

Monoïde de type plaxique et algèbre de Hopf

Séminaire du LIX

Jean-Baptiste Priez

Laboratoire de Recherche en Informatique
Faculté des sciences d'Orsay
Université Paris-Sud



Mercredi 17 Septembre 2014

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Idée générale

Monoïde de type plaxique \rightarrow Algèbre de Hopf : [P., 13]

Relations :

- Plaxique
- Sylvestre
- Stalactique
- Baxter
- ...

Associativité



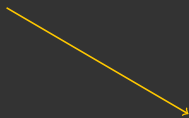
Monoïde

Algèbre

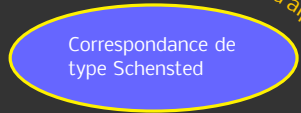
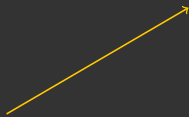


quotient de
FQSym,
WQSym ou
PQSym

alg. de Hopf



Coalgèbre

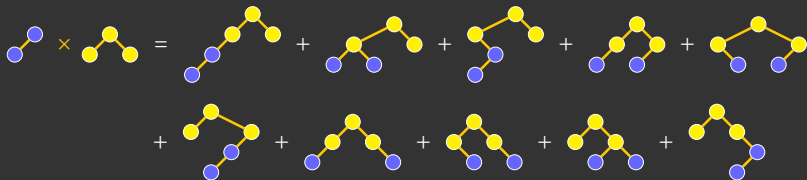


Correspondance de
type Schensted

Algèbre de Hopf

Algèbre de Hopf combinatoire (AHC) :

- Espace vectoriel \mathcal{H}
- avec une *base* indexée par un *ensemble gradué connexe*
- \times : le produit *assemble* les éléments



- Δ : le coproduit *désassemble* les éléments

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots$$

Améliorer l'expressivité des séries formelles

Remplacer la notion de taille par l'objet :

$$S_e = \sum_{n \geq 0} \frac{o^n}{n!} = 1 + o + \frac{1}{2!} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \right) \\ + \frac{1}{3!} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \right) \\ + \frac{1}{4!} \left(\dots + 6 \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + 8 \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} + 3 \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} \dots \right) + \dots$$

Plus d'informations : Coefficients de l'arbre T ?

→ Nombre de permutations donnant T par insertion dans un arbre binaire de recherche

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Manipulation d'algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale : [HNT 05, NT 06 ; Hivert-P. 14]

- Application $\varphi : \mathfrak{A}^* \rightarrow \mathcal{C}$

$$\mathcal{H}_\varphi(\mathfrak{A}) := \mathbb{K}\langle m_\sigma(\mathfrak{A}) \mid \sigma \in \mathcal{C} \rangle \subset \mathbb{K}\langle \mathfrak{A} \rangle,$$

où $m_\sigma(\mathfrak{A}) = \sum_{\varphi(u)=\sigma} u$,

- produit : *concaténation*,

$$\begin{aligned} m_\sigma \times m_\mu &\simeq m_\sigma(\mathfrak{A}) \cdot m_\mu(\mathfrak{A}) = \left(\sum_{\varphi(u)=\sigma} u \right) \cdot \left(\sum_{\varphi(v)=\mu} v \right) = \sum_{\substack{\varphi(u)=\sigma \\ \varphi(v)=\mu}} u \cdot v \\ &= \sum_{\substack{\exists uv \in \varphi^{-1}(\tau) \\ \varphi(u)=\sigma \\ \varphi(v)=\mu}} m_\tau(\mathfrak{A}) \simeq \sum_{\tau} m_\tau \end{aligned}$$

- coproduit : “*dédoublément d’alphabet*”

▸ $\mathcal{H}(\mathfrak{A}) \simeq \mathcal{H}(\mathfrak{B}) \simeq \mathcal{H}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) \simeq \dots$

$$\begin{aligned}
 \Delta(m_\sigma) &\simeq \delta_{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}}(m_\sigma(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})) = \sum_{\varphi(W)=\sigma} \delta_{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}}(W) \\
 &= \sum_{\varphi(W)=\sigma} W|_{\mathfrak{A}} \otimes W|_{\mathfrak{B}} \\
 &\simeq \sum_{\tau, \mu} m_\tau \otimes m_\mu
 \end{aligned}$$

Applications partitionnantes

Soit $w := 5753388783888$ un mot sur $\mathbb{N}_{>0}$.

