que $\sigma \leq_R \omega$ si et seulement si $\mathrm{Inv}(\sigma) \subseteq \mathrm{Inv}(\omega)$.

L'idée générale

Trouver une paire $\mathcal{G} = (G, \theta)$ telle que:

- les sommets de G soient indéxés par les couples d'entiers (a, b), $1 \leq a < b \leq n$;
- les éléments de $IS(\mathcal{G})$ sont exactement les ensembles de la forme $\mathrm{Inv}(\sigma)$, $\sigma \in S_n$.

Le groupe symétrique



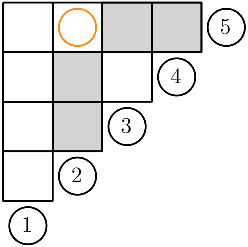
Cette case représente le couple $(2, 5)$

On représente l'ensemble

$$\{(a, b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$$

avec un tableau en escalier.

Le groupe symétrique



Equerre basée en $(2,5)$

On représente l'ensemble

$$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$$

avec un tableau en escalier.

On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le groupe symétrique

3	2	1	0	5
2	1	0	4	
1	0	3		
0	2			
1				

Valeurs de la valuation θ

On représente l'ensemble

$$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$$

avec un tableau en escalier.

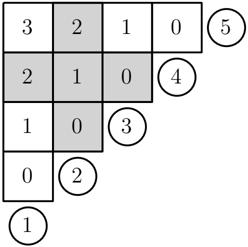
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:

$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$

avec un tableau en escalier.

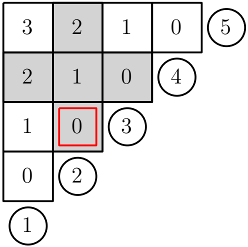
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:

$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$

avec un tableau en escalier.

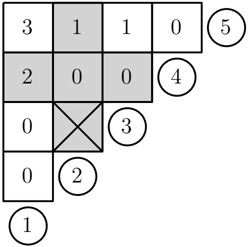
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:
$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$

avec un tableau en escalier.

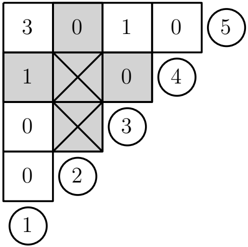
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:
$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$$

avec un tableau en escalier.

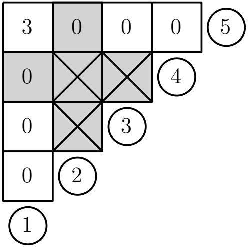
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:

$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$

avec un tableau en escalier.

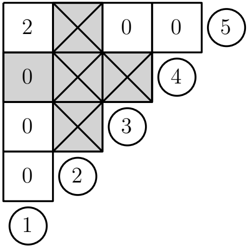
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:
$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble
$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$
avec un tableau en escalier.

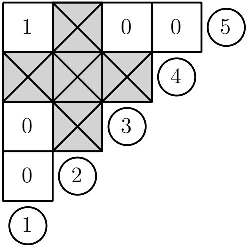
On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

Le groupe symétrique



On note $\mathcal{A} = (G, \theta)$ la paire obtenue.

On a alors $IS(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Inv}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$

Exemple:

$\mathrm{Inv}([4,1,3,5,2]) = \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$

On représente l'ensemble

$\{(a,b) \mid 1 \leq a < b \leq n\}$

avec un tableau en escalier.

On met une structure (implicite) de graphe orienté sur le diagramme.

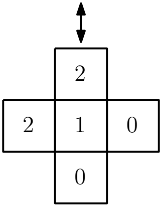
On dit qu'il y a un arc de c vers d ssi d est dans l'équerre basée en c et $c \neq d$.

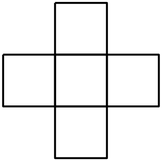
Le degré sortant de chaque case est un nombre pair.

On pose $\theta_c = \frac{d^o \text{ sortant de } c}{2}$.

