# Sur les revêtements ramifiés de la sphère.

J. Tomasini

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques

20/11/2013

# Revêtement

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ continue

# Revêtement

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ continue
$f$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2$ de degré $d > 1$ si :

# Revêtement

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ continue

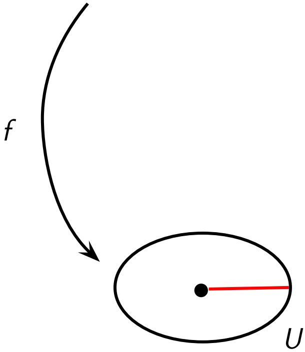
$f$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2$ de degré $d > 1$ si :

- $f$ est surjective

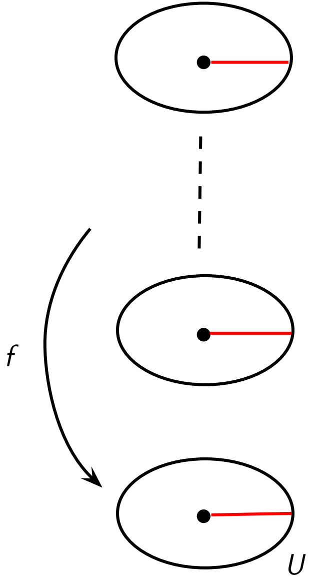
$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ continue
$f$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2$ de degré $d > 1$ si :

- $f$ est surjective
- $\forall x \in \mathbb{S}^2$, $\exists U \ni x$ tel que l'image réciproque de $U$ par $f$ est une union disjointe de $d$ ouverts de $\mathbb{S}^2$, chacun homéomorphe à $U$.

# Revêtement



# Revêtement



# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1, \cdots, x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$

# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1, \cdots, x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$
- $\forall i$, $\exists \{c_{i,1}, \cdots, c_{i,k_i}\} = f^{-1}(x_i) \subset \mathbb{S}^2$ et $d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1,\cdots,x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$
- $\forall i$, $\exists \{c_{i,1}, \cdots, c_{i,k_i}\} = f^{-1}(x_i) \subset \mathbb{S}^2$ et $d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que
    - $d_{i,j} > 1$ pour un $j$

# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1,\cdots,x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$
- $\forall i$, $\exists \{c_{i,1}, \cdots, c_{i,k_i}\} = f^{-1}(x_i) \subset \mathbb{S}^2$ et $d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que
  - $d_{i,j} > 1$ pour un $j$
  - $\sum_j d_{i,j} = d$

# Revêtement ramifié

$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1,\cdots,x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$
- $\forall i$, $\exists \{c_{i,1}, \cdots, c_{i,k_i}\} = f^{-1}(x_i) \subset \mathbb{S}^2$ et $d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que
  - $d_{i,j} > 1$ pour un $j$
  - $\sum_j d_{i,j} = d$
  - $\forall j$, $\exists U_{i,j} \subset \mathbb{S}^2$ voisinage de $c_{i,j}$ tel que $f \sim (z \mapsto z^{d_{i,j}})$.

# Revêtement ramifié

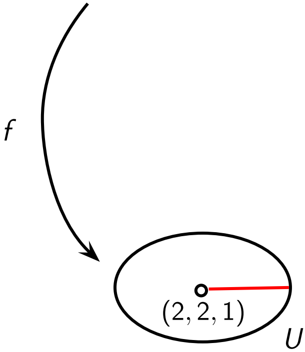
$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est un revêtement ramifié de degré $d$ s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{S}^2$ tels que :

- $f_{|\mathbb{S}^2 \setminus f^{-1}(\{x_1, \cdots, x_n\})}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ de degré $d$
- $\forall i$, $\exists \{c_{i,1}, \cdots, c_{i,k_i}\} = f^{-1}(x_i) \subset \mathbb{S}^2$ et $d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que
    - $d_{i,j} > 1$ pour un $j$
    - $\sum_j d_{i,j} = d$
    - $\forall j$, $\exists U_{i,j} \subset \mathbb{S}^2$ voisinage de $c_{i,j}$ tel que $f \sim (z \mapsto z^{d_{i,j}})$.