Standardisation :

Construit l'*unique* $\sigma \in \mathfrak{S}$ ayant même *longueur* et même *ensemble d'inversions* $((i, j) \in \text{Inv}(w) \text{ ssi } i < j \text{ et } w_i > w_j)$.

$$\text{std}(w) = 46512897(10)3(11)(12)(13)$$

Tassement : [DHT, o2]

Construit l'*unique* $u \in \mathbf{PW}$ ayant même *longueur* k et ayant même *ensemble d'inversions* et *demi-inversions* $((i, j) \in 1/2\text{Inv}(w) \text{ ssi } i < j \text{ et } w_i = w_j)$.

$$\text{pack}(w) = 2321144341444$$

Réalisation polynomiale de FQSym

Soit $\sigma := 1423$ une permutation.

Soit $\mathbb{N}_{>0}$ l'alphabet des entiers strictement positif.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\sigma(\mathbb{N}_{>0}) &= \sum_{\substack{w \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ \text{std}(w) = \sigma}} w = \sum_{\substack{adbc \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ a \leq b \leq c < d}} adbc \\ &= 1211 + 1312 + 1322 + 1411 + \dots + 2322 + \dots + 4967 + \dots \end{aligned}$$

- Si $\sigma := 123 \dots = Id_n$ l'identité de taille n ,

$$\mathbf{G}_\sigma(\mathbb{N}_{>0}) = \sum_{u_1 \leq \dots \leq u_n} u_1 \dots u_n$$

- Si $\sigma := n(n-1) \dots 1$ le $\max(\mathfrak{S}_n)$,

$$\mathbf{G}_\sigma(\mathbb{N}_{>0}) = \sum_{u_1 > \dots > u_n} u_1 \dots u_n$$

Réalisation polynomiale de FQSym (2)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{132} \times \mathbf{G}_{12} &\simeq \mathbf{G}_{132}(\mathbb{N}_{>0}) \cdot \mathbf{G}_{12}(\mathbb{N}_{>0}) \\
 &= \sum_{\substack{acb \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ a \leq b < c \\ de \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ d \leq e}} acb \cdot de = \sum_{\substack{acbde \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ a \leq b < c \leq d \leq e}} acbde + \sum_{\substack{acbde \in \mathbb{N}_{>0}^* \\ a \leq b \leq d < c \leq e}} acbde + \dots \\
 &\simeq \mathbf{G}_{13245} + \mathbf{G}_{14235} + \mathbf{G}_{14325} + \mathbf{G}_{15234} + \mathbf{G}_{15324} + \mathbf{G}_{15423} + \\
 &\quad \mathbf{G}_{24315} + \mathbf{G}_{25314} + \mathbf{G}_{25413} + \mathbf{G}_{35412}
 \end{aligned}$$

Soit $\mathbb{N}_{>0} \oplus \mathbb{N}_{>0}$ un alphabet tel que $n < m$:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{G}_{1432}) &\simeq \delta_{\rightleftharpoons}(\mathbf{G}_{1432}(\mathbb{N}_{>0} \oplus \mathbb{N}_{>0})) = \sum_{a \leq b < c < d} \delta_{\rightleftharpoons}(adcb) \\
 &= \sum_{a \leq b < c < d} adcb \otimes \epsilon + \sum_{a \leq b < c < d} acb \otimes d + \sum_{a \leq b < c < d} ab \otimes dc + \dots \\
 &\simeq \mathbf{G}_{1432} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{G}_{132} \otimes \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{12} \otimes \mathbf{G}_{21} + \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_{321} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{G}_{1432}
 \end{aligned}$$

Résumé

$\varphi : \mathfrak{A}^* \rightarrow \mathcal{C}$ une application partitionnante

$$\mathcal{H}_\varphi(\mathfrak{A}) := \mathbb{K}\langle m_\sigma(\mathfrak{A}) \mid \sigma \in \mathcal{C} \rangle$$

Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_\varphi(\mathfrak{A})$:

- produit = *concaténation*
- coproduit = *dédoublément d'alphabet*

Exemples :

- FQSym,
- WQSym,
- PQSym,
- ...

