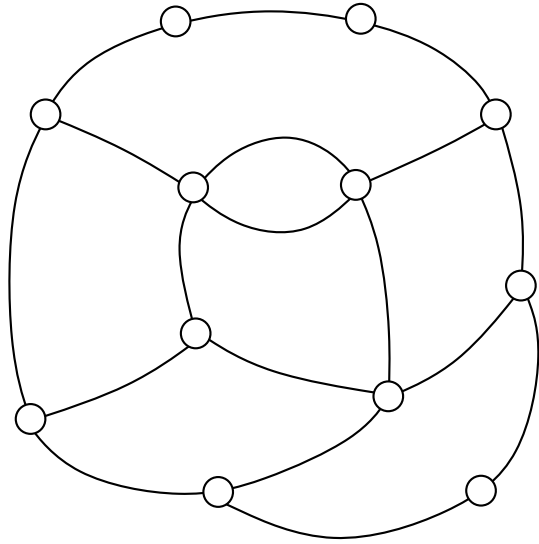


Formules bijectives pour les cartes biparties et quasi-biparties avec bords

G. Collet, É. Fusy

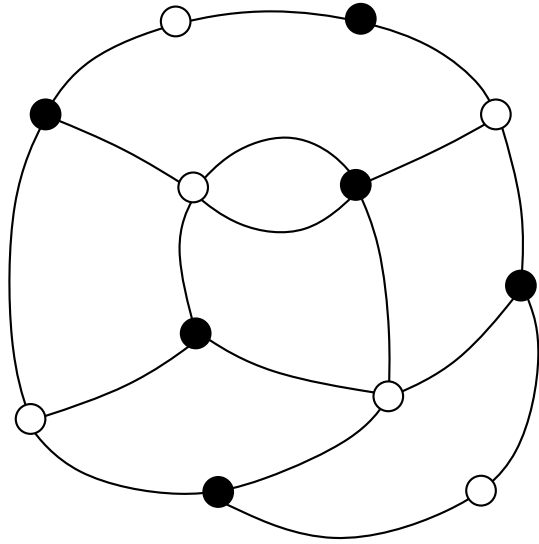
LIX, École Polytechnique

Définitions : cartes et bords



carte = graphe plongé sur le plan

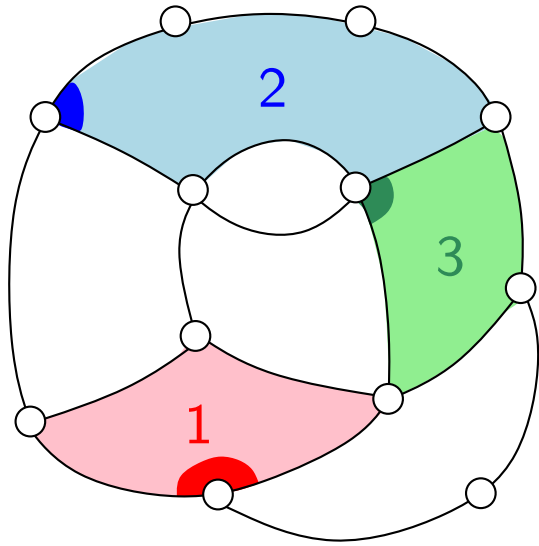
Définitions : cartes et bords



carte = graphe plongé sur le plan

carte bipartie = faces de degré pair

Définitions : cartes et bords

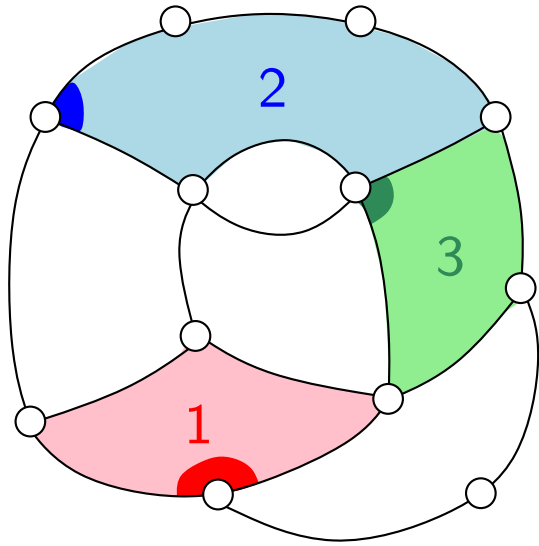


carte = graphe plongé sur le plan

carte bipartite = faces de degré pair

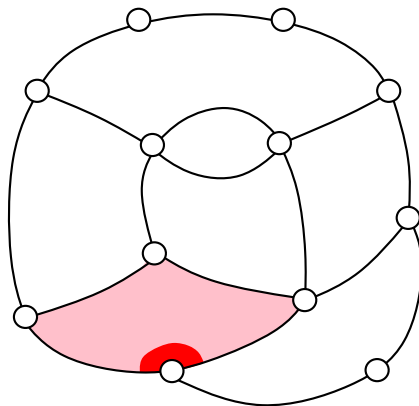
bord = face avec un coin marqué

Définitions : cartes et bords

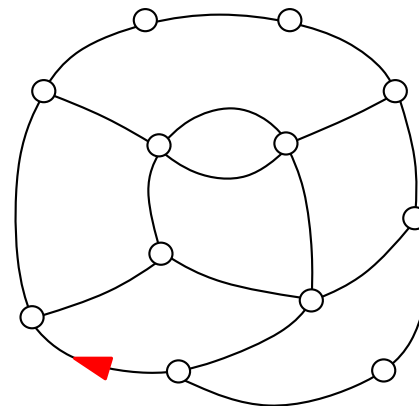


carte = graphe plongé sur le plan
carte bipartie = faces de degré pair
bord = face avec un coin marqué

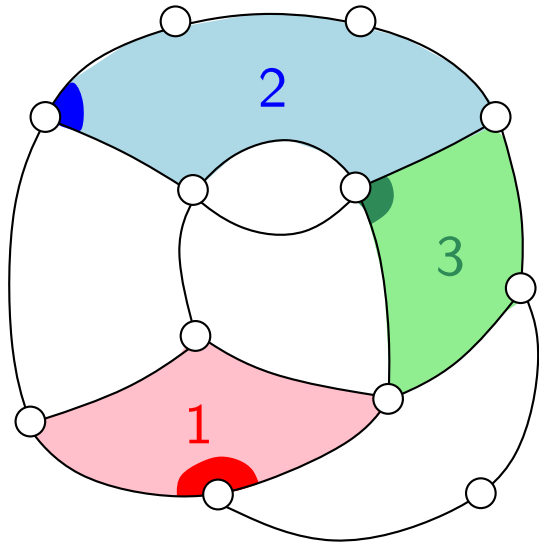
Exemple : carte à un bord = carte enracinée



\cong



Définitions : cartes et bords



carte = graphe plongé sur le plan

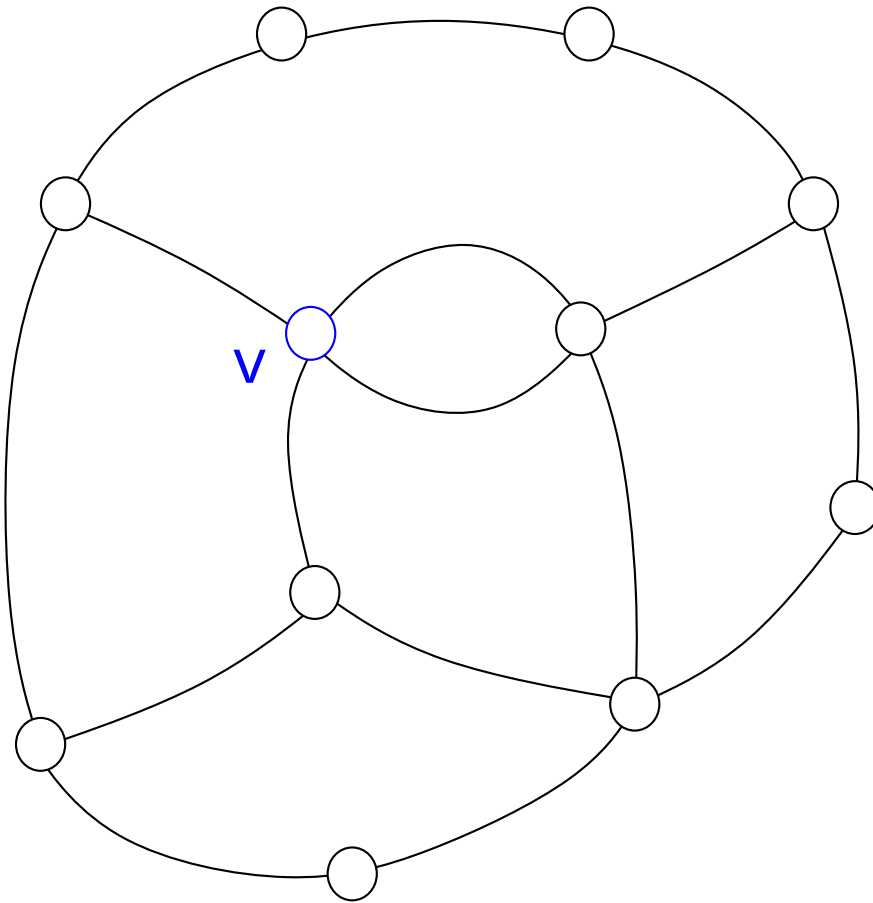
carte bipartie = faces de degré pair

bord = face avec un coin marqué

$\mathcal{G}_{2a_1, \dots, 2a_r}$ = cartes biparties à r bords de longueurs respectives $2a_1, \dots, 2a_r$

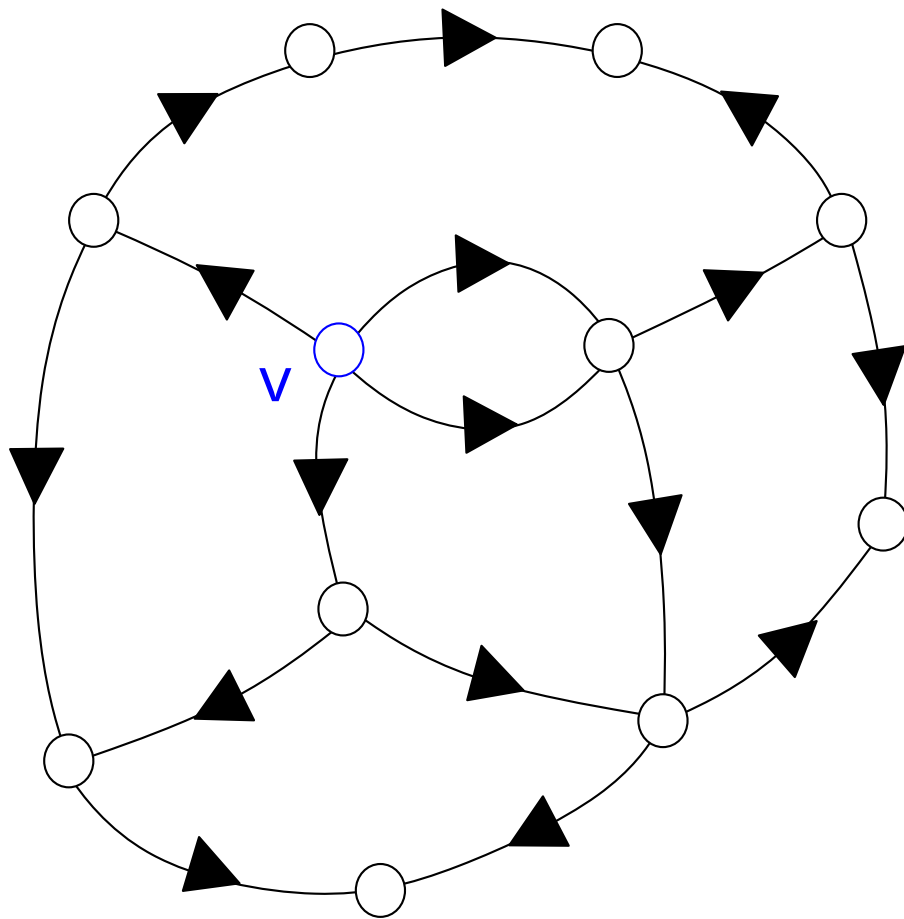
Question : Énumération de $\mathcal{G}_{2a_1, \dots, 2a_r}$, pour $r \geq 1$

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]



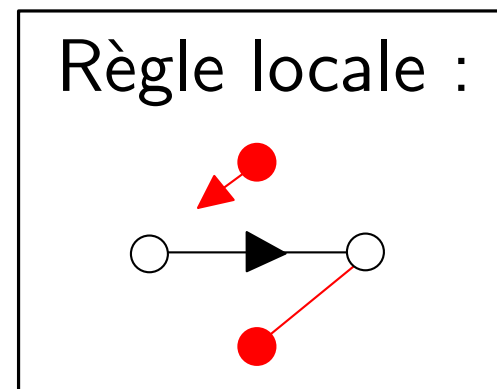
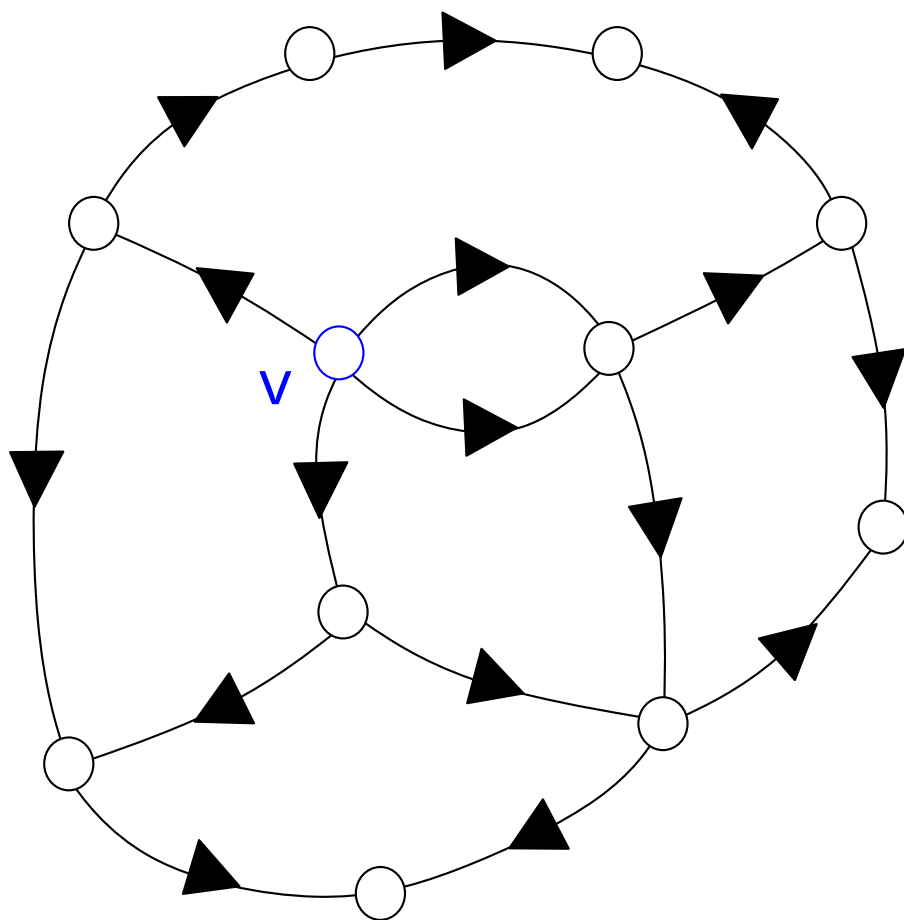
Carte bipartie avec un sommet pointé v

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]