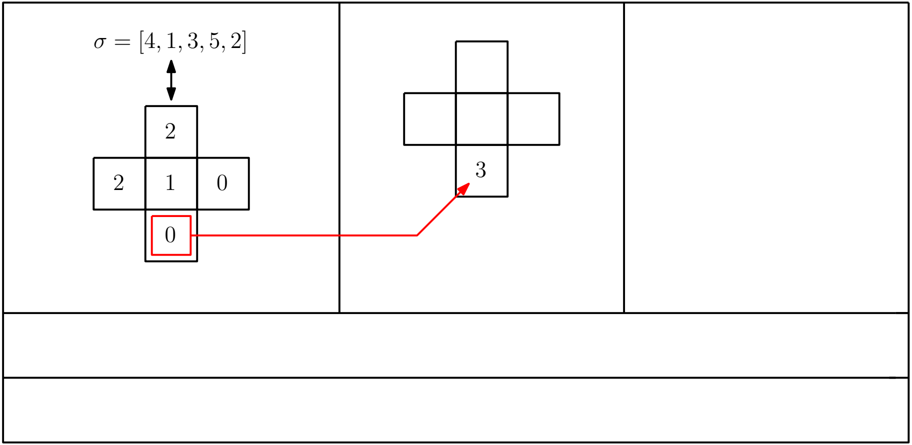
Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$



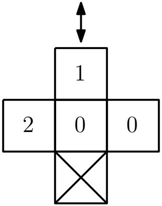


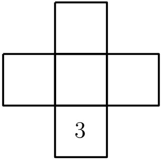
Une série formelle ?



Une série formelle ?

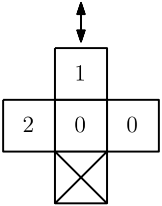
$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

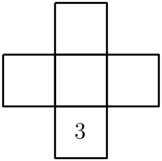




Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

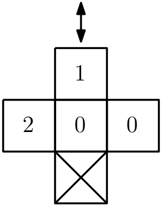


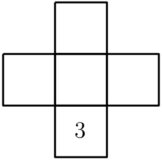


L’entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

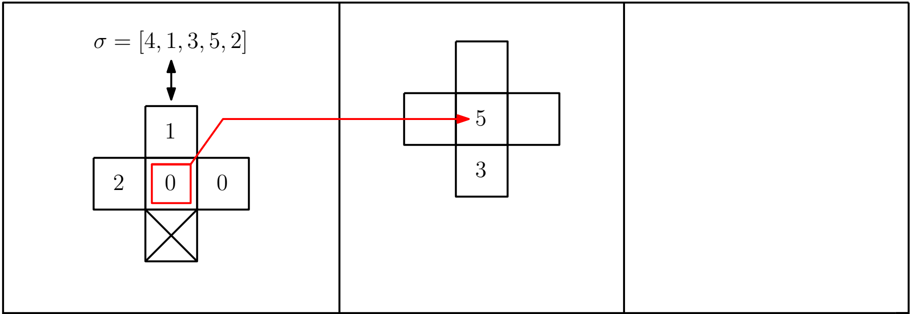




L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

Une série formelle ?

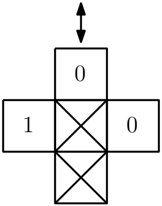


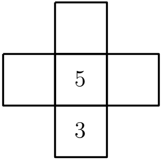
L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

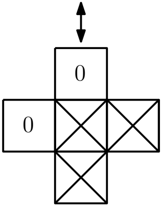
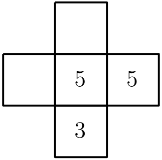




L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

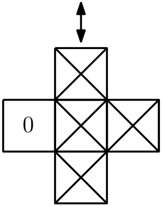
Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

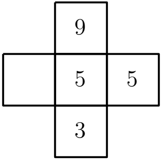
Une série formelle ?

<table>
<tr>
<td>$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.</td></tr>
</table>

Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$



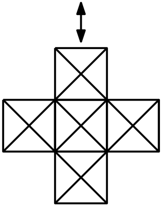


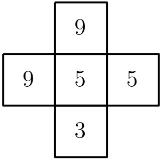
L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

Une série formelle ?