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Monoïdes plaxique ?

[Poirier-Reutenauer (95), Duchamp-Hivert-Thibon (02)]

Relations Plaxiques :

$$u \cdot acb \cdot v \equiv_p u \cdot cab \cdot v \quad \text{avec } a \leq b < c$$

$$u \cdot bac \cdot v \equiv_p u \cdot bca \cdot v \quad \text{avec } a < b \leq c$$

L'*algorithme de Schensted* calcule les *classes plaxiques*.

$$(11, 8, 10, 12, 2, 5, 9, 1, 3, 4, 6, 7) \rightarrow$$

11					
8	10	12			
2	5	9			
1	3	4	6	7	

Réalisation de *FSym* : l'*algèbre de Hopf des tableaux*, quotient de *FQSym* par les *relations plaxiques*

Congruence et φ -congruence

Soient u, v, w et x des mots.

Congruence :

Une *relation d'équivalence* \equiv est une *congruence* si

$$u \equiv v \text{ et } w \equiv x \text{ alors } u \cdot w \equiv v \cdot w.$$

φ -congruence :

Une *congruence* est une *φ -congruence* si

$$u \equiv v \text{ si et seulement si } \begin{cases} \varphi(u) \equiv \varphi(v) \\ \text{ev}(u) = \text{ev}(v) \end{cases}$$

où $\text{ev}(w)$ compte les occurrences de chaque lettre.

Remarque : \mathcal{G} , **PW** et **PF** peuvent être identifier à des mots

Rappel : φ est *std*, *pack* ou *park*

Exemple : φ -congruence

$$2725 \equiv_p 2275, \quad 328 \equiv_p 382$$

$\Downarrow \cdot$

$$2725 \cdot 328 \equiv_p 2275 \cdot 382$$

$\Downarrow \text{std}$

$$1423 \equiv_p 1243, \quad 213 \equiv_p 231,$$

$$1625437 \equiv_p 1265473$$

Restriction aux intervalles d'alphabet

[Lascoux-Schützenberger, 81]

Une *congruence* est compatible à la *restriction aux intervalles d'alphabet* si pour tout intervalle $I \subset \mathfrak{A}$,

$$\text{si } u \equiv v \text{ alors } u_I \equiv v_I$$

où w_I est la restriction de w à I .

Restriction aux intervalles d'alphabet

Exemple : Restriction aux intervalles

$$2725328 \equiv_p 7522382$$

$$\text{Restreint à } [3,7]: \quad 753 \equiv_p 753$$

$$\text{Restreint à } [2,5]: \quad 22532 \equiv_p 52232$$

$$: \text{ Restreint à } [14, \infty] \quad \varepsilon \equiv_p \varepsilon$$

⋮

Congruence de type Plaxique

Une *congruence* \equiv est φ -congruence de type plaxique si

- \equiv est φ -congruence, et,
- \equiv est compatible à la restriction aux intervalles d'alphabet

Theorem ([P., 13])

Soit $\mathcal{H}_\varphi(\mathfrak{A})$ une algèbre de Hopf combinatoire définie par réalisation polynomiale.

Le quotient $\mathcal{H}_\varphi(\mathfrak{A}) / \equiv$ (avec \equiv une φ -congruence de type plaxique) est un quotient de Hopf (de base indexée par \mathcal{C} / \equiv).

Operations sur les congruences de type plaxique

Soient \sim et \approx deux φ -congruence de type plaxique.

L'*union* $\sim \vee \approx$: la *plus petite congruence* contenant les deux.

L'*intersection* $\sim \wedge \approx$: la congruence \equiv tel que $u \equiv v$ si $u \sim v$ and $u \approx v$.

Theorem ([P., 13])

L'*union* et l'*intersection* de deux φ -congruences de type plaxique sont des φ -congruences de type plaxique.

Corollary

Structure de treillis sur ces *algèbres de Hopf*.