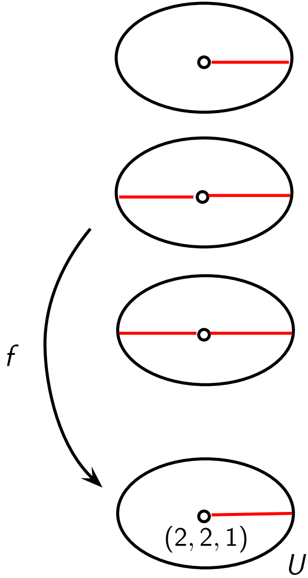
**Définition :**

1. $[d_{i,1}, \cdots, d_{i,k_i}]$ définit le **type** de $x_i$.
2. $\mathcal{D} = [[d_{1,1}, \cdots, d_{1,k_1}], \cdots, [d_{n,1}, \cdots, d_{n,k_n}]]$ définit le **passeport** de $f$.

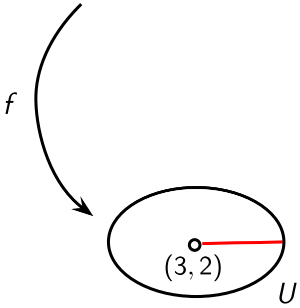
# Revêtement ramifié



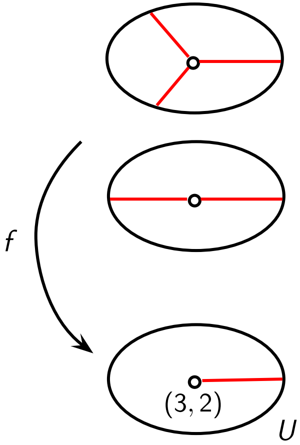
# Revêtement ramifié



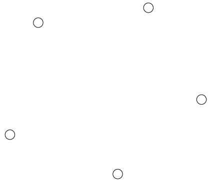
# Revêtement ramifié



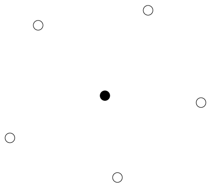
# Revêtement ramifié



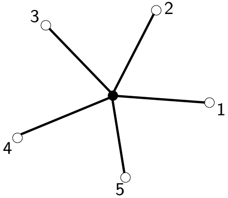
# Carte équilibrée



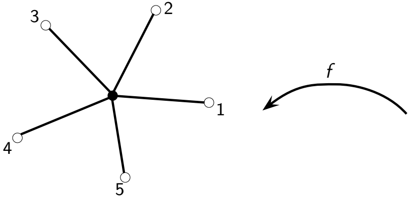
# Carte équilibrée



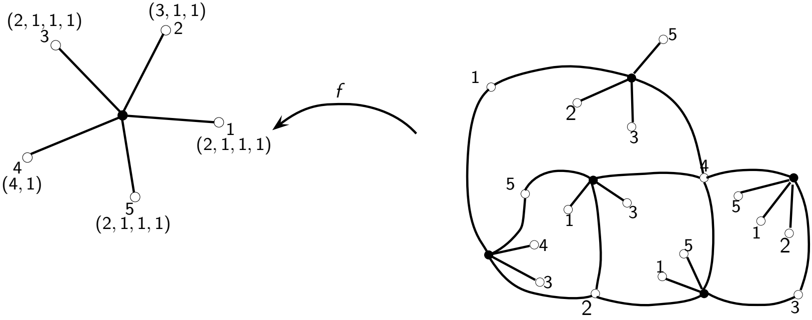
# Carte équilibrée



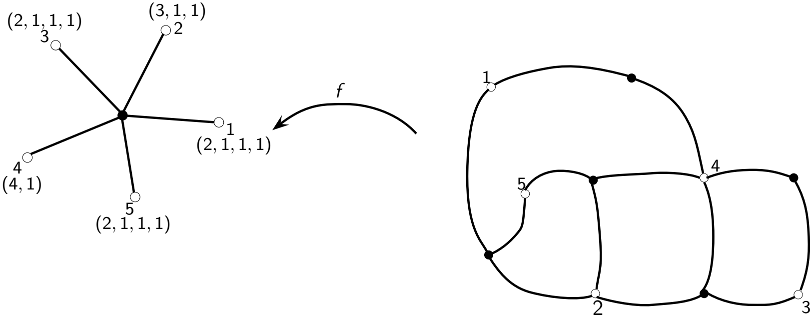