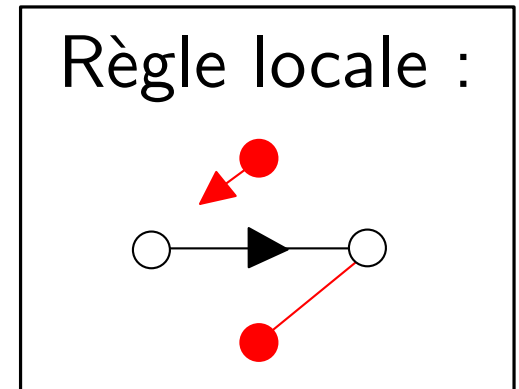
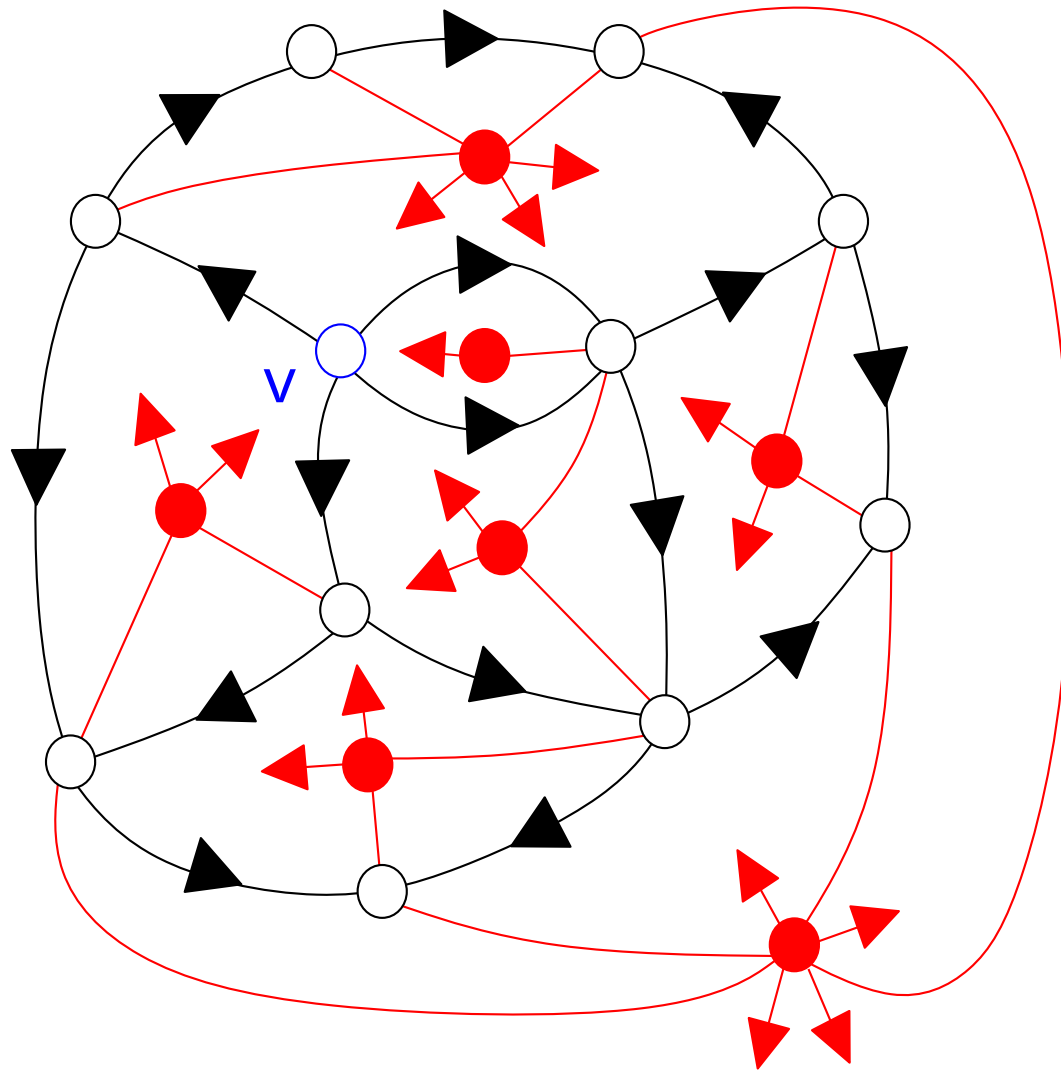
Carte bipartie avec un sommet pointé v
+ orientation géodésique depuis v

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]

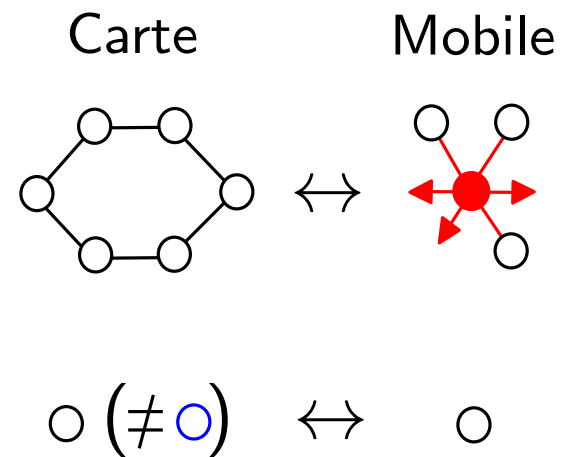
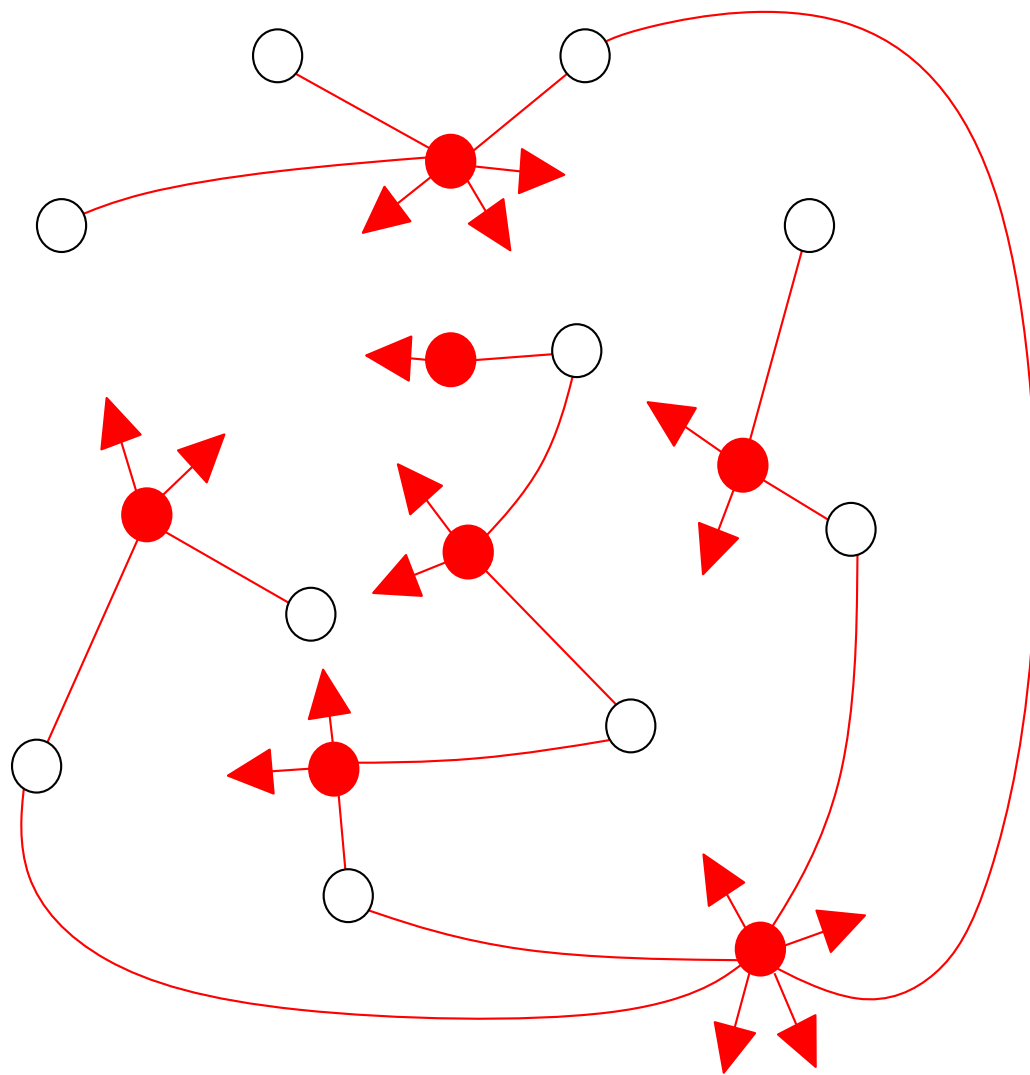


Carte bipartie avec un sommet pointé v
+ orientation géodésique depuis v

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]



Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]



Mobile associé à la carte bipartie

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]

Soit $R \equiv R(t; x_1, x_2, \dots)$, la série génératrice des mobiles enracinés sur le coin d'un sommet blanc, donnée par :

$$R = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} R^i$$

Soit $G_{2a} \equiv G_{2a}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à \mathcal{G}_{2a} .

Proposition : $\frac{d}{dt} G_{2a} = \binom{2a}{a} R^a$

Des cartes biparties aux mobiles [BDG'04]

Soit $R \equiv R(t; x_1, x_2, \dots)$, la série génératrice des mobiles enracinés sur le coin d'un sommet blanc, donnée par :

$$R = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} R^i$$

Soit $G_{2a} \equiv G_{2a}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à \mathcal{G}_{2a} .

Proposition : $\frac{d}{dt} G_{2a} = \binom{2a}{a} R^a$

Preuve :

1. Pointer un sommet de la carte
2. Appliquer la bijection
3. Décomposer le mobile autour du sommet rouge associé au bord

Formule pour les cartes biparties

Soit $G_{2a_1, \dots, 2a_r} \equiv G_{2a_1, \dots, 2a_r}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à $\mathcal{G}_{2a_1, \dots, 2a_r}$.

Proposition : Soit $s = \sum_{i=1}^r a_i$,

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s$$

Formule pour les cartes biparties

Soit $G_{2a_1, \dots, 2a_r} \equiv G_{2a_1, \dots, 2a_r}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à $\mathcal{G}_{2a_1, \dots, 2a_r}$.

Proposition : Soit $s = \sum_{i=1}^r a_i$,

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s$$

⇒ Généralise les formules d'Eynard pour les cas à 2 et 3 bords, obtenus par des décompositions à la Tutte.

Formule pour les cartes biparties

Soit $G_{2a_1, \dots, 2a_r} \equiv G_{2a_1, \dots, 2a_r}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à $\mathcal{G}_{2a_1, \dots, 2a_r}$.

Proposition : Soit $s = \sum_{i=1}^r a_i$,

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s$$

\Rightarrow Permet de retrouver la formule des slicings de Tutte :
soit $b_{2a_1, \dots, 2a_r}$, le nombre de cartes biparties à r faces ordonnées de degré $2a_1, \dots, 2a_r$, avec un coin marqué :

$$b_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{(e-1)!}{v!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i}$$

\rightarrow Fixer $x_i = 0, \forall i$.

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

Lemme [Pitman'99] :

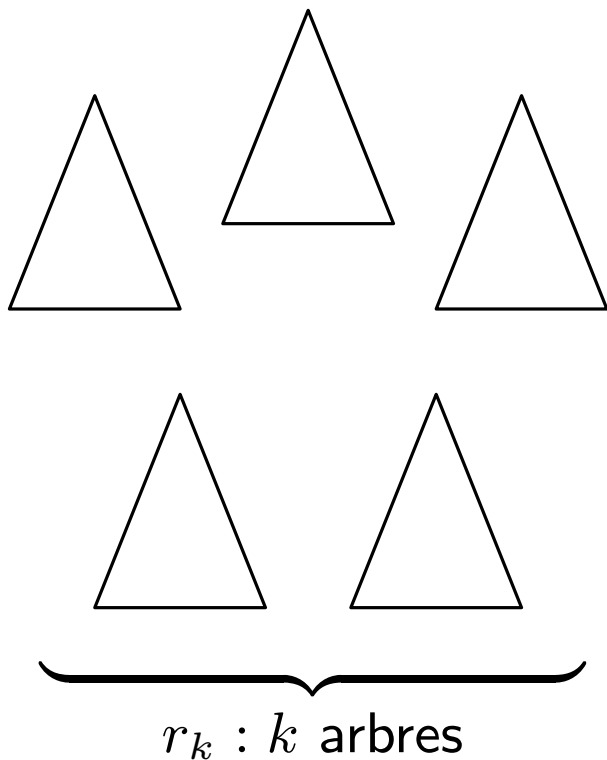
Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

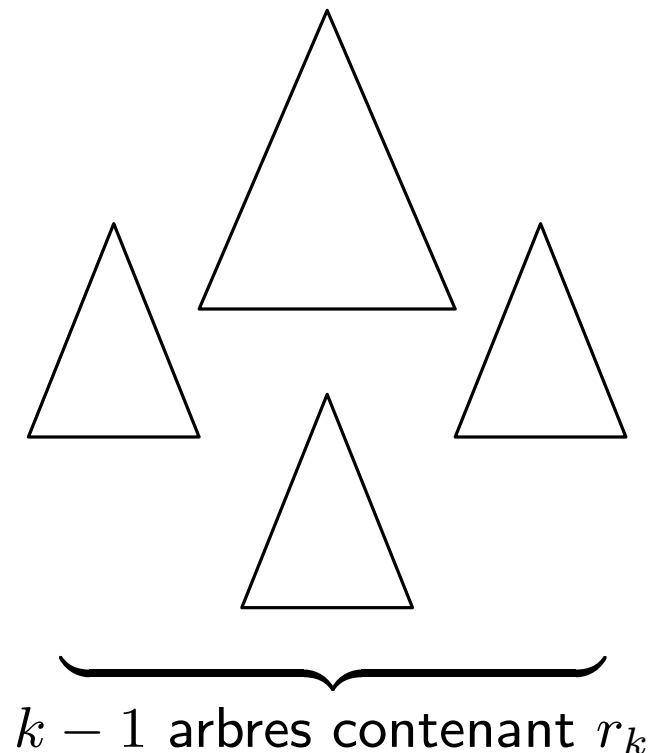
Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Preuve :



$\rightarrow ? \rightarrow$

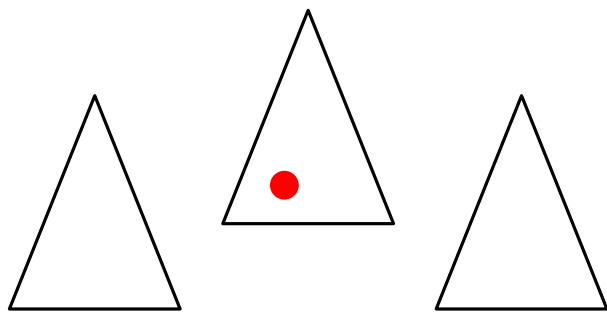


Digression : Arbres coalescents selon Pitman

Lemme [Pitman'99] :

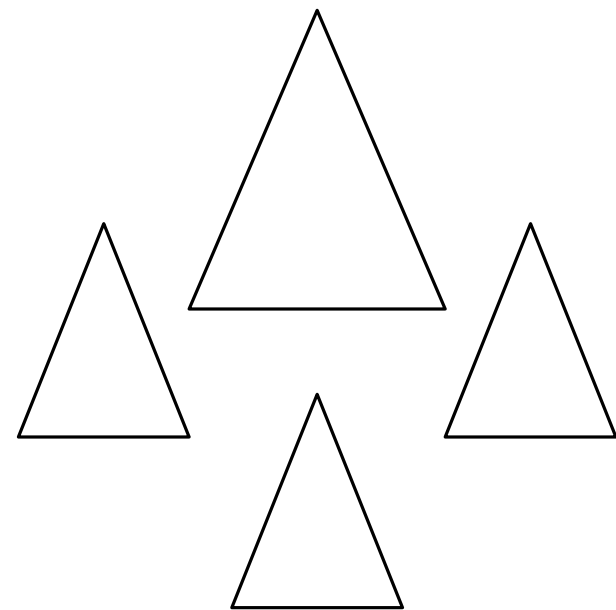
Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Preuve :



$r_k : k$ arbres

n
→



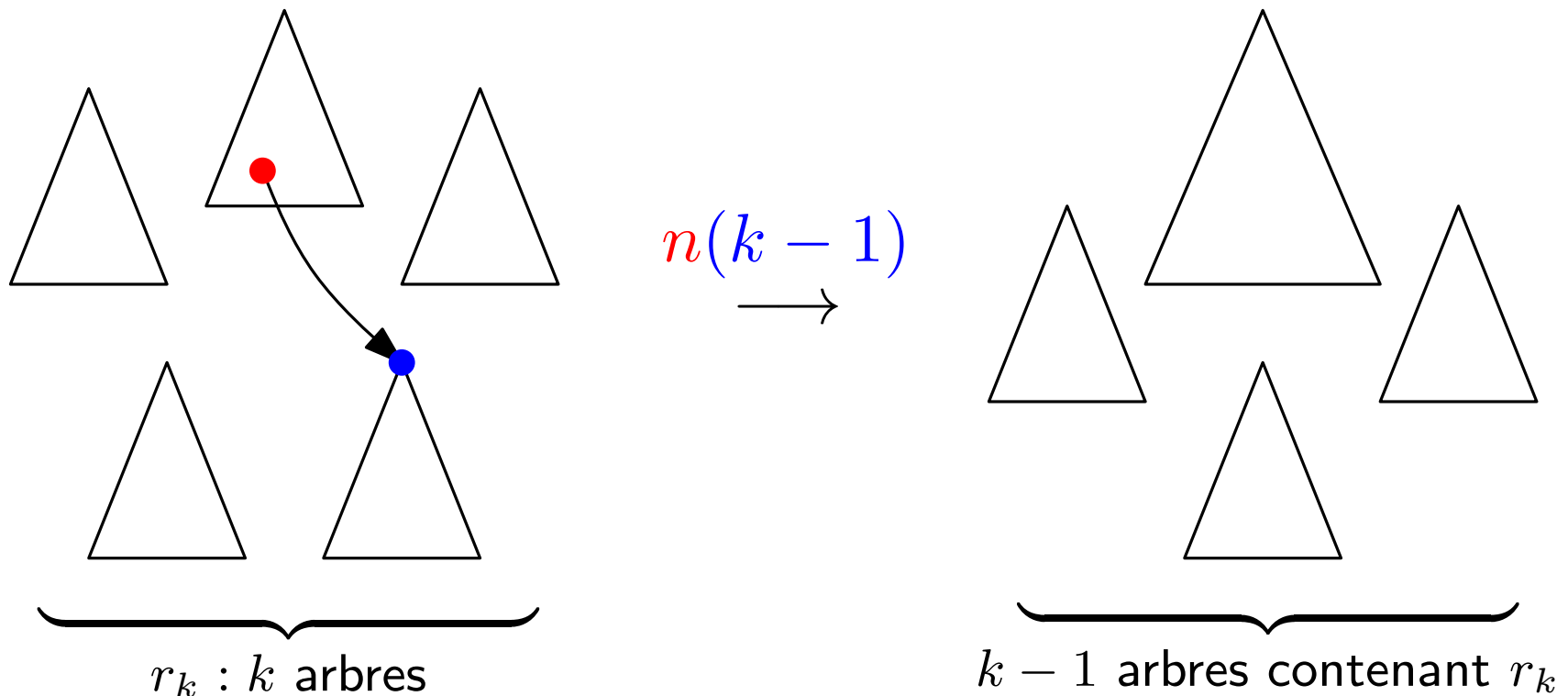
$k - 1$ arbres contenant r_k

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Preuve :