$\sigma = [4, 1, 3, 5, 2]$

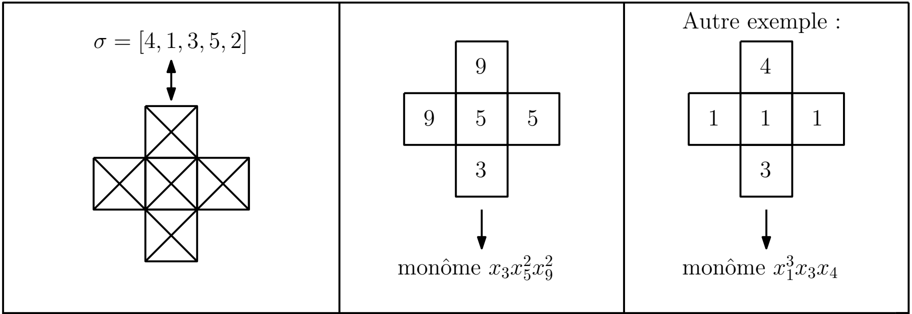




L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

Une série formelle ?



L'entier suivant doit être plus grand (au sens large) que le précédent.

Une entier donné apparait au plus une fois dans chaque colonne.

On peut faire la même chose et associer des tableaux au diagramme de n'importe quelle permutation.

Les fonctions symétriques de Stanley !

Définition

Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on définit

$$\mathrm{Red}(\sigma) = \{(i_1, \ldots, i_{\ell(\sigma)}) \mid \sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)}}\}.$$

Dans le but d'étudier $|\mathrm{Red}(\sigma)|$, Stanley a introduit la série formelle suivante (qui est symétrique, et ce n'est pas trivial à prouver !).

Définition

Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit:

$$F_\sigma(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{\ell(\sigma)}) \in \mathrm{Red}(\sigma)} \sum_{\substack{b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_{\ell(\sigma)} \text{ entiers} \\ b_j < b_{j+1} \textit{ si } i_j > i_{j+1}}} x_{b_1} x_{b_2} \cdots x_{b_{\ell(\sigma)}}.$$

Les fonctions symétriques de Stanley !

Définition

Soit $\sigma \in S_n$, on note $\mathrm{Tab}(\sigma)$ l'ensemble des tableaux que l'on obtient à partir du diagramme de σ en suivant la méthode précédente. On note x^T le mônôme associé à chaque $T \in \mathrm{Tab}(\sigma)$.

Théorème, V. 2014

Soit $\sigma \in S_n$ et F_σ la série de stanley associée. On a que :

$$F_\sigma(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{T \in \mathrm{Tab}(\sigma)} x^T.$$

Les fonctions symétriques de Stanley !

Définition

Soit $\sigma \in S_n$, on note $\mathrm{Tab}(\sigma)$ l'ensemble des tableaux que l'on obtient à partir du diagramme de σ en suivant la méthode précédente. On note x^T le mônôme associé à chaque $T \in \mathrm{Tab}(\sigma)$.

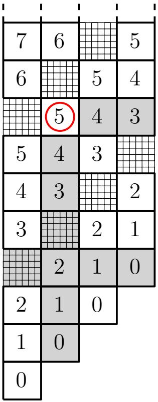
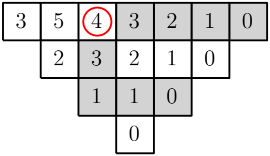
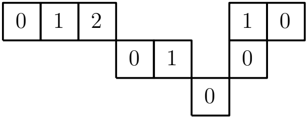
Théorème, V. 2014

Soit $\sigma \in S_n$ et F_σ la série de stanley associée. On a que :

$$F_\sigma(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{T \in \mathrm{Tab}(\sigma)} x^T.$$

Les éléments de $Tab(\sigma)$ sont en fait équivalents aux "balanced labellings" du diagramme de Rothe de σ, introduit par Fomin, Greene, Reiner, et Shimozono, justement pour étudier ces séries.

Quelques autres exemples

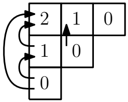
		
$(\widetilde{A}_4, \leq_R)$	$(B_4, \leq_R)$	“Flag weak order” sur $G(2,3)$.