# Carte équilibrée



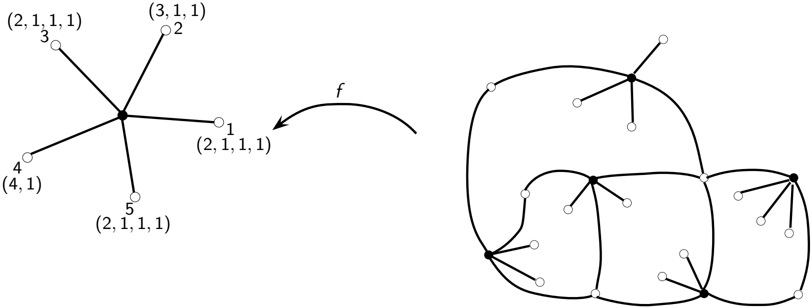
# Carte équilibrée



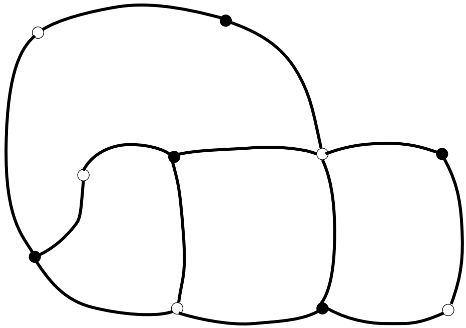
# Carte équilibrée



# Carte équilibrée



# Carte équilibrée



# Carte équilibrée

## Définition

Soit $G$ une carte bipartie. On dit que $G$ est une carte équilibrée (ou simplement que $G$ est équilibrée) si :

- $G$ a autant de sommets noirs que de faces.
- Pour toutes sous-carte convexe $H$ de $G$, le nombre de sommets noirs de $H$ (noté $S_H$) est plus grand ou égal aux nombre de faces de $H$ (noté $F_H$).

# Carte équilibrée

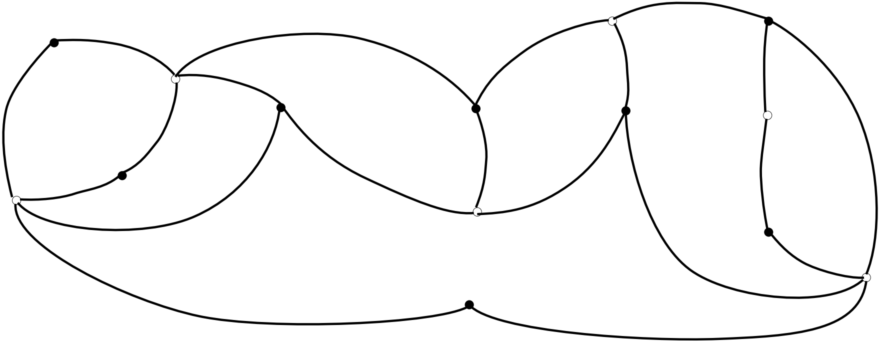
**Définition**

Soit $G$ une carte bipartie. On dit que $G$ est une carte équilibrée (ou simplement que $G$ est équilibrée) si :