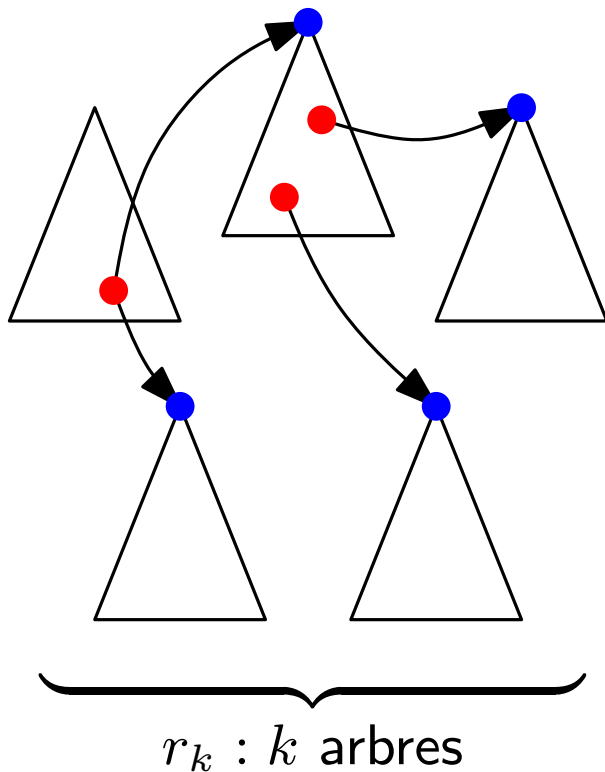


Digression : Arbres coalescents selon Pitman

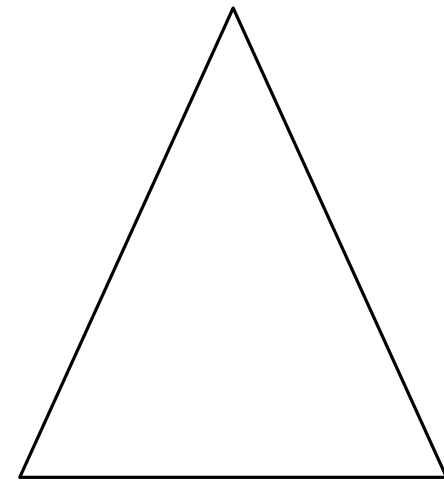
Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Preuve :



$$n^{k-1} (k-1)! \longrightarrow \dots \longrightarrow$$



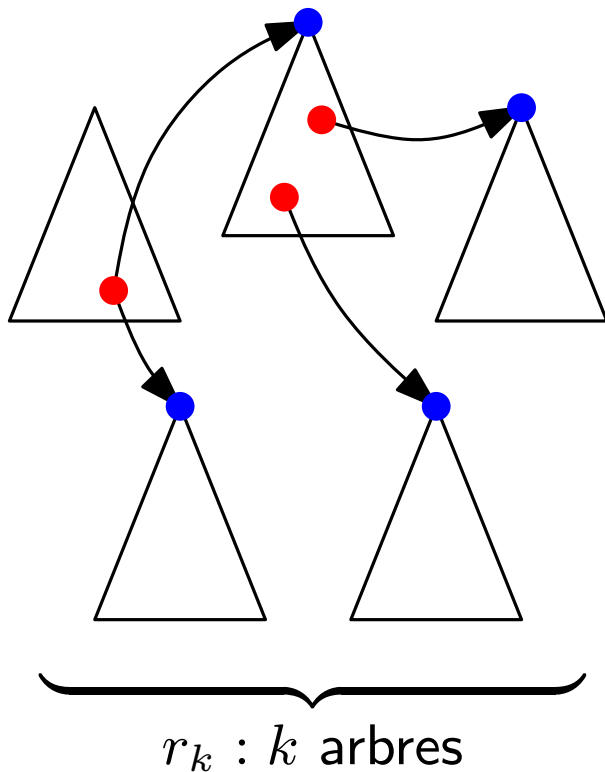
1 arbre contenant r_k

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

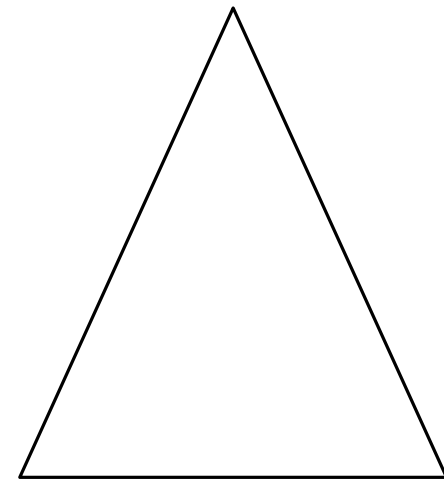
Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Preuve :



$$n^{k-1} (k-1)! \longrightarrow \dots \longrightarrow$$



1 arbre contenant r_k
obtenu $(k-1)!$ fois

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Corollaire :

Le nombre d'arbres de Cayley sur $\{1, \dots, n\}$ est n^{n-2} .

Digression : Arbres coalescents selon Pitman

Lemme [Pitman'99] :

Pour toute forêt r_k de k arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres enracinés sur $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent r_k est n^{k-1} .

Corollaire :

Le nombre d'arbres de Cayley sur $\{1, \dots, n\}$ est n^{n-2} .

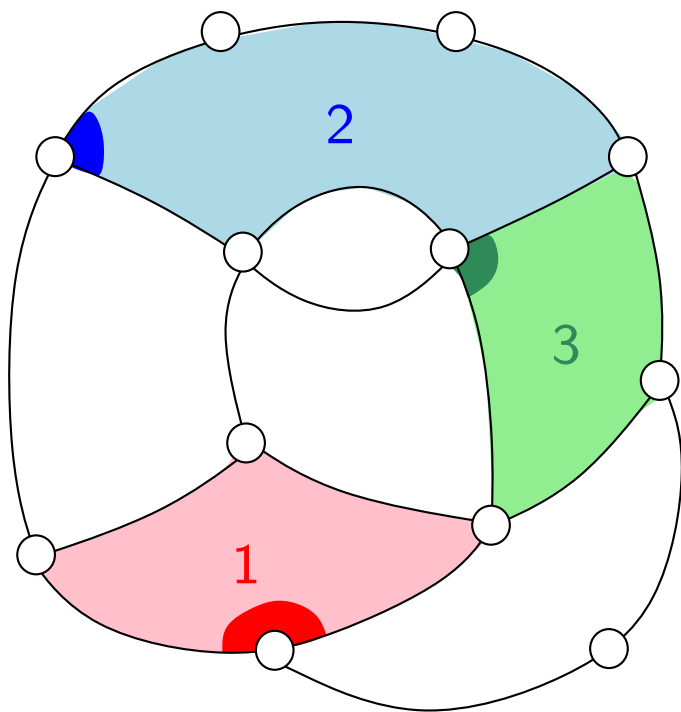
Preuve : Appliquer le lemme pour $k = n$, i.e. $r_n := \{n \text{ points}\}$

Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

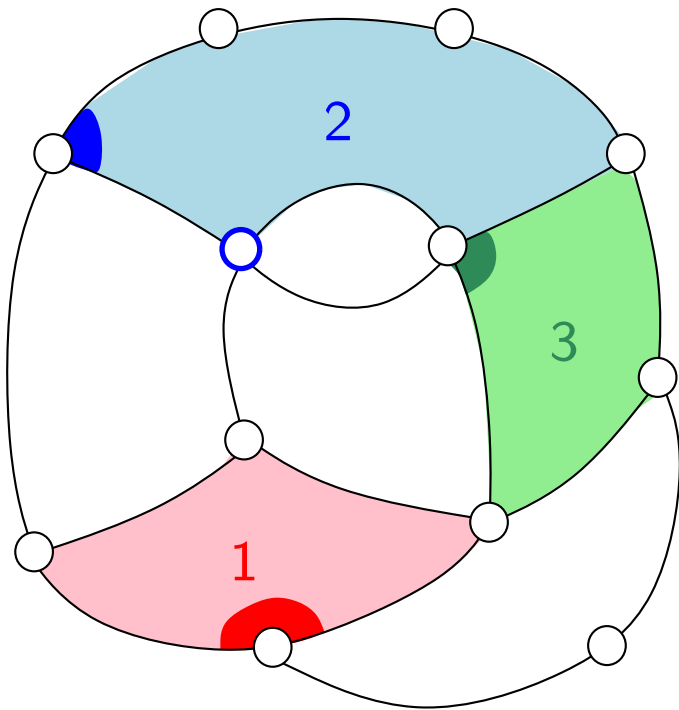
Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



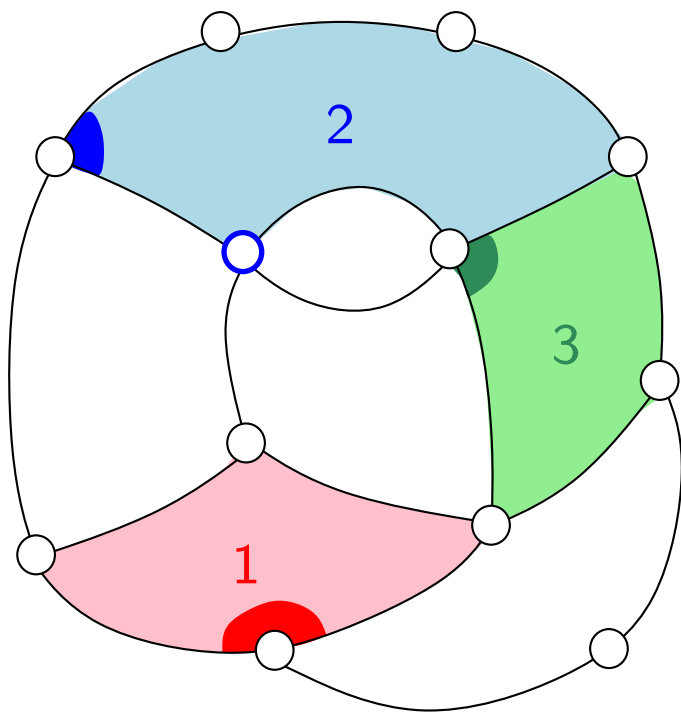
Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

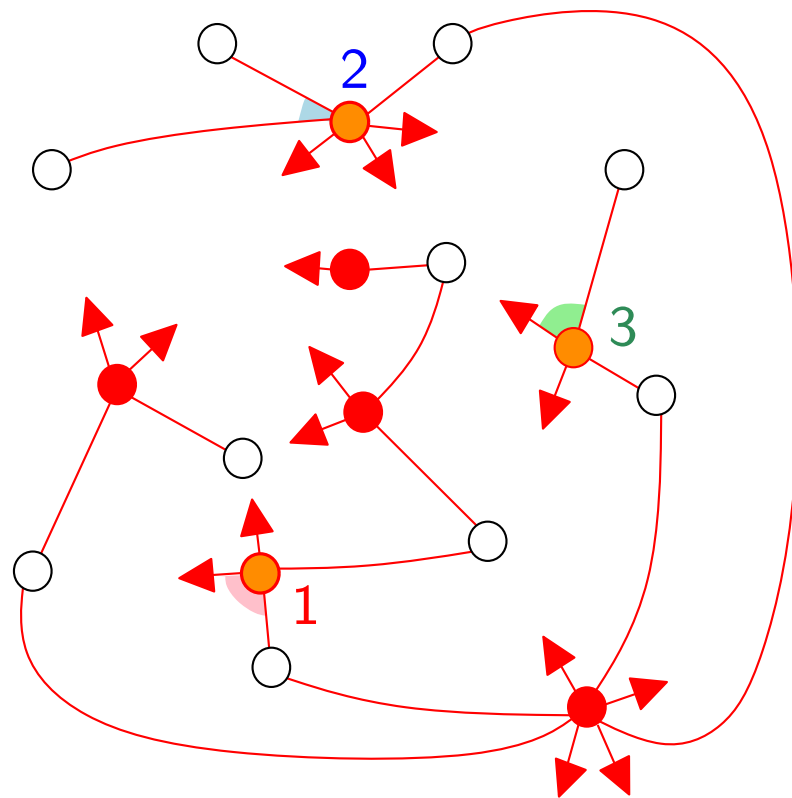


Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

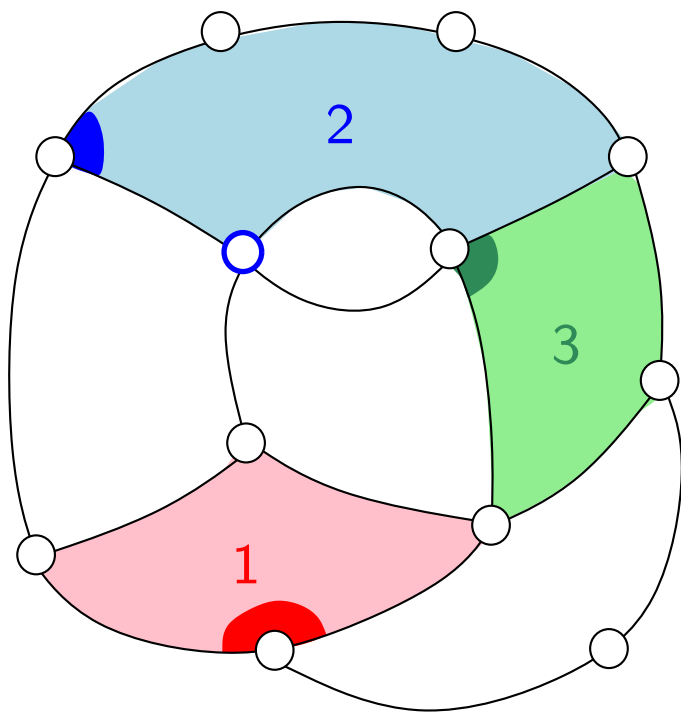


21

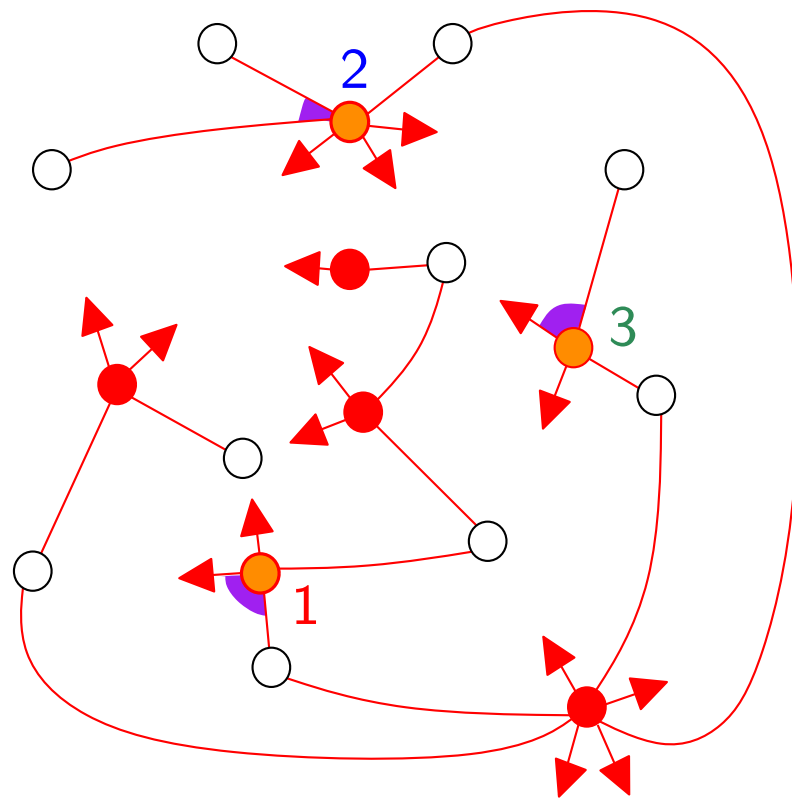


Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

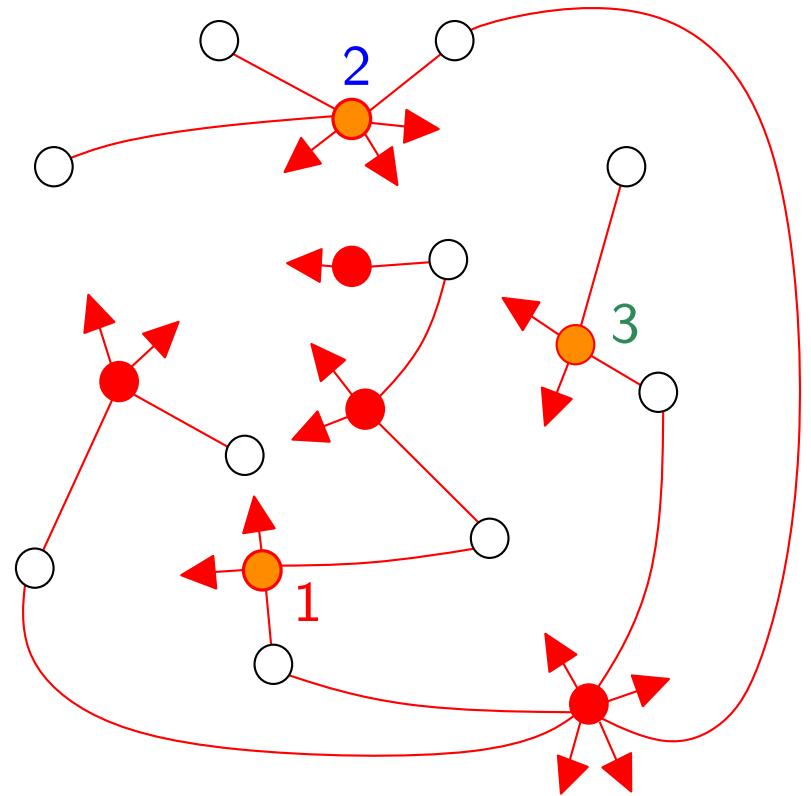
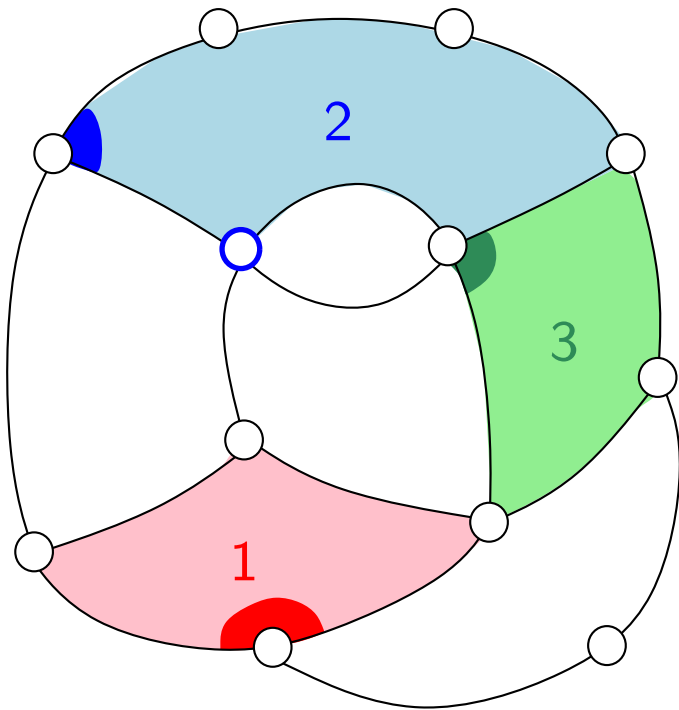