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Congruence Sylvestre

Congruence Stalactique

Opérations

Treillis

Perspectives

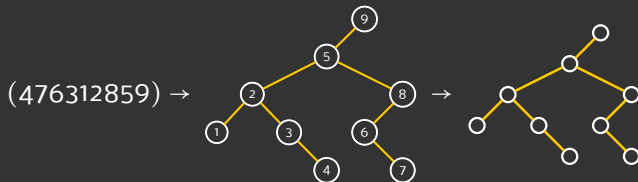
Cambrien

Congruence Sylvestre [HNT 05]

Relation :

$$U \cdot ac \cdot W \cdot b \cdot V \equiv_{\text{sylv}} U \cdot ca \cdot W \cdot b \cdot V \quad \text{avec } a \leq b < c$$

Algorithme de type Schensted : insertion dans un arbre binaire de recherche (ABR)



Serie : Catalan

Réalise l'*algèbre de Hopf de Loday-Ronco (PBT)*

Congruence Stalactique [HNT 06]

Relation :

$$u \cdot ba \cdot w \cdot b \cdot v \equiv_{stal} u \cdot ab \cdot w \cdot b \cdot v$$

Algorithme de type Schensted : insertion stalactique

Idée : dernière occurrence + multiplicité

$$(51543151145312455) \rightarrow$$

3	1	2	4	5
3	1		4	5
	1		4	5
				5
				5
				5

$$D_n := \sum_{k=1}^n k! \binom{n-1}{k-1} \quad (k = \# \text{ lettres distinctes}).$$

$$\underline{\text{Série}} : St(z) = \sum_{n \geq 0} D_n z^n = 1 + z + 3z^2 + 11z^3 + 49z^4 + 261z^5 + 1631z^6 + \dots$$

Réalise l'algèbre de Hopf Stalactique ($WQSym / \equiv_{stal}$)

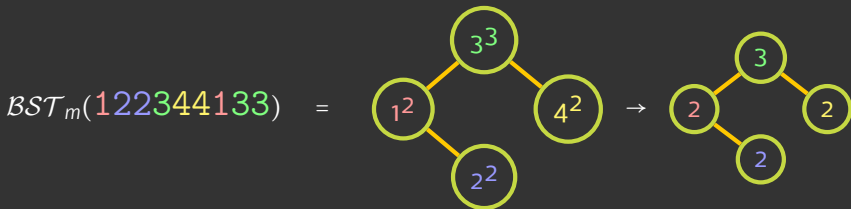
Sylvester union Stalactic [P., 13]

Relations :

$$u \cdot ac \cdot w \cdot b \cdot v \equiv_{\text{sylv}} u \cdot ca \cdot w \cdot b \cdot v \quad \text{avec } a \leq b < c$$

$$u \cdot ba \cdot w \cdot b \cdot v \equiv_{\text{stal}} u \cdot ab \cdot w \cdot b \cdot v$$

Algorithme de type Schensted : $BST_m :=$ analogue insertion dans ABR



Autres résultats :

- *Formule des équerres* (preuve par série génératrice)
- *Série* : $S(t) = \frac{1-t-\sqrt{5t^2-6t+1}}{2t} = 1 + t + 3t^2 + 10t^3 + 36t^4 + 137t^5 + \dots$

Sylvester union Stalactic [P., 13]

Re

$$\begin{array}{c} \circ 2 \end{array} \times \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 1 \quad \circ 2 \end{array} = \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 3 \quad \circ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 1 \quad \circ 4 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 7 \\ \circ 1 \quad \circ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 1 \quad \circ 2 \\ \circ 2 \end{array}$$

Al

AB

$$+ \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 1 \quad \circ 2 \\ \circ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 1 \quad \circ 2 \\ \circ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 5 \\ \circ 2 \quad \circ 1 \\ \circ 2 \end{array}$$

At

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 1 \quad \circ 4 \\ \circ 1 \end{array} \right) = 1 \otimes \begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 1 \quad \circ 4 \\ \circ 1 \end{array} + 1 \otimes \begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 4 \\ \circ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 1 \end{array} \otimes \begin{array}{c} \circ 4 \\ \circ 1 \end{array} \\
 + \begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 1 \quad \circ 1 \end{array} \otimes \circ 4 + \begin{array}{c} \circ 2 \\ \circ 1 \quad \circ 4 \\ \circ 1 \end{array} \otimes 1$$