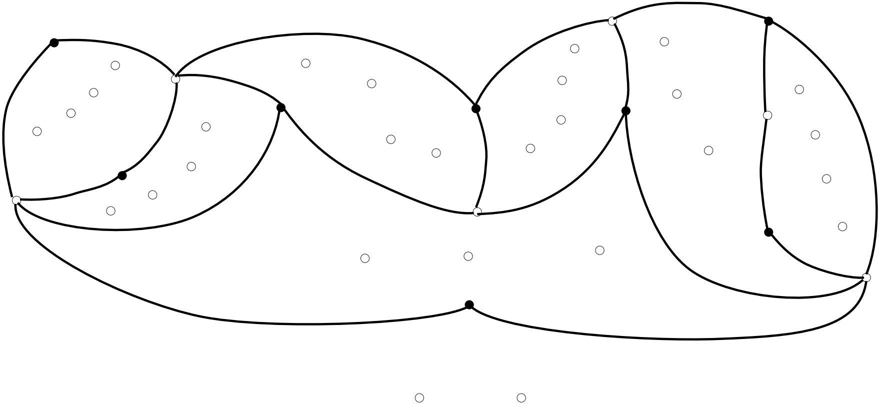
- $G$ a autant de sommets noirs que de faces.
- Pour toutes sous-carte convexe $H$ de $G$, le nombre de sommets noirs de $H$ (noté $S_H$) est plus grand ou égal aux nombre de faces de $H$ (noté $F_H$).

**Théorème**

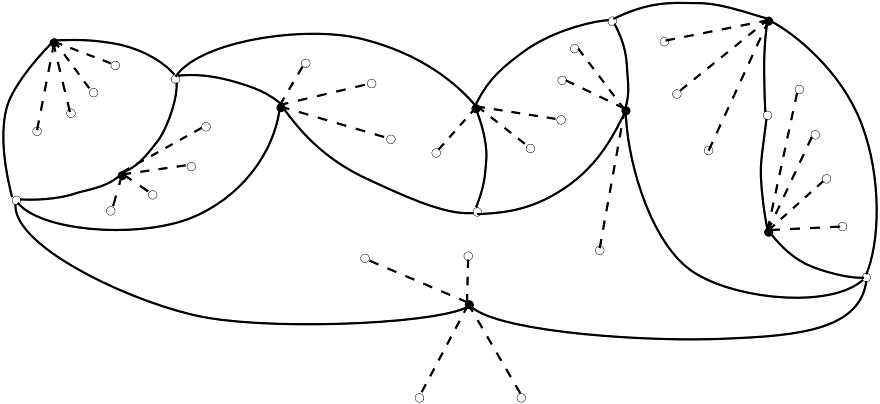
Soit $G$ une carte bipartie, $G$ est issue d'un revêtement ramifié si et seulement si $G$ est équilibrée.



# Idée de preuve



# Idée de preuve



# Lemme du mariage

Soit $S$ une famille (finie) d'ensembles finis $\{A_1, A_2, \cdots\}$.

## Définition

- $S$ admet un système de représentants distincts s'il existe des éléments distincts $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tels que $x_i \in A_i$.

# Lemme du mariage

Soit $S$ une famille (finie) d'ensembles finis $\{A_1, A_2, \cdots\}$.

**Définition**

- $S$ admet un système de représentants distincts s'il existe des éléments distincts $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tels que $x_i \in A_i$.
- $S$ satisfait la condition de mariage si l'union de $k$ ensembles de $S$ contient au moins $k$ éléments, pour tout $k$.

# Lemme du mariage

Soit $S$ une famille (finie) d'ensembles finis $\{A_1, A_2, \cdots\}$.

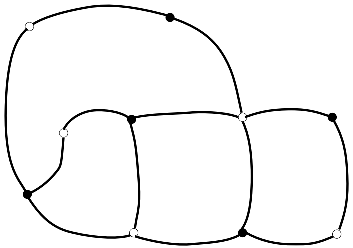
**Définition**

- $S$ admet un système de représentants distincts s'il existe des éléments distincts $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tels que $x_i \in A_i$.
- $S$ satisfait la condition de mariage si l'union de $k$ ensembles de $S$ contient au moins $k$ éléments, pour tout $k$.

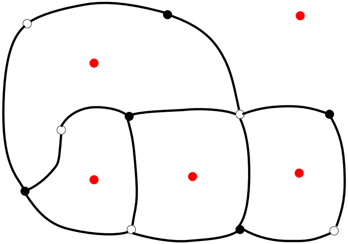
**Théorème**

$S$ admet un système de représentants distincts ssi $S$ satisfait la condition de mariage.