21



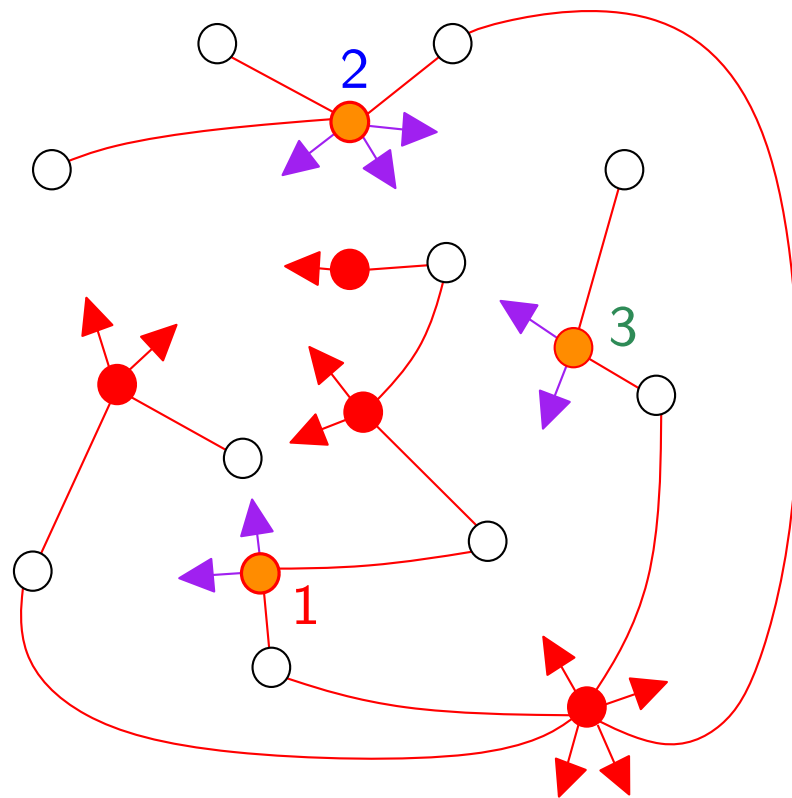
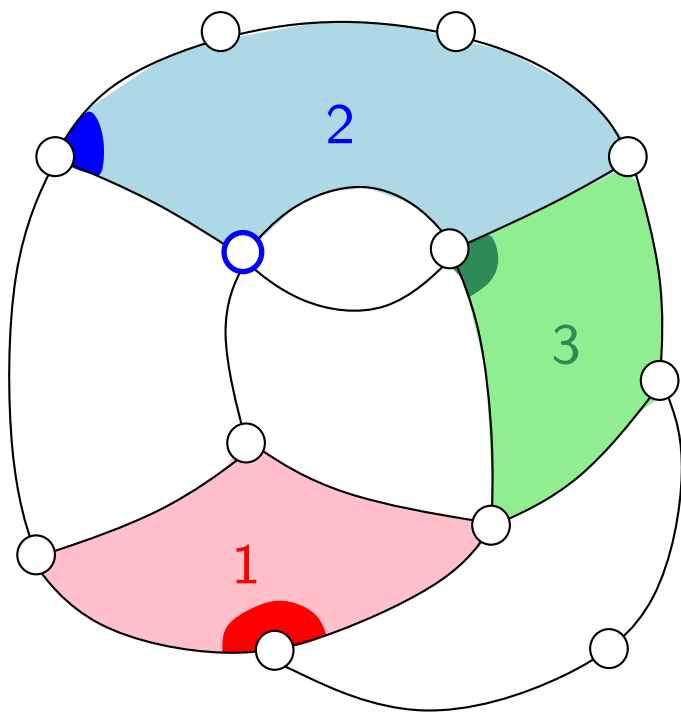
Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



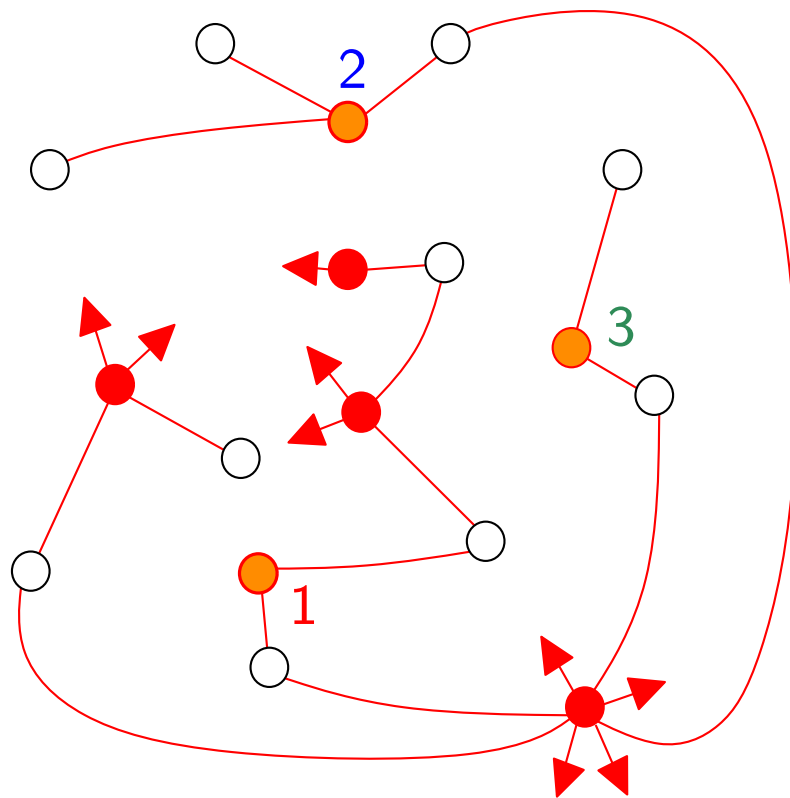
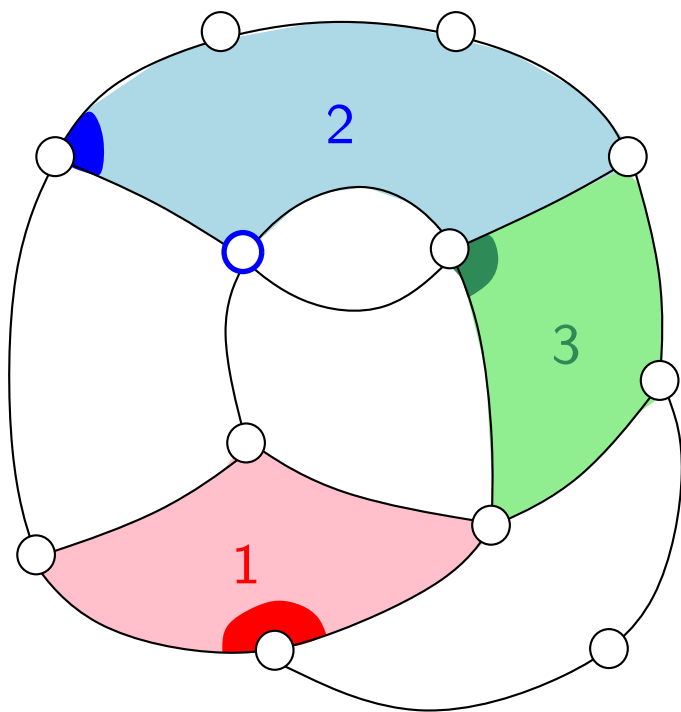
Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

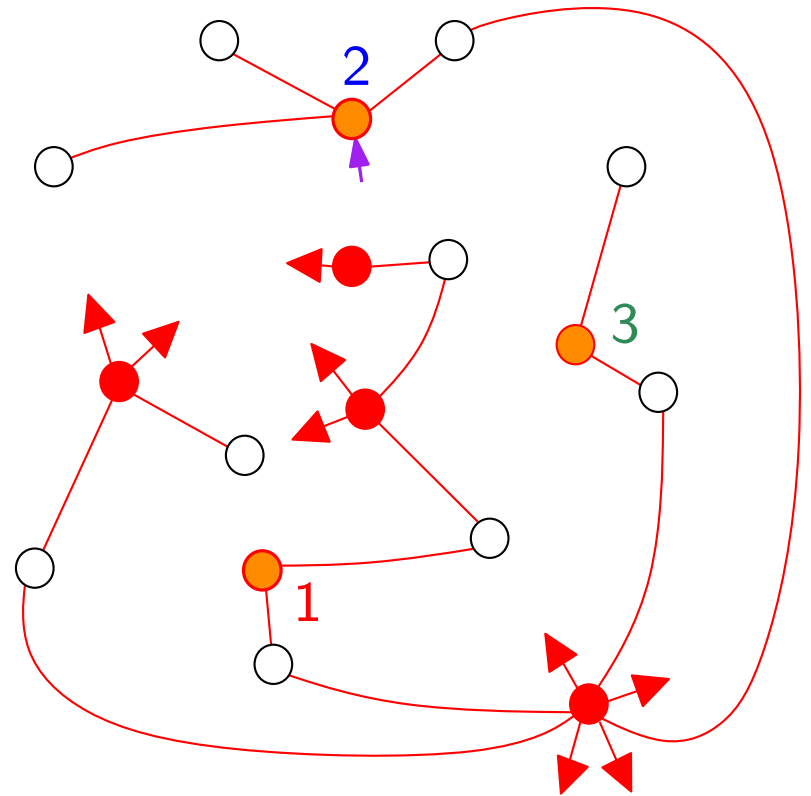


Cas biparti : preuve

$$\frac{d}{dt} G_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i} \right) \tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

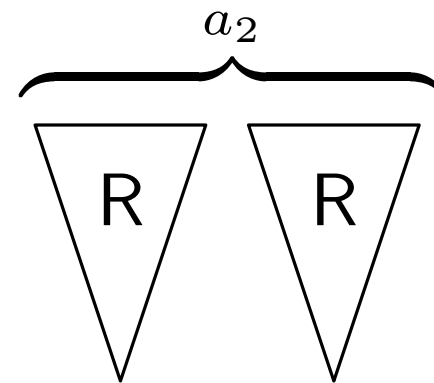
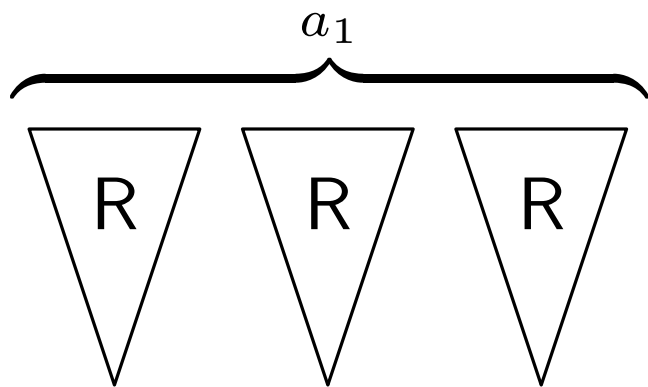
$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r}$: Mobile "élagué"

- r sommets rouges marqués, sans bourgeons et de degrés a_1, \dots, a_r
- enraciné sur le coin d'un des sommets marqués

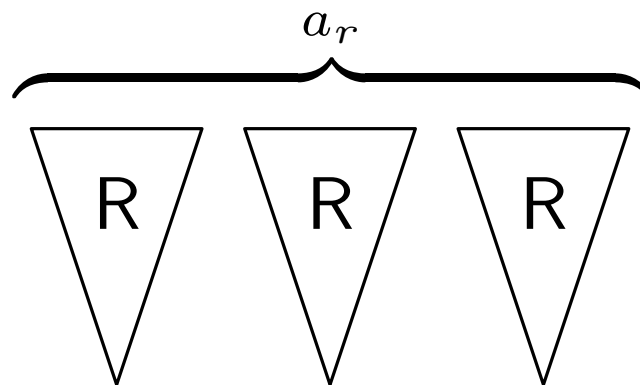


Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

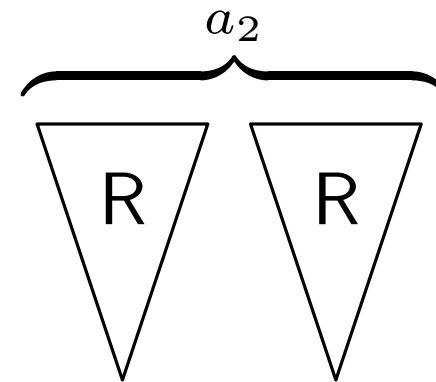
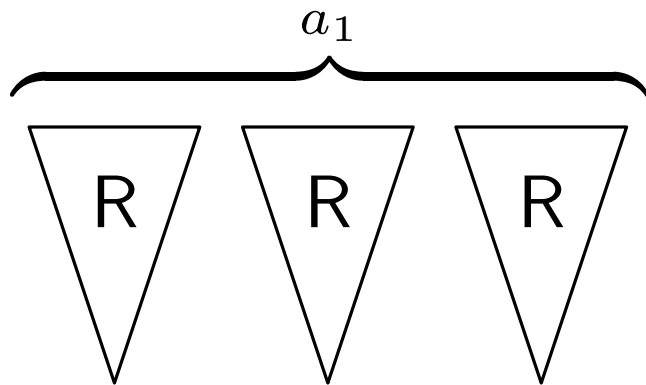