Et aussi l’ordre faible sur les groupes dihédraux, le treillis des idéaux sup/inf, etc...

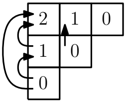
Oublions l'acyclicité...

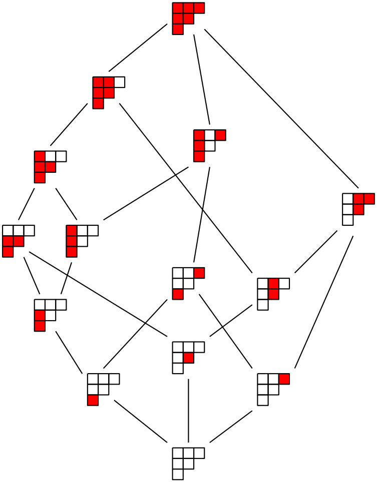
2	1	0
1	0	
0		

Oublions l'acyclicité...

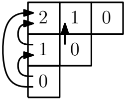


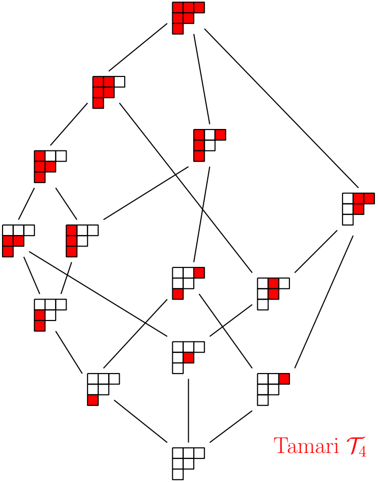
Oublions l'acyclicité...





Oublions l'acyclicité...





Et ce résultat est vrai pour tout n : on retrouve à chaque fois le treillis de Tamari correspondant.

Des extensions de l'ordre faible en treillis complet

Dans cet exposé, on s'est restreint à l'étude de $IS_0(\mathcal{G})$, mais il y a aussi $IS(\mathcal{G})$...

Des extensions de l'ordre faible en treillis complet

Dans cet exposé, on s'est restreint à l'étude de $IS_0(\mathcal{G})$, mais il y a aussi $IS(\mathcal{G})$...

- Rappel : pour tout groupe de Coxeter, il existe $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous-poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.

Des extensions de l'ordre faible en treillis complet

Dans cet exposé, on s'est restreint à l'étude de $IS_0(\mathcal{G})$, mais il y a aussi $IS(\mathcal{G})$...

- Rappel : pour tout groupe de Coxeter, il existe $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous-poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.
- Donc $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS(\mathcal{G}_W), \subseteq)$ qui est un treillis complet.

Des extensions de l'ordre faible en treillis complet

Dans cet exposé, on s'est restreint à l'étude de $IS_0(\mathcal{G})$, mais il y a aussi $IS(\mathcal{G})$...

- Rappel : pour tout groupe de Coxeter, il existe $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous-poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.
- Donc $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS(\mathcal{G}_W), \subseteq)$ qui est un treillis complet.

Il y a une forte connection entre cette extension de l'ordre faible et certaines conjectures de Matthew Dyer à propos des <u>ordres de réflexions</u> et des <u>ensembles bi-clos</u> de systèmes de racines... Et j'en parlerai le 14 octobre, ici même.

Des extensions de l'ordre faible en treillis complet

Dans cet exposé, on s'est restreint à l'étude de $IS_0(\mathcal{G})$, mais il y a aussi $IS(\mathcal{G})$...

- Rappel : pour tout groupe de Coxeter, il existe $\mathcal{G}_W$ tel que $(W, \leq_R)$ est un sous-poset de $(IS_0(\mathcal{G}_W), \subseteq)$.
- Donc $(W, \leq_R)$ est un sous poset de $(IS(\mathcal{G}_W), \subseteq)$ qui est un treillis complet.

Il y a une forte connection entre cette extension de l'ordre faible et certaines conjectures de Matthew Dyer à propos des ordres de réflexions et des ensembles bi-clos de systèmes de racines... Et j'en parlerai le 14 octobre, ici même.

Merci pour votre attention !