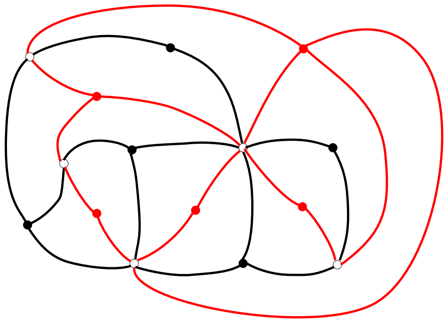
# Carte duale



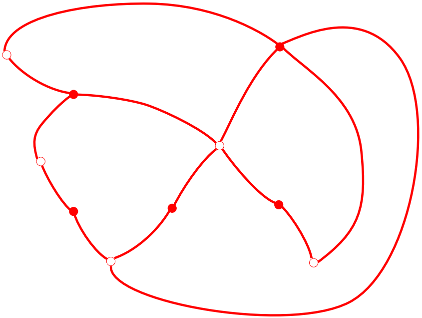
# Carte duale



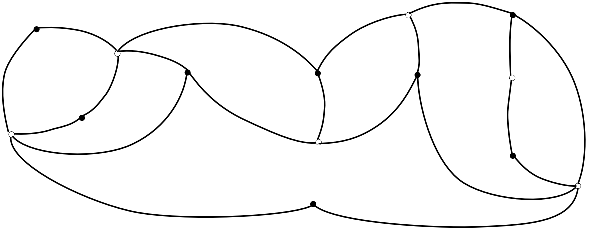
# Carte duale



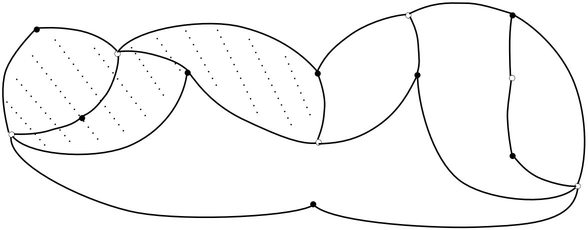
# Carte duale



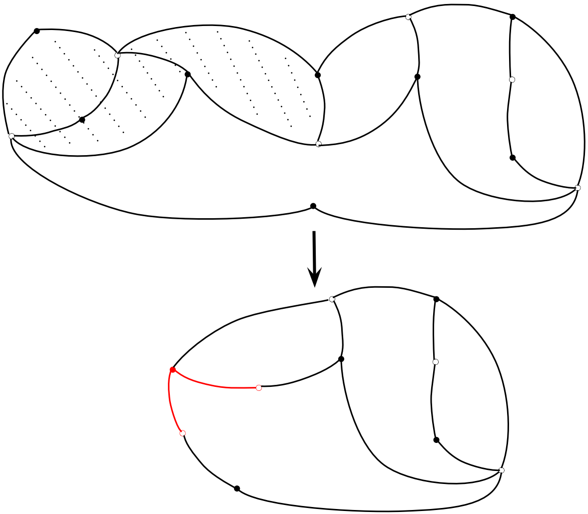
# Quotient



# Quotient



# Quotient



# Quotient

**Remarque :**

**Remarque :**

- En général, le quotient $G/H$ de $G$ par $H$ n'est pas une sous-carte de $G$.

# Quotient

**Remarque :**

- En général, le quotient $G/H$ de $G$ par $H$ n'est pas une sous-carte de $G$.
- $(G/H)'$ est une sous-carte de $G'$. De plus $G'/(G/H)' = H'$.

# Quotient

**Remarque :**

- En général, le quotient $G/H$ de $G$ par $H$ n'est pas une sous-carte de $G$.
- $(G/H)'$ est une sous-carte de $G'$. De plus $G'/(G/H)' = H'$.
- $F_{G/H} = F_G - F_H + 1$.