• • •

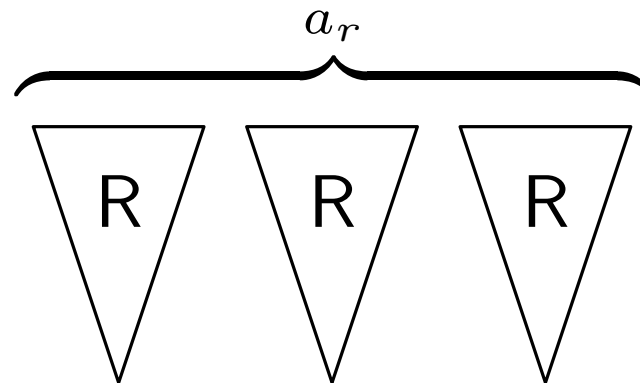


Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

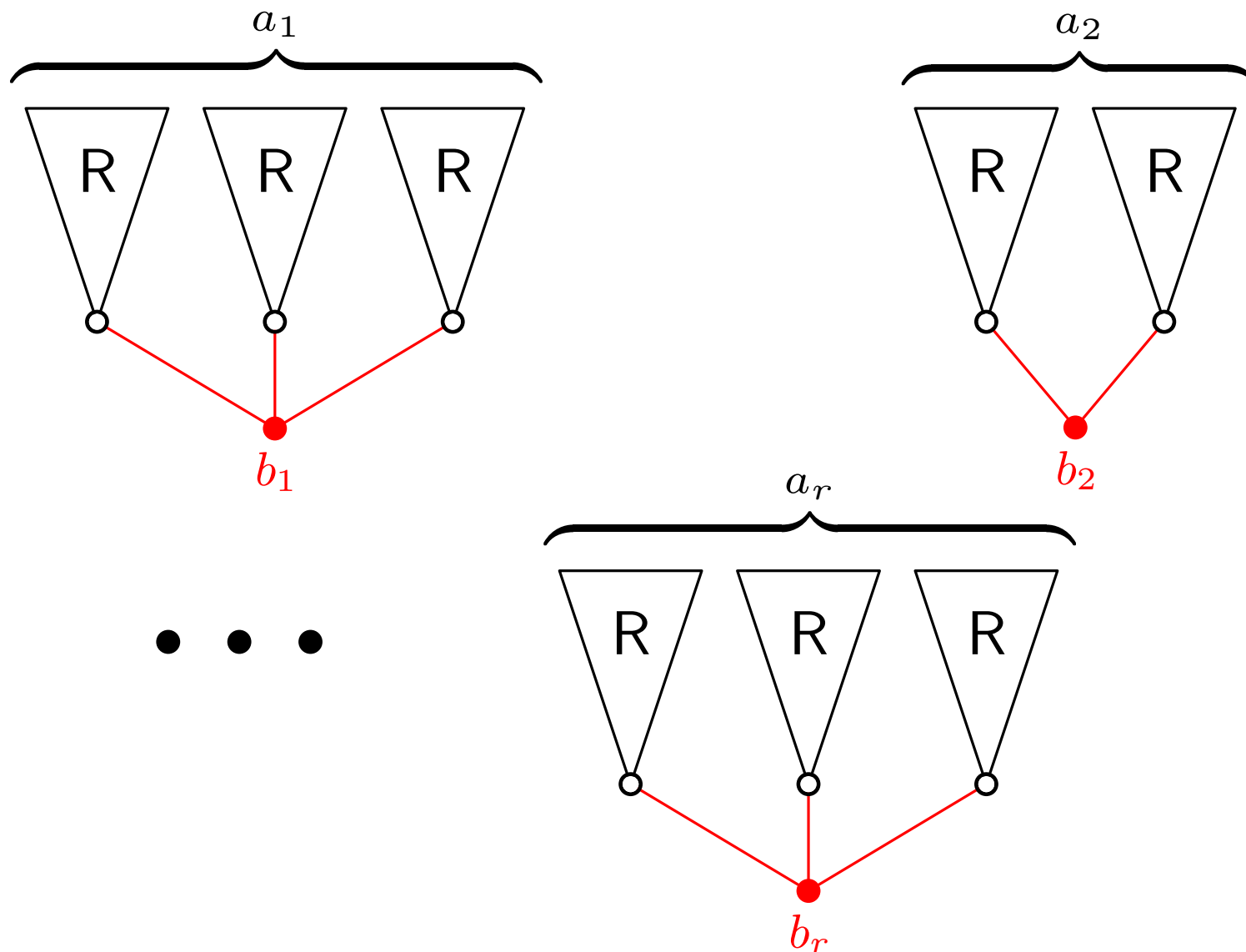


• • •



Cas biparti : preuve

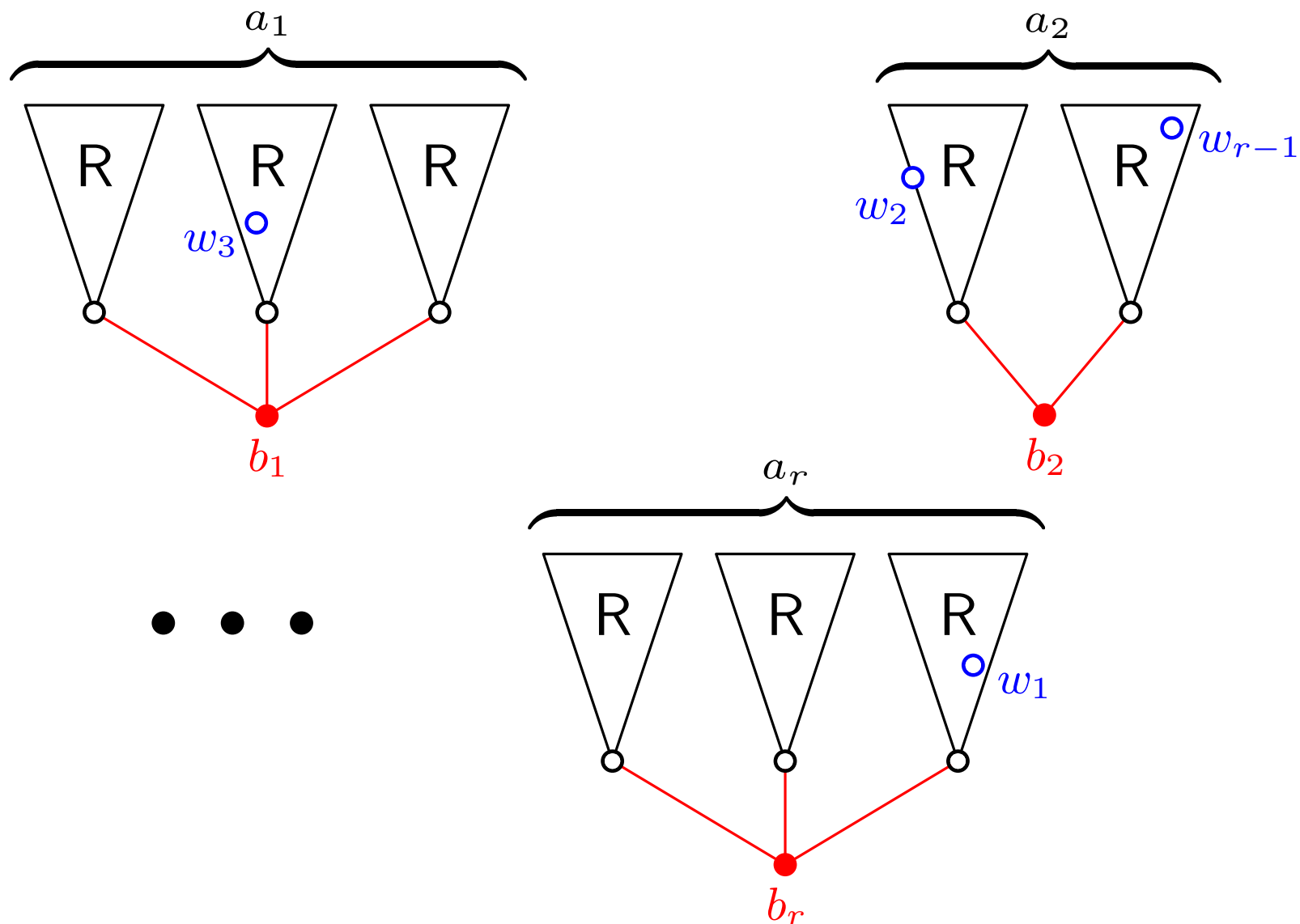
$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



Cas biparti : preuve

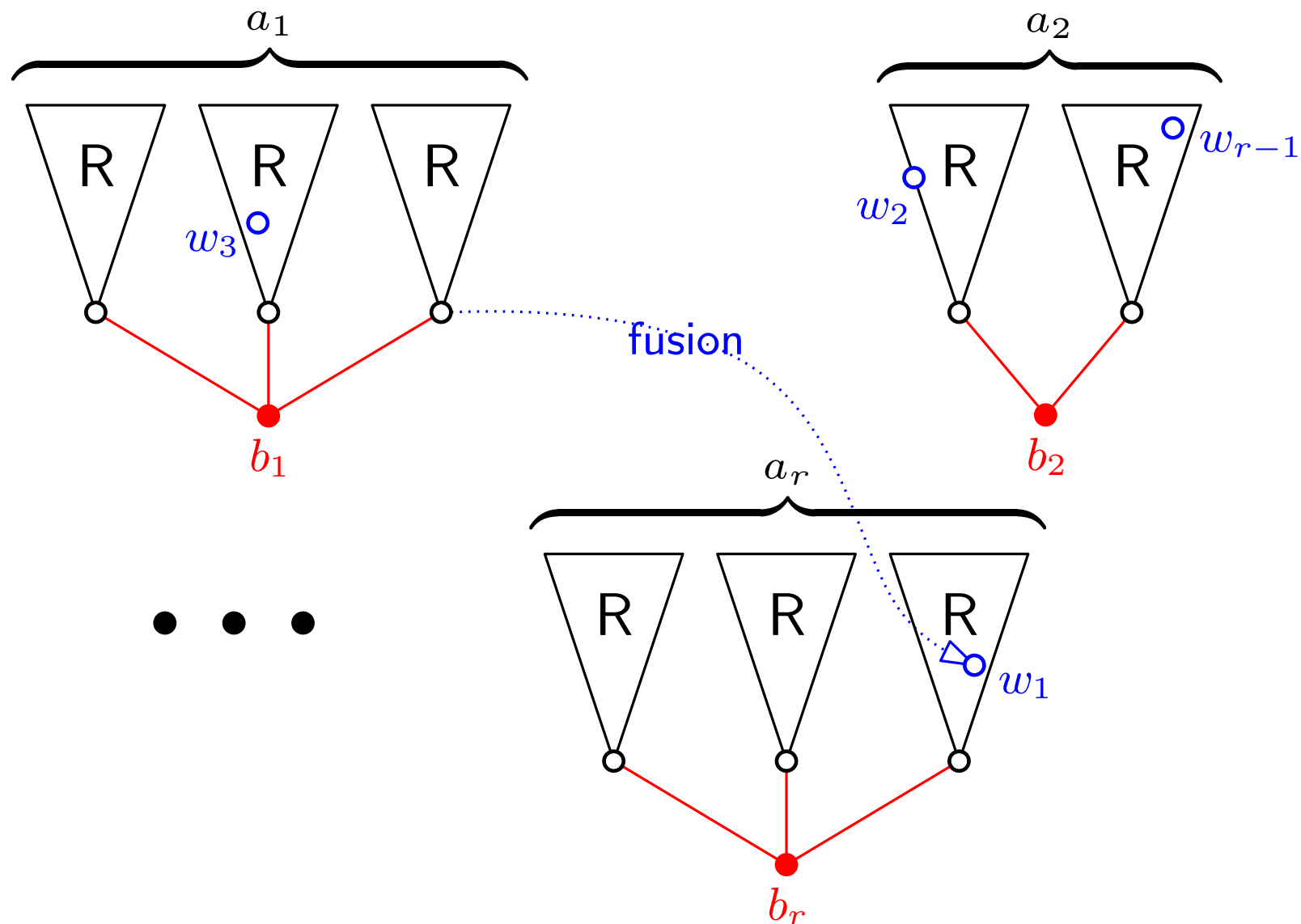
$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s,$$

$r - 1$ sommets
blancs marqués



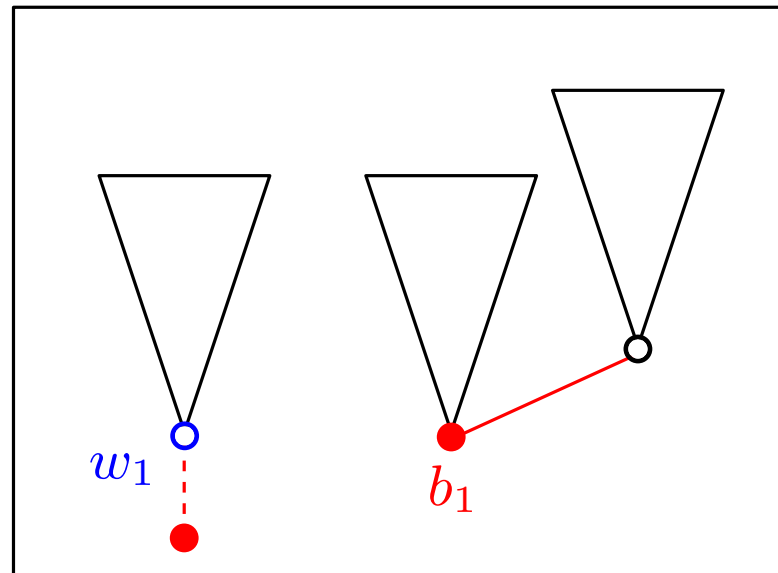
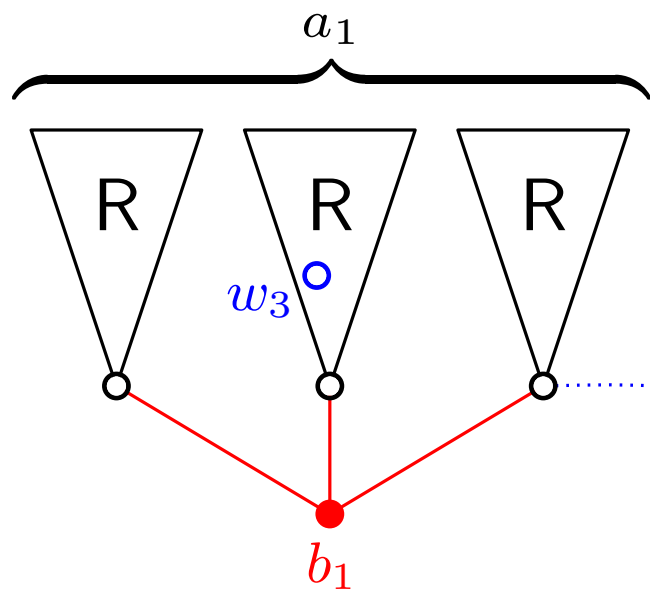
Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



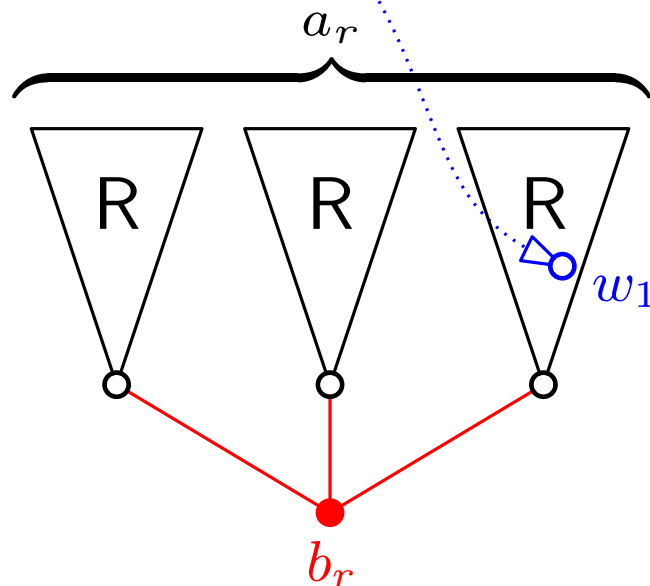
Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



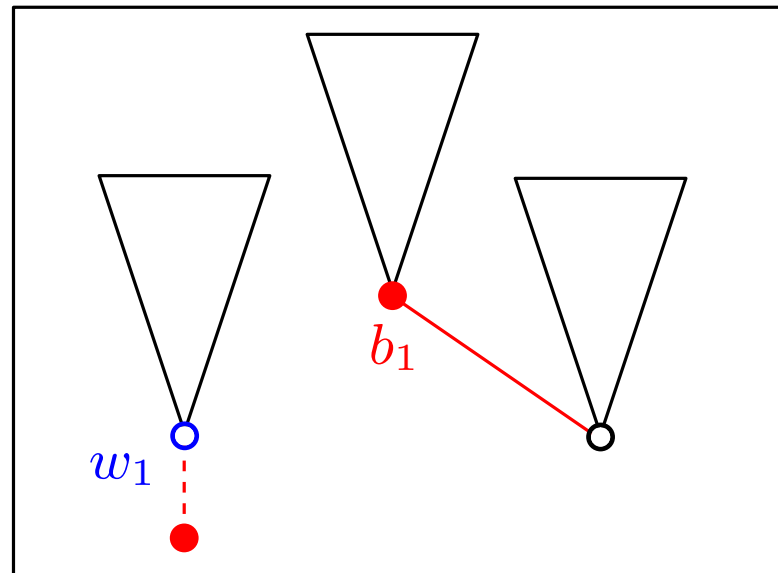
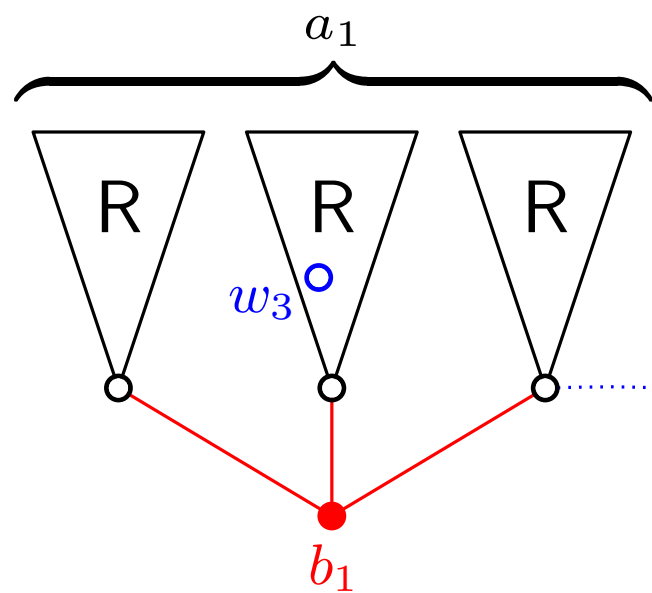
fusion