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

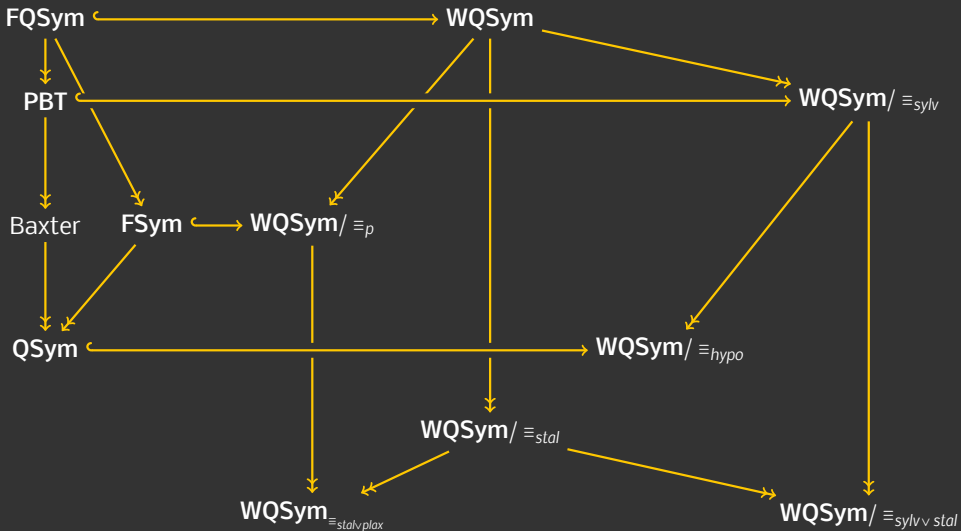
Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Treillis d'algèbres de Hopf



Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Perspectives

- Agrandir le treillis
 - *Stalactique* ∨ *Plaxique* ?

$$SG(t) = 1 + t + 3t^2 + 8t^4 + 23t^5 + 67t^6 + \dots$$

Conjecture

Les congruences de N. Reading sont des congruences de type plaxique.

- Liens avec les algèbres dendriformes

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Cambrien

Relations :

$$u \cdot ac \cdot w \cdot b \cdot v \equiv u \cdot ca \cdot w \cdot b \cdot v \quad \text{avec } a \leq b < c \text{ et } \text{sign}(b) = -$$

$$u \cdot b \cdot w \cdot ac \cdot v \equiv u \cdot b \cdot w \cdot ca \cdot v \quad \text{avec } a < b \leq c \text{ et } \text{sign}(b) = +$$

Série génératrice :

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} C_n (2t)^n = 1 + 2t^2 + 8t^3 + 40t^4 + 224t^5 + 1344t^6 + 8448t^7 + \dots$$

Demi-Cambrien/Sylvestre signé? :

$$u \cdot ac \cdot w \cdot b \cdot v \equiv u \cdot ca \cdot w \cdot b \cdot v \quad \text{avec } a \leq b < c \text{ et } \text{sign}(b) = -$$

Série? :

$$g(t) = 1 + 2t + 8t^2 + 44t^3 + 296t^4 + 2312t^5 + 20384t^6 + 199376t^7 + \dots$$

Algèbre de Hopf

Réalisation polynomiale

Congruence de type plaxique

Exemples de congruence de type plaxique et opérations

Treillis

Perspectives

Cambrien

Hook length formula : BTm

Formula :

$$h_l(T) = |T| \left(\prod_{t \in T} |T| \times (e(t) - 1)! \right)^{-1}$$

Generating series proof :

$$x = a + \sum_{k \geq 1} B_k(x, x)$$

with $B_k(x, y)$ a bilinear map and its valuation is strictly greater than $ev(x) + ev(y)$.

Dendriform results

Lemma

The \equiv carries the *dendriform structure* of the *convolution product*.

Let \equiv a *plactic-like congruence*.

Lemma

If for any u, v such that $u \equiv v$ we have $last(u) = last(v)$ then the congruence carries the *codendriform structure* of Δ .

Work in progress : “Theorem”

If \equiv respects the previous Lemma then \mathcal{H}/\equiv must be *autodual*...