# Quotient

**Remarque :**

- En général, le quotient $G/H$ de $G$ par $H$ n'est pas une sous-carte de $G$.
- $(G/H)'$ est une sous-carte de $G'$. De plus $G'/(G/H)' = H'$.
- $F_{G/H} = F_G - F_H + 1$.
- $S_{G/H} = S_G - S_H + 1$.

# Quotient

**Remarque :**

- En général, le quotient $G/H$ de $G$ par $H$ n'est pas une sous-carte de $G$.
- $(G/H)'$ est une sous-carte de $G'$. De plus $G'/(G/H)' = H'$.
- $F_{G/H} = F_G - F_H + 1$.
- $S_{G/H} = S_G - S_H + 1$.

**Lemme**

Soit $G$ une carte bipartie. $G$ est équilibrée ssi $G'$ est équilibrée.

**Théorème 1**

Soient $G_1$ et $G_2$ deux cartes biparties, et $G$ la carte bipartie construite en identifiant un sommet noir de $G_1$ avec un sommet noir de $G_2$. Alors $G$ est équilibrée ssi $G_1$ et $G_2$ sont équilibrées.

**Théorème 1**

Soient $G_1$ et $G_2$ deux cartes biparties, et $G$ la carte bipartie construite en identifiant un sommet noir de $G_1$ avec un sommet noir de $G_2$. Alors $G$ est équilibrée ssi $G_1$ et $G_2$ sont équilibrées.

**Théorème 2**

Soit $G$ une carte bipartie, et $H$ une sous-carte convexe de $G$. Si deux des trois cartes $G, H$ et $G/H$ sont équilibrées alors la troisième est aussi équilibrée.

# Problème de Hurwitz

## Problème

$\mathcal{S}_d$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, d\}$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in \mathcal{S}_d$ tels que

# Problème de Hurwitz

## Problème

$\mathcal{S}_d$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, d\}$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in \mathcal{S}_d$ tels que

- $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 1$

### Problème

$\mathcal{S}_d$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, d\}$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in \mathcal{S}_d$ tels que

- $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 1$
- $\langle \sigma_1, \cdots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur $\{1, \cdots, d\}$

# Problème de Hurwitz

## Problème

$\mathcal{S}_d$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, d\}$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in \mathcal{S}_d$ tels que

- $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 1$
- $\langle \sigma_1, \cdots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur $\{1, \cdots, d\}$
- condition de minimalité

**Problème**

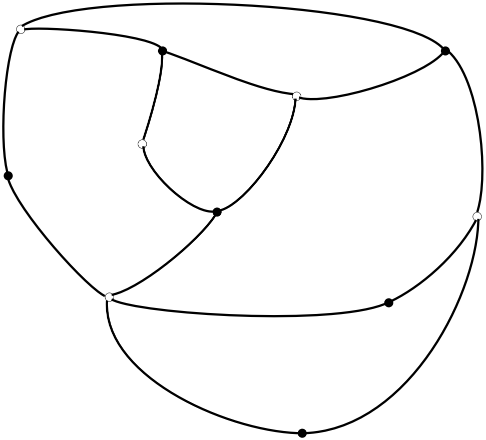
$\mathcal{S}_d$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, d\}$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in \mathcal{S}_d$ tels que

- $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 1$
- $\langle \sigma_1, \cdots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur $\{1, \cdots, d\}$
- condition de minimalité

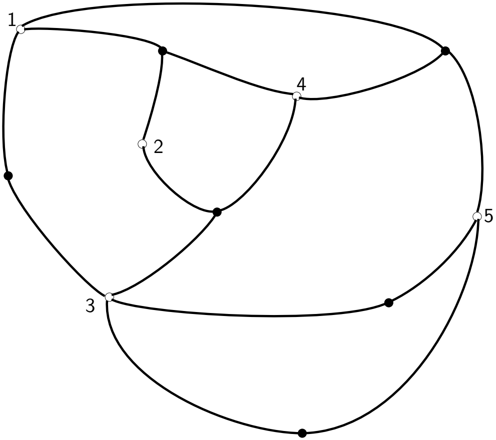
**Théorème**

Il y a une bijection entre les solutions du problème de Hurwitz et les revêtements ramifiés de la sphère.