• • •

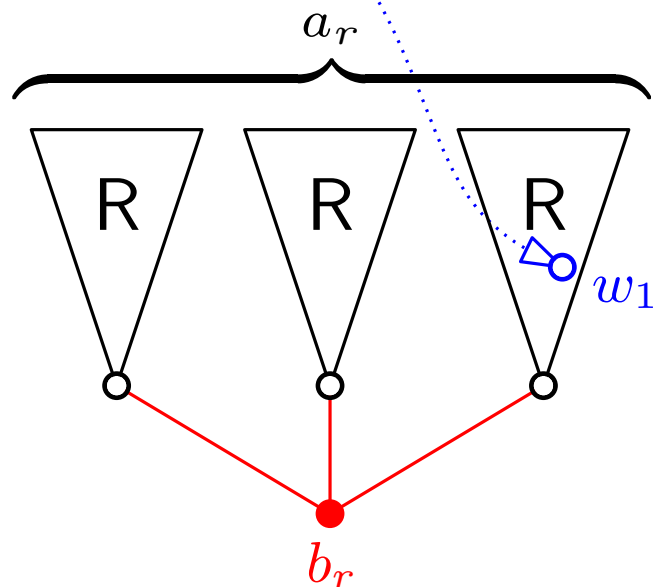


Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



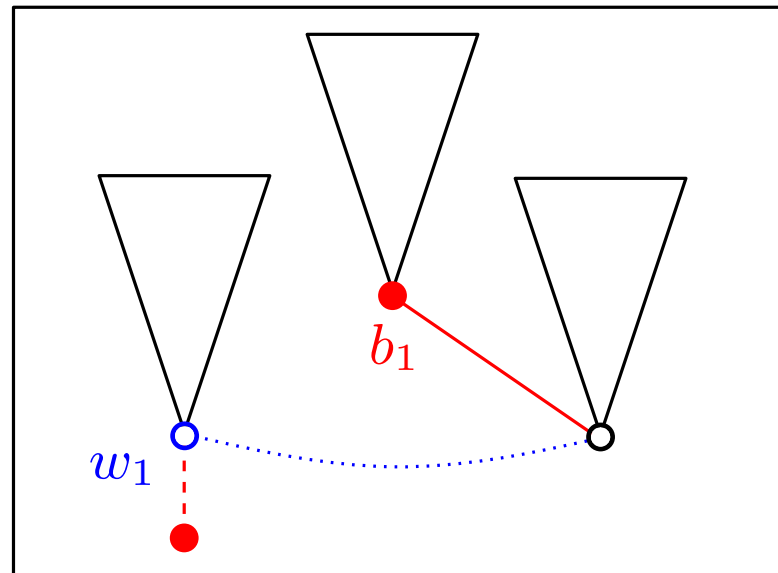
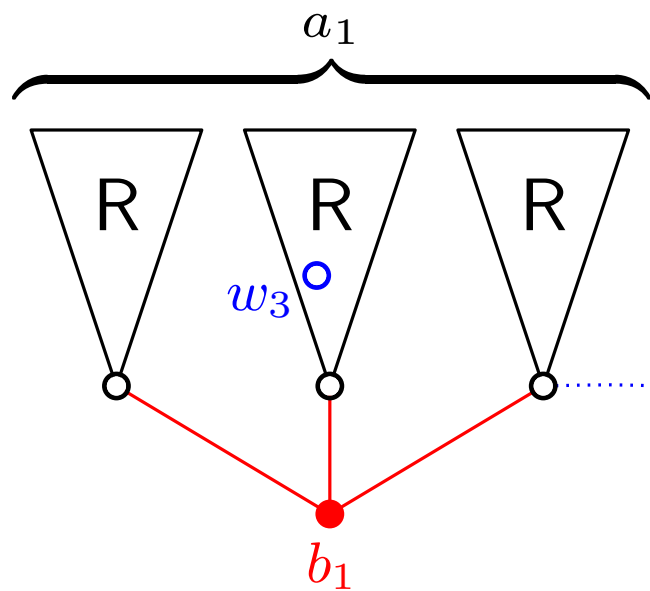
• • •



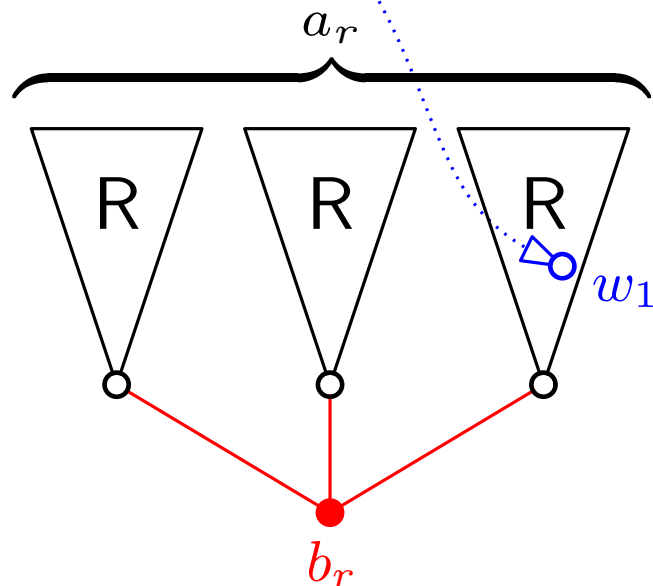
fusion

Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

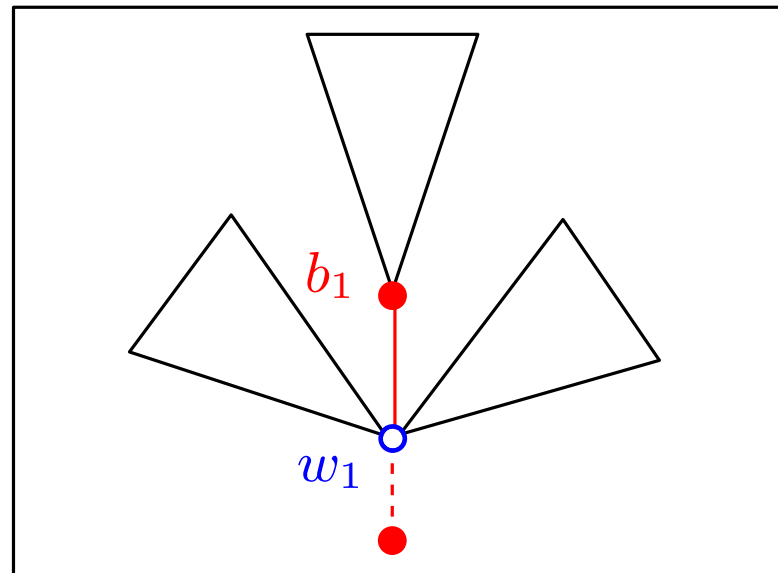
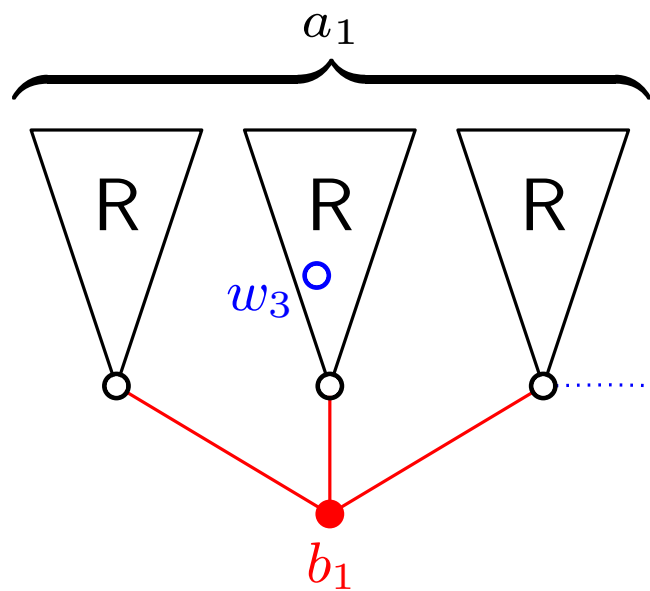


• • •

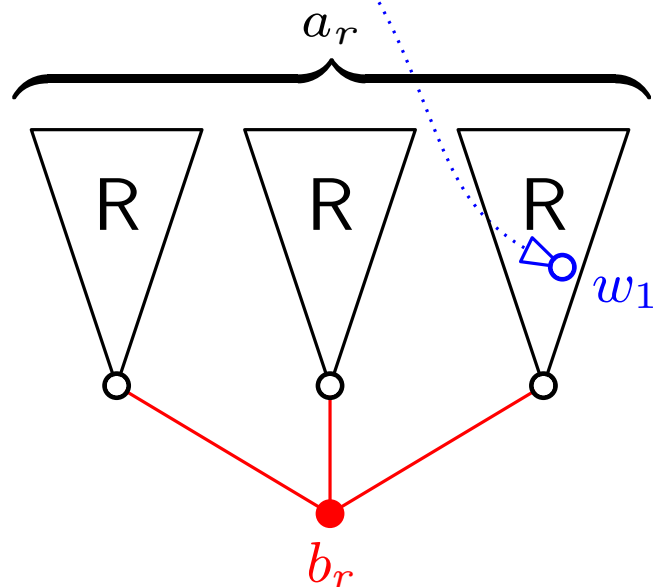


Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



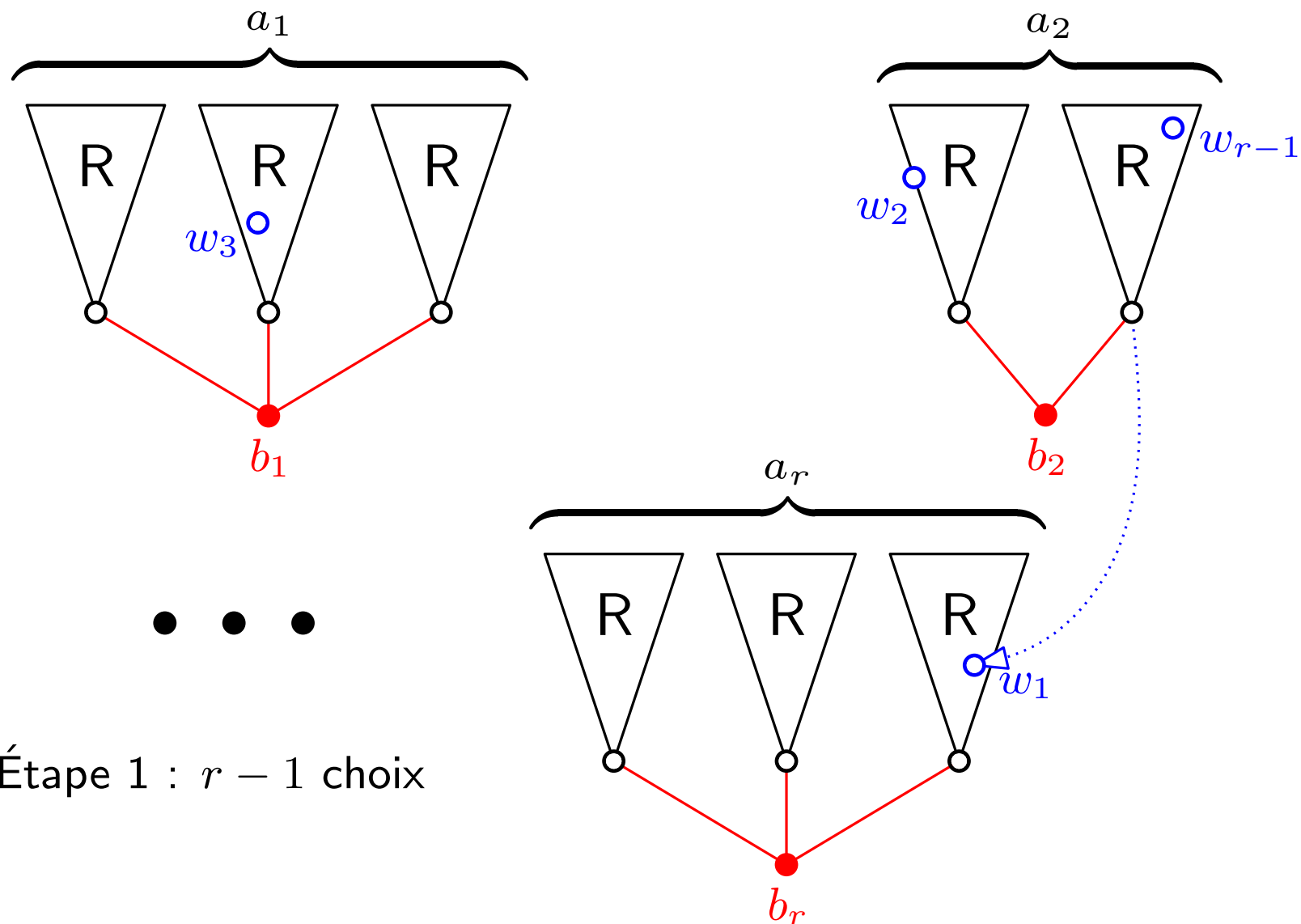
• • •



fusion

Cas biparti : preuve

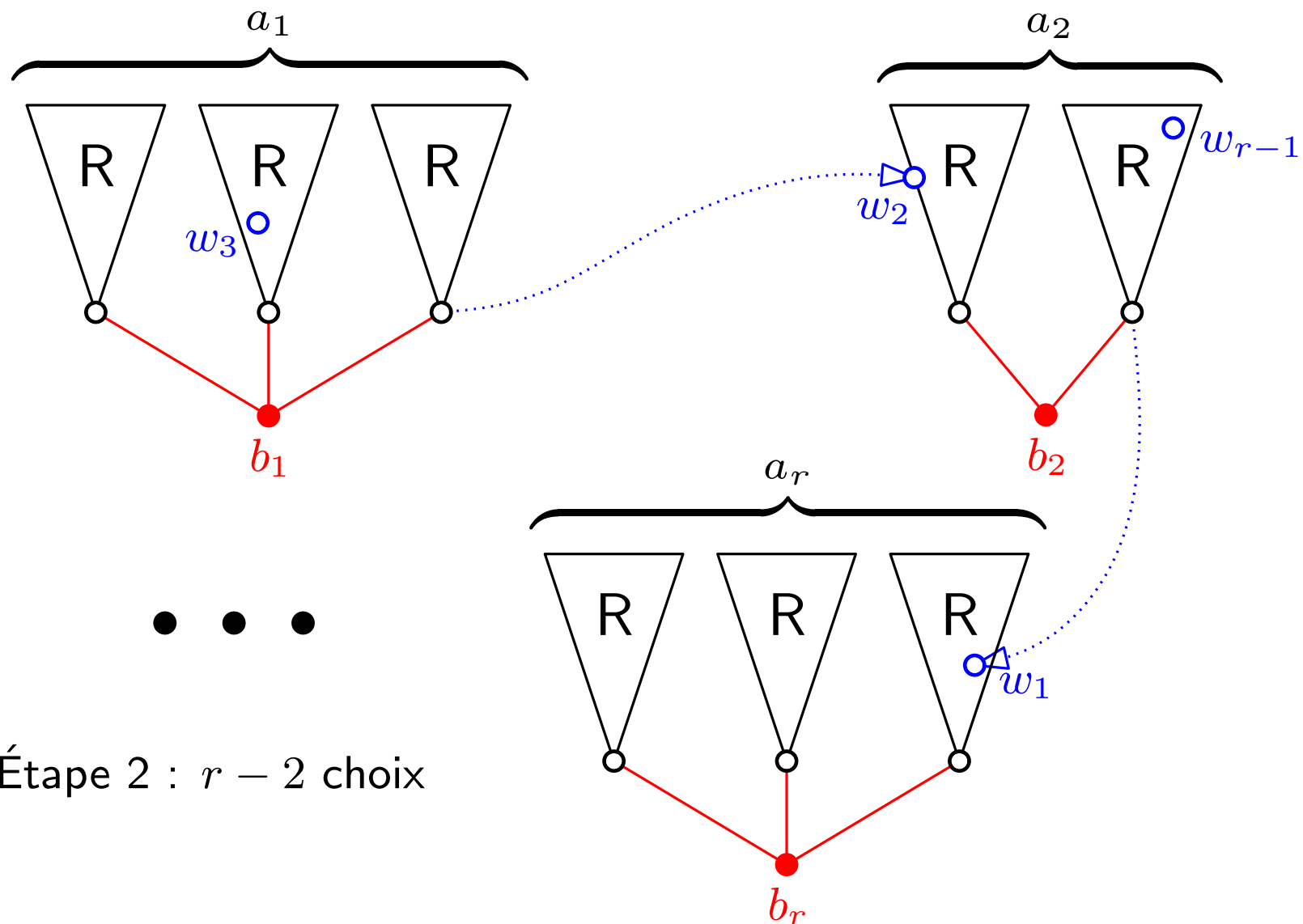
$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



Étape 1 : $r - 1$ choix

Cas biparti : preuve

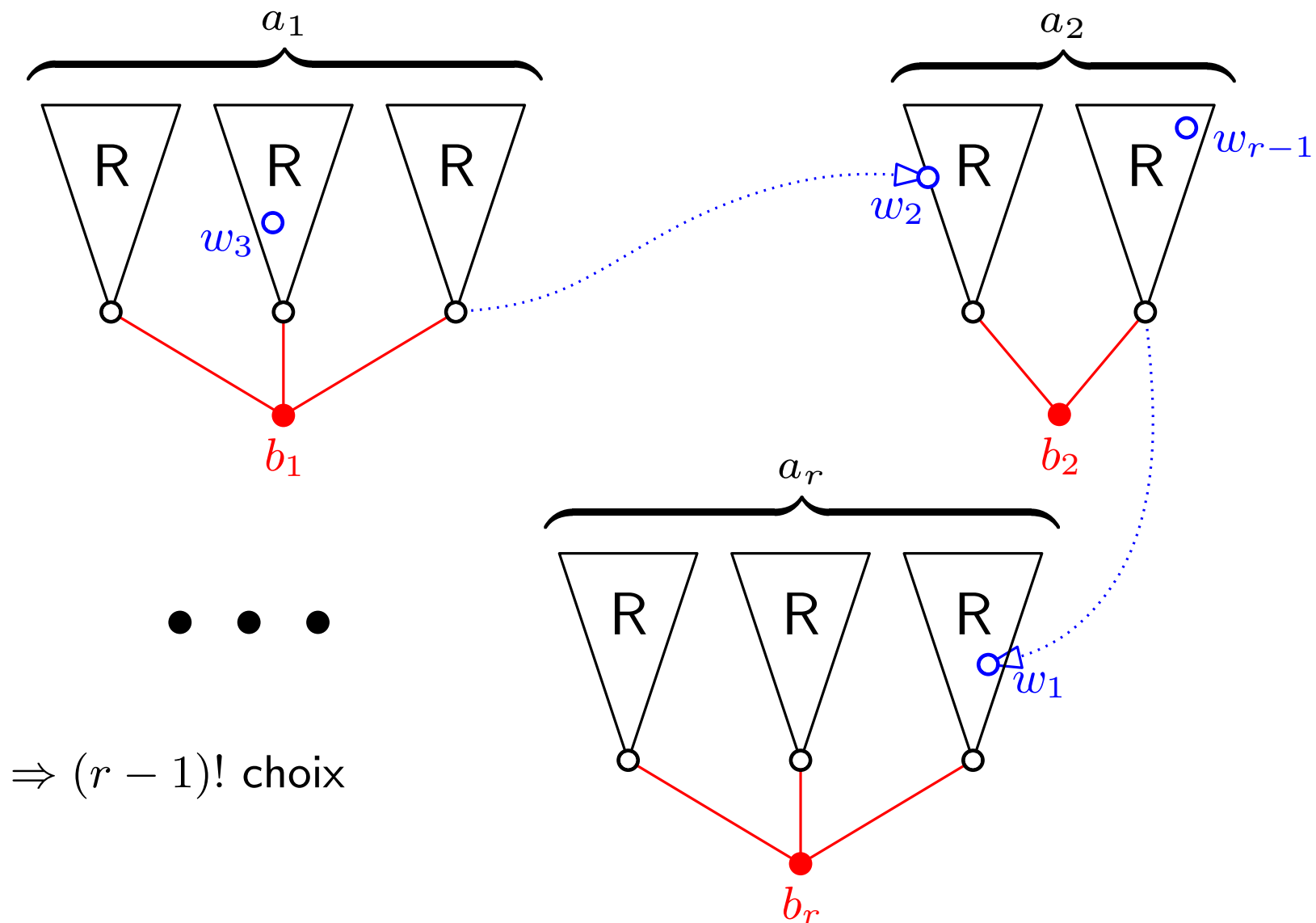
$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



Étape 2 : $r - 2$ choix

Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$



Cas biparti : preuve

$$\tilde{R}_{2a_1, \dots, 2a_r} = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s, \quad s = \sum_{i=1}^r a_i,$$

Dans un sens : on choisit la prochaine composante à fusionner

→ $r - i$ composantes possibles à l'étape i

⇒ $(r - 1)!$ choix.

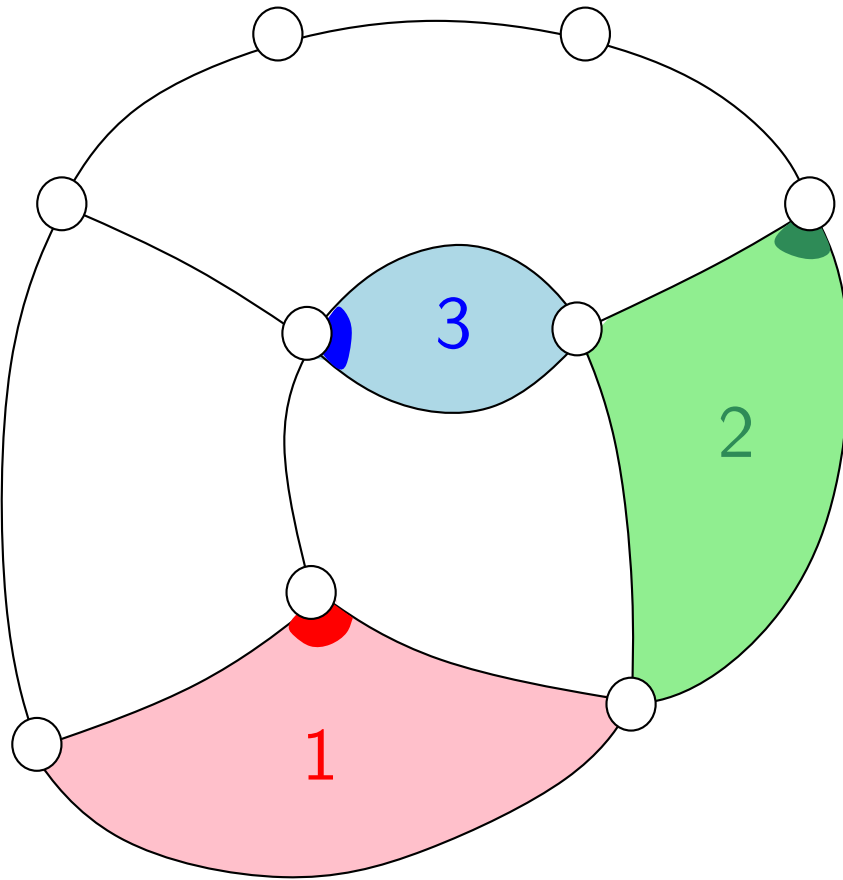
Dans l'autre sens : on choisit le prochain sommet blanc marqué

→ $r - i$ sommets rouges internes marqués à l'étape i

⇒ $(r - 1)!$ choix.

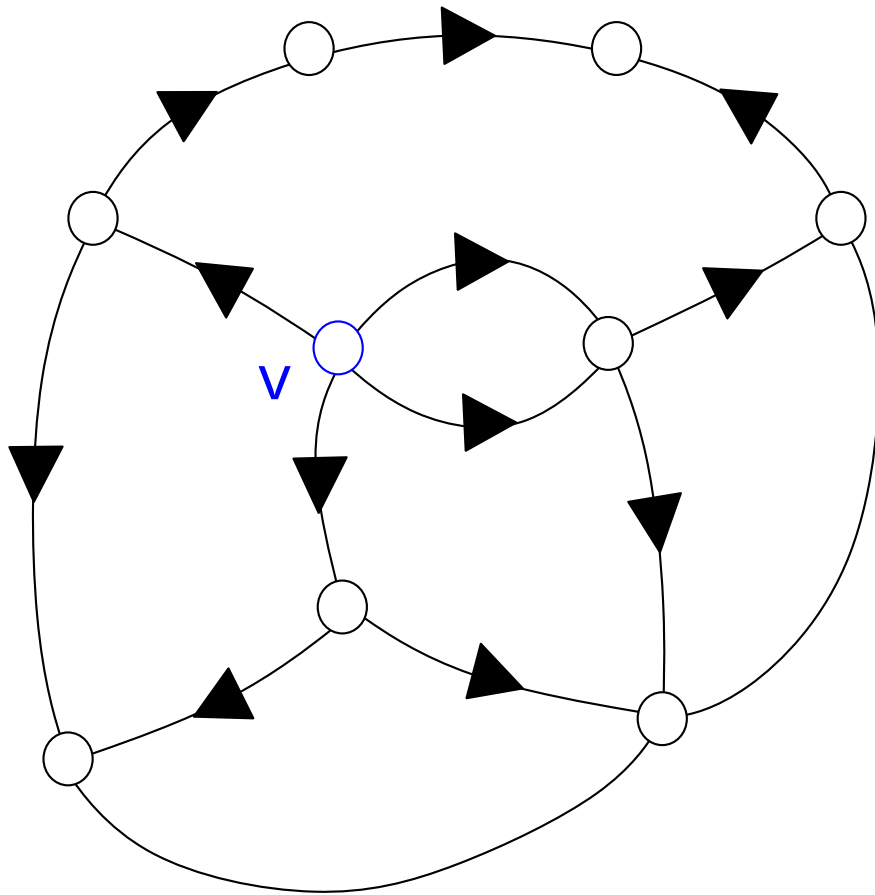
⇒ on obtient une correspondance $(r - 1)!$ -à- $(r - 1)!$
entre ces deux familles d'objets.

Cartes quasi-biparties



Carte quasi-bipartie :
au plus 2 bords de degré impair

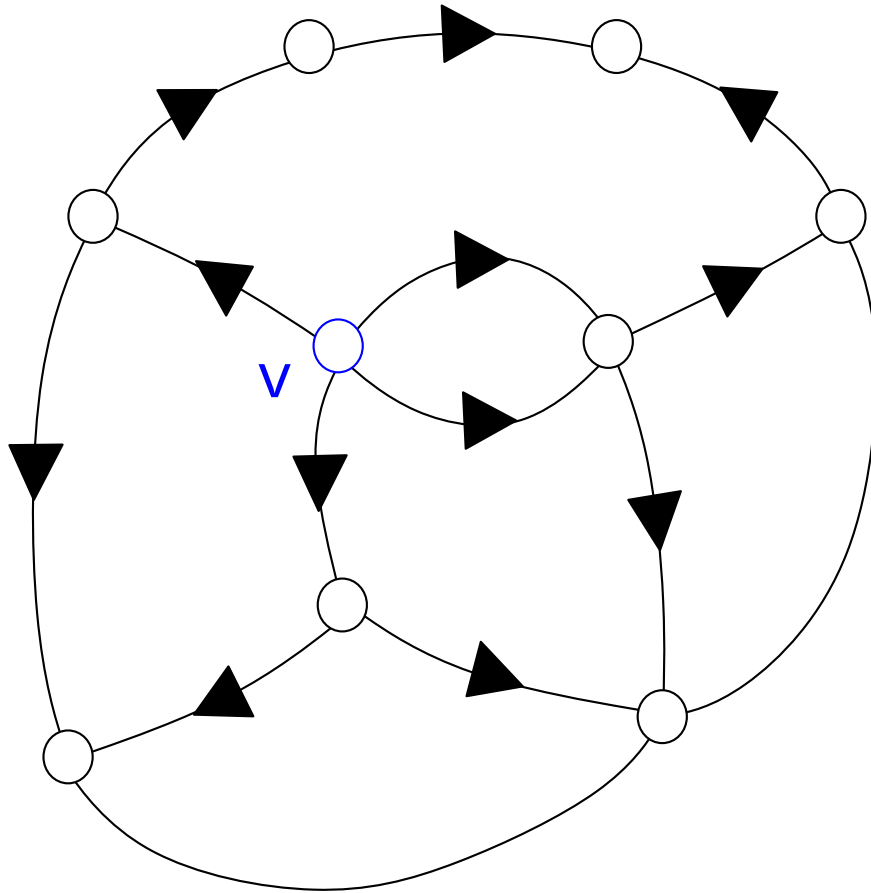
Cartes quasi-biparties



Carte quasi-bipartie

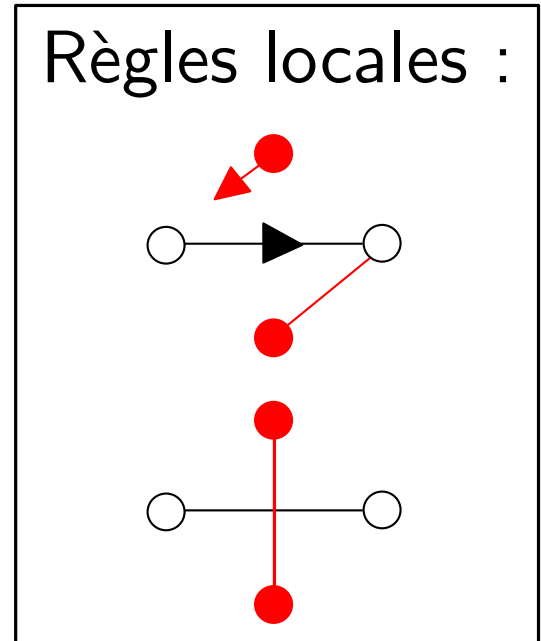
+ orientation géodésique partant de v

Cartes quasi-biparties

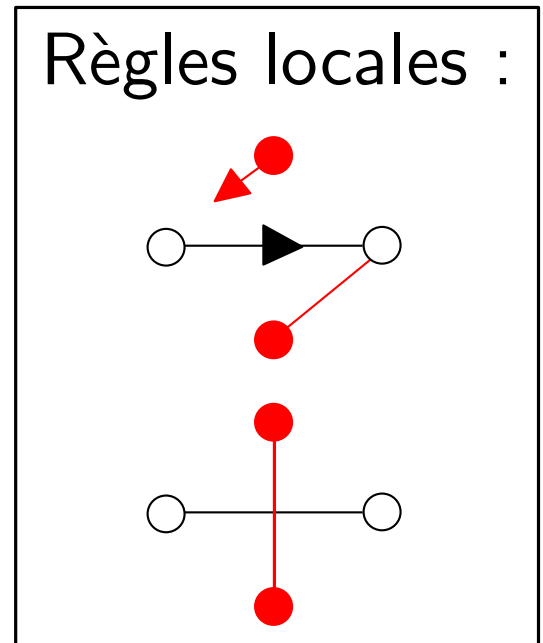
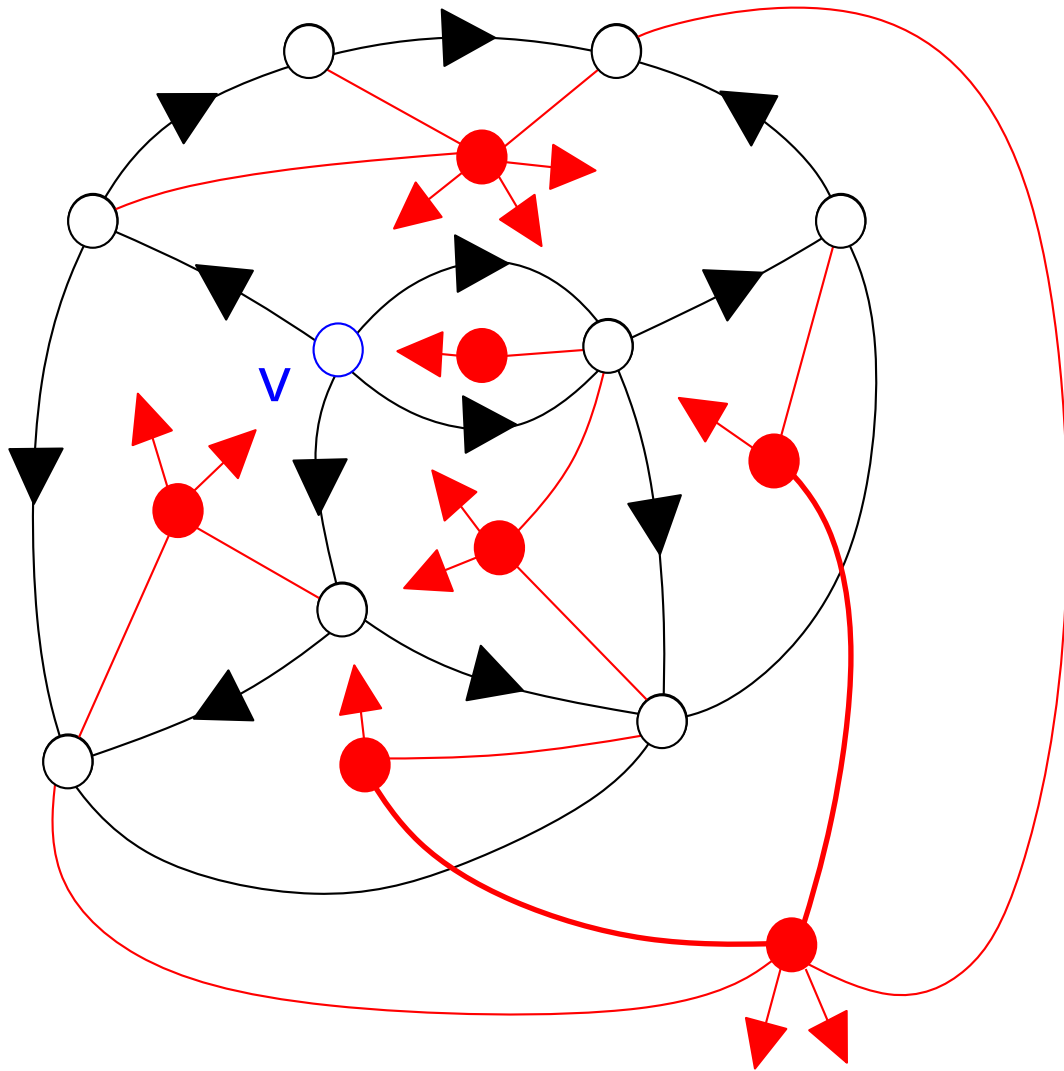


Carte quasi-bipartie

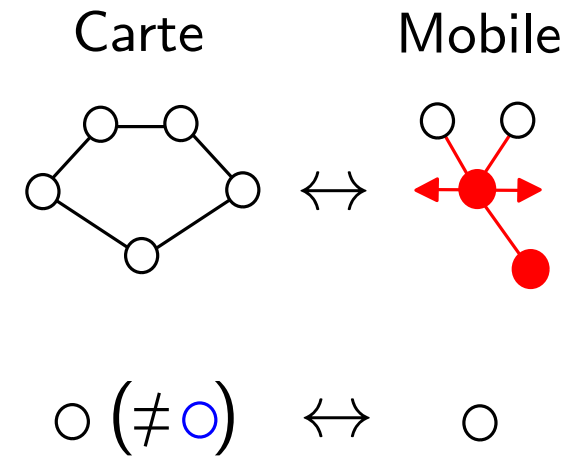
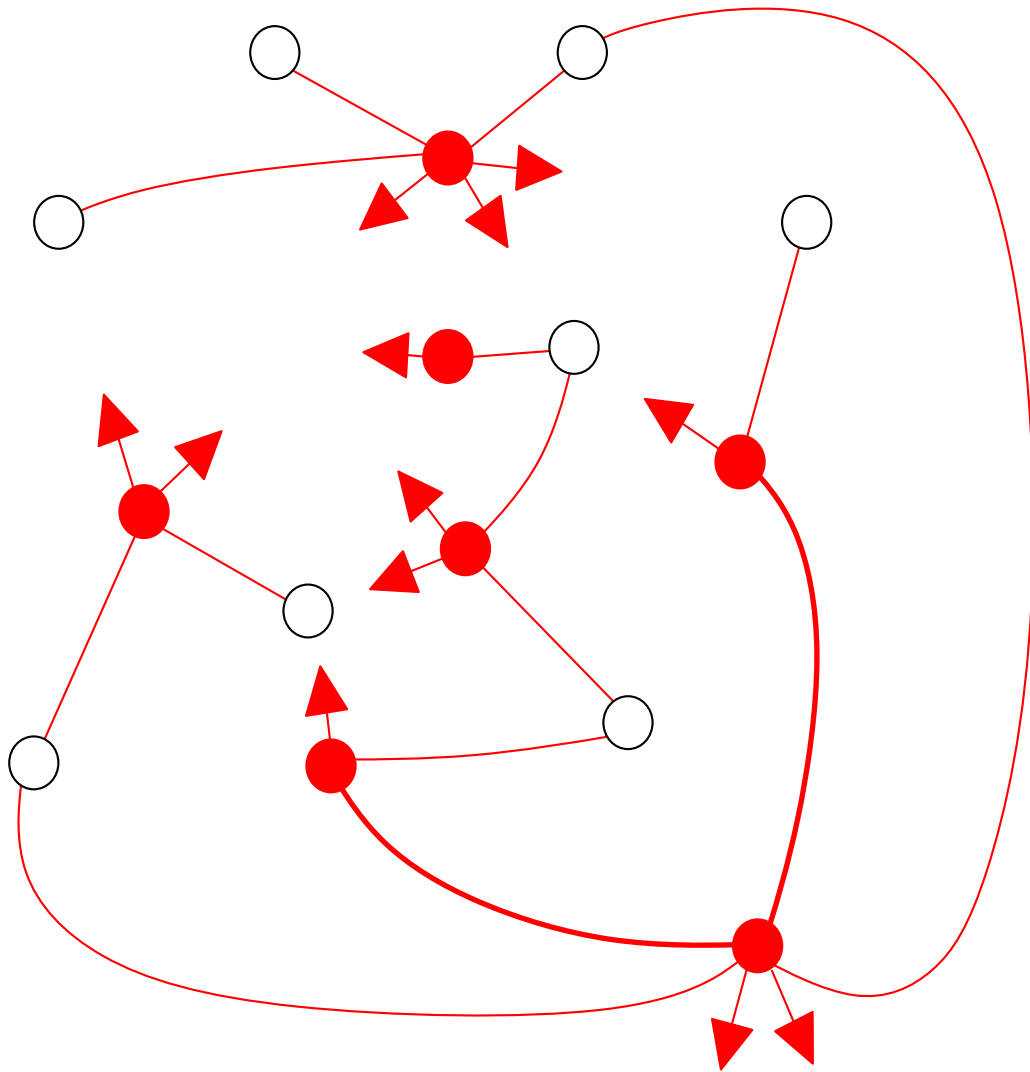
+ orientation géodésique partant de v



Cartes quasi-biparties



Cartes quasi-biparties



Mobile associé à la carte quasi-bipartie

Formule pour les cartes quasi-biparties

Soit $G_{l_1, \dots, l_r} \equiv G_{l_1, \dots, l_r}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à $\mathcal{G}_{l_1, \dots, l_r}$, où au plus 2 longueurs sont impaires.

Proposition : Soit $s = \frac{l_1 + \dots + l_r}{2}$, $\alpha(l) = \frac{l!}{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor! \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor!}$

$$\frac{d}{dt} G_{l_1, \dots, l_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r \alpha(l_i) \right) \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s$$

Formule pour les cartes quasi-biparties

Soit $G_{l_1, \dots, l_r} \equiv G_{l_1, \dots, l_r}(t; x_1, \dots)$, la série génératrice associée à $\mathcal{G}_{l_1, \dots, l_r}$, où au plus 2 longueurs sont impaires.

Proposition : Soit $s = \frac{l_1 + \dots + l_r}{2}$, $\alpha(l) = \frac{l!}{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor! \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor!}$

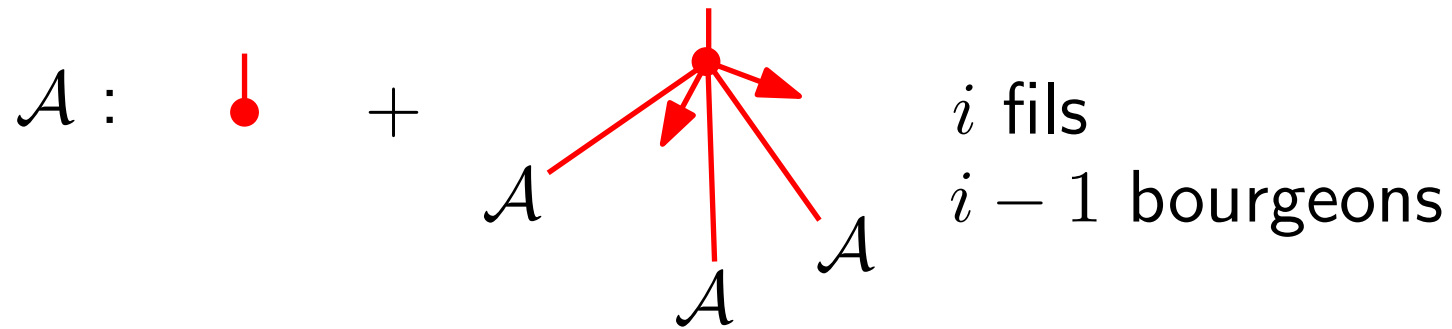
$$\frac{d}{dt} G_{l_1, \dots, l_r} = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^r \alpha(l_i) \right) \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} R^s$$

Preuve :

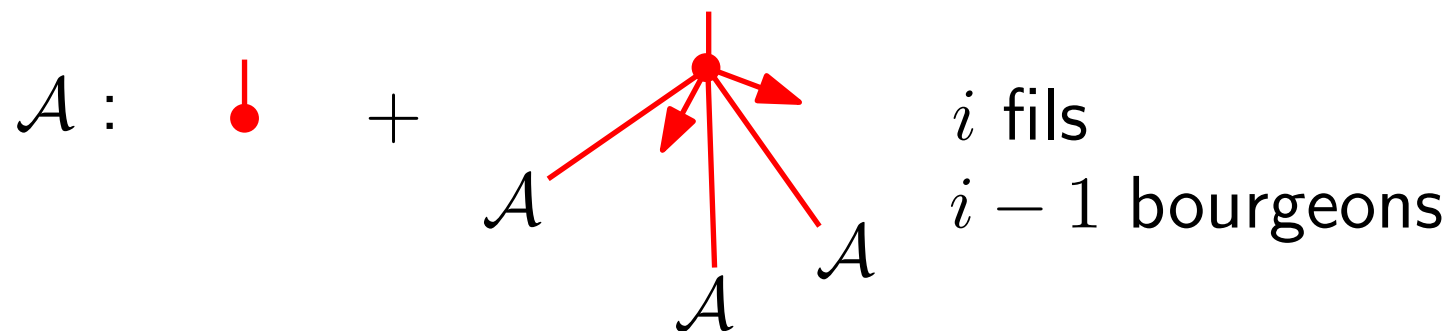
Idée (Cori, Chapuy) :

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1, l_3, \dots, l_r} \simeq \tilde{\mathcal{R}}_{2a_1, 2a_2, l_3, \dots, l_r}$$

Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

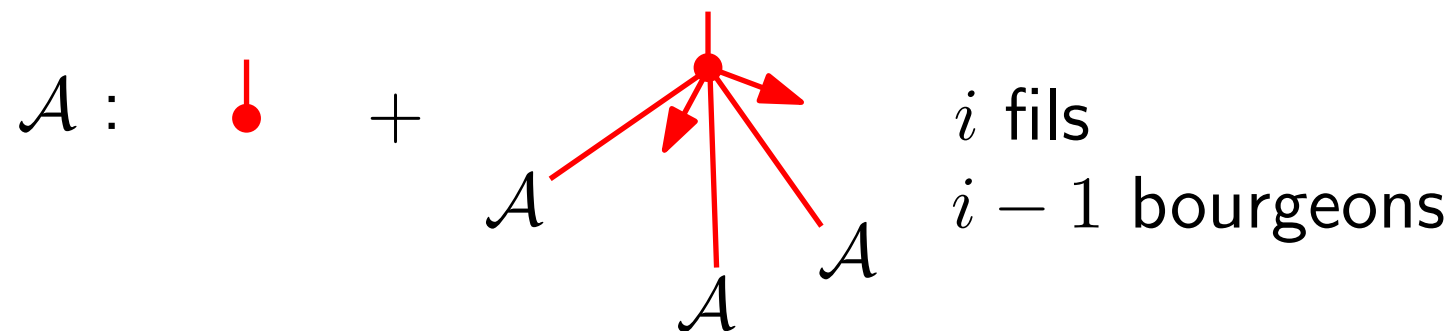


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)



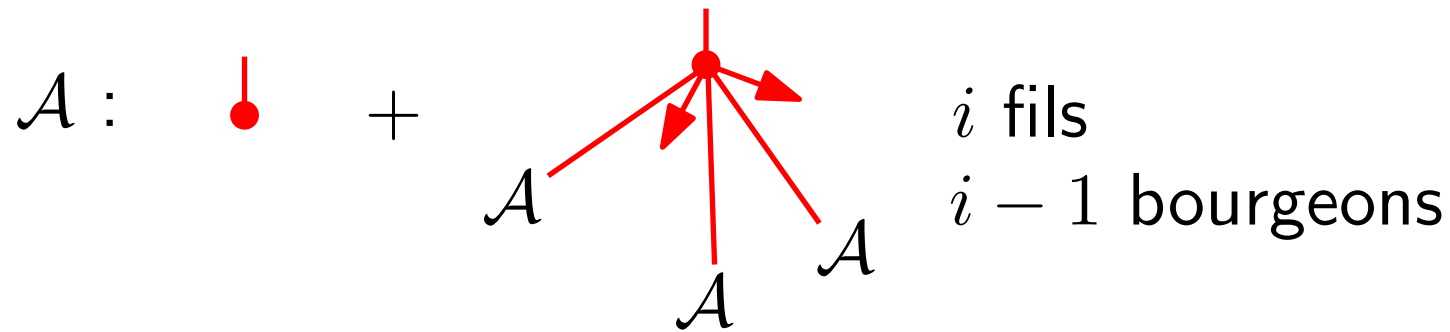
$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i$$

Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)



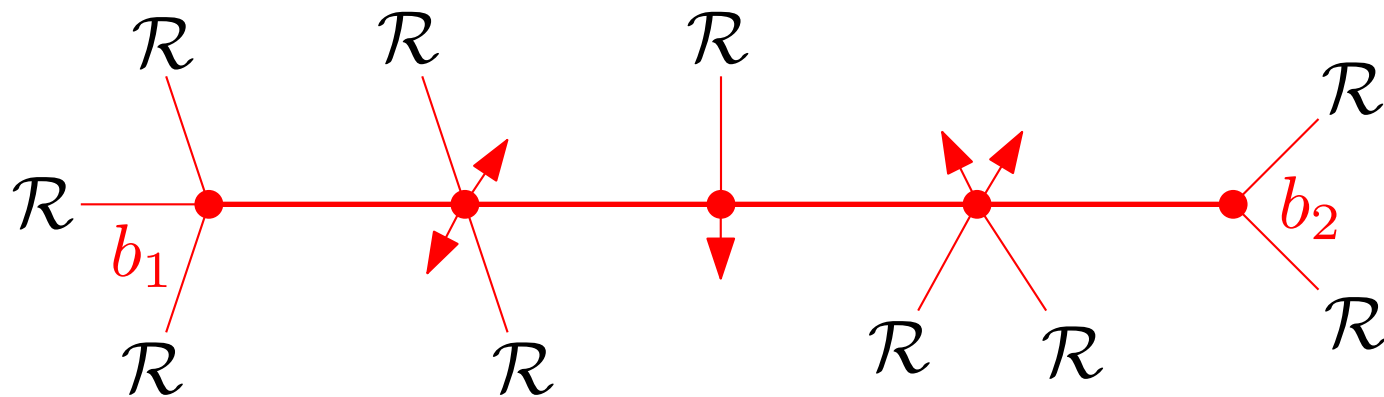
$$\mathcal{A} = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} \mathcal{A}^i = \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

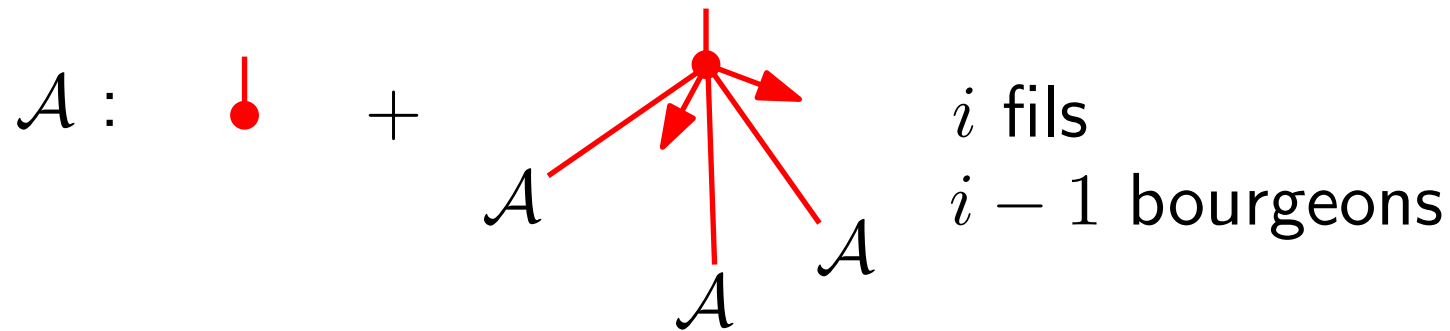


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow A \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

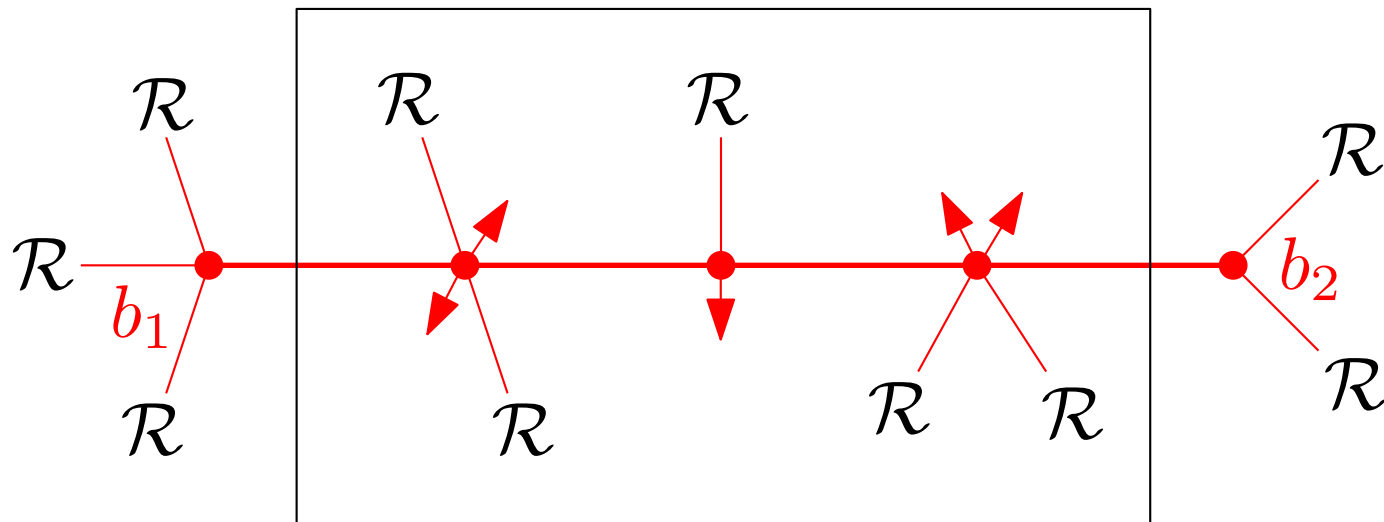


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

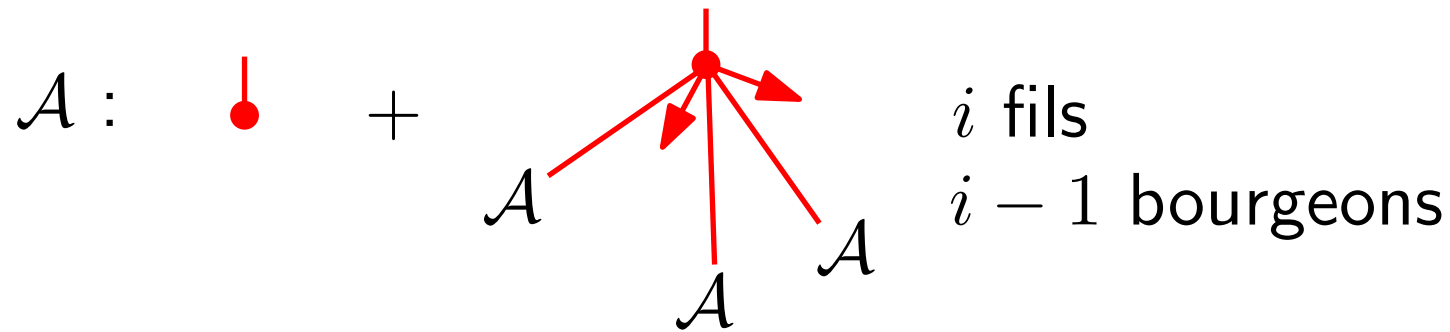


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