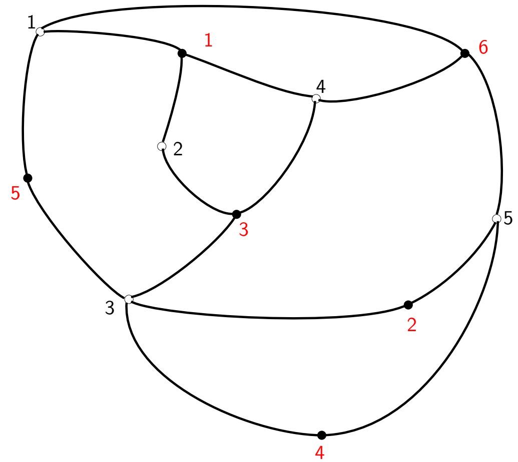
# Problème de Hurwitz



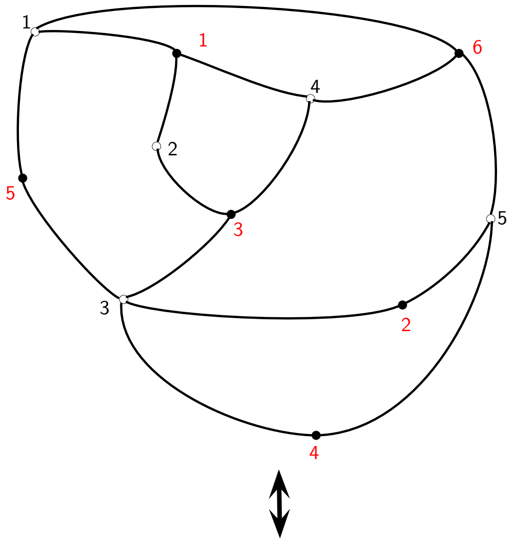
# Problème de Hurwitz



# Problème de Hurwitz



# Problème de Hurwitz




$$(165)(13)(2354)(136)(246) = 1$$

# Réalisation de passeport

## Théorème

Tout passeport polynomial est réalisable.

# Réalisation de passeport

## Théorème

Tout passeport polynomial est réalisable.

## Corollaire

Soit $\mathcal{D} = [d_{i,j}]$ un passeport de degré $d$. S'il existe un ensemble $K \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que $\sum_{i \in K} \nu_i(\mathcal{D}) = d - 1$, alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

# Réalisation de passeport

**Théorème**

Tout passeport polynomial est réalisable.

**Corollaire**

Soit $\mathcal{D} = [d_{i,j}]$ un passeport de degré $d$. S'il existe un ensemble $K \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que $\sum_{i \in K} \nu_i(\mathcal{D}) = d - 1$, alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

**Théorème 1**

Soit $\mathcal{D} = [d_{i,j}]$ un passeport de degré $d$. Si $\mathcal{D}$ peut être 'décomposé' en deux passeports réalisables de degré inférieur, alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

# Réalisation de passeport

**Théorème**

Tout passeport polynomial est réalisable.

**Corollaire**

Soit $\mathcal{D} = [d_{i,j}]$ un passeport de degré $d$. S'il existe un ensemble $K \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que $\sum_{i \in K} \nu_i(\mathcal{D}) = d - 1$, alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

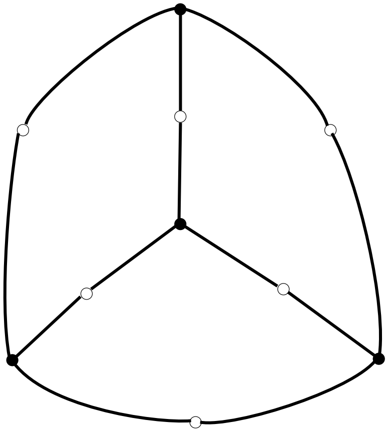
**Théorème 1**

Soit $\mathcal{D} = [d_{i,j}]$ un passeport de degré $d$. Si $\mathcal{D}$ peut être 'décomposé' en deux passeports réalisables de degré inférieur, alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

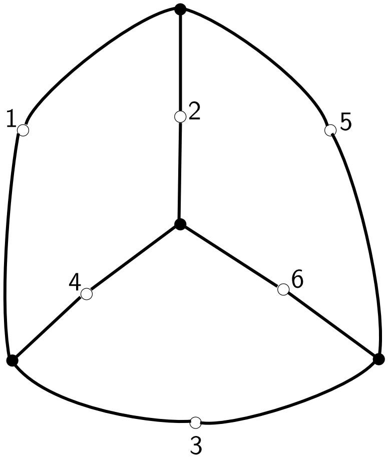
**Corollaire**

Tout passeport ne contenant que des types $[n, 1, \cdots, 1]$ est réalisable.

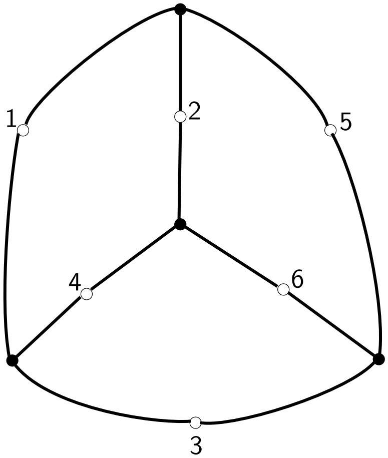
# Réalisation



# Réalisation

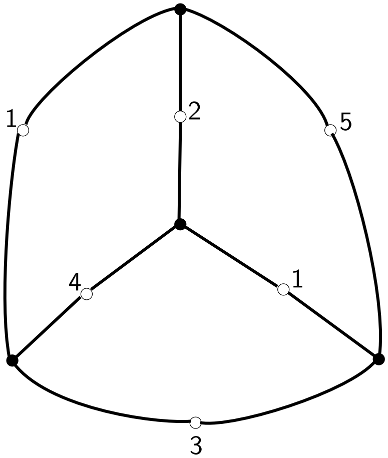


# Réalisation

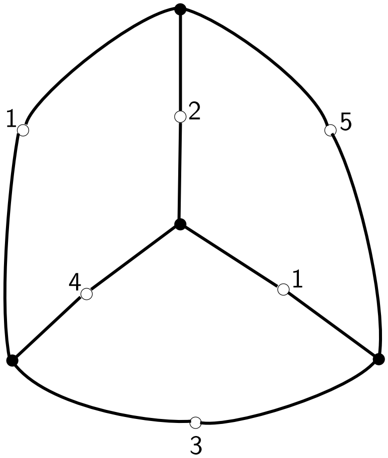



$$[2,1,1], \cdots, [2,1,1]$$

# Réalisation

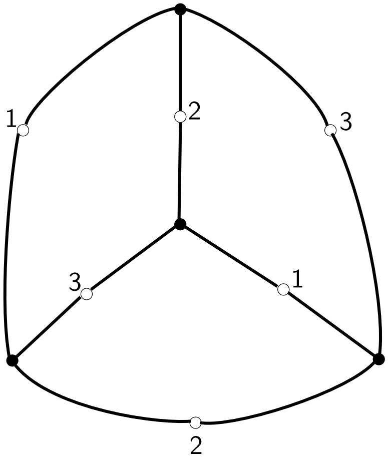


# Réalisation

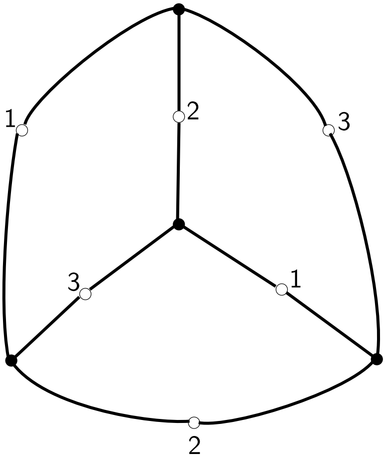



$$[2,2],[2,1,1],\cdots,[2,1,1]$$

# Réalisation



# Réalisation




$$[2,2],[2,2],[2,2]$$

Merci pour votre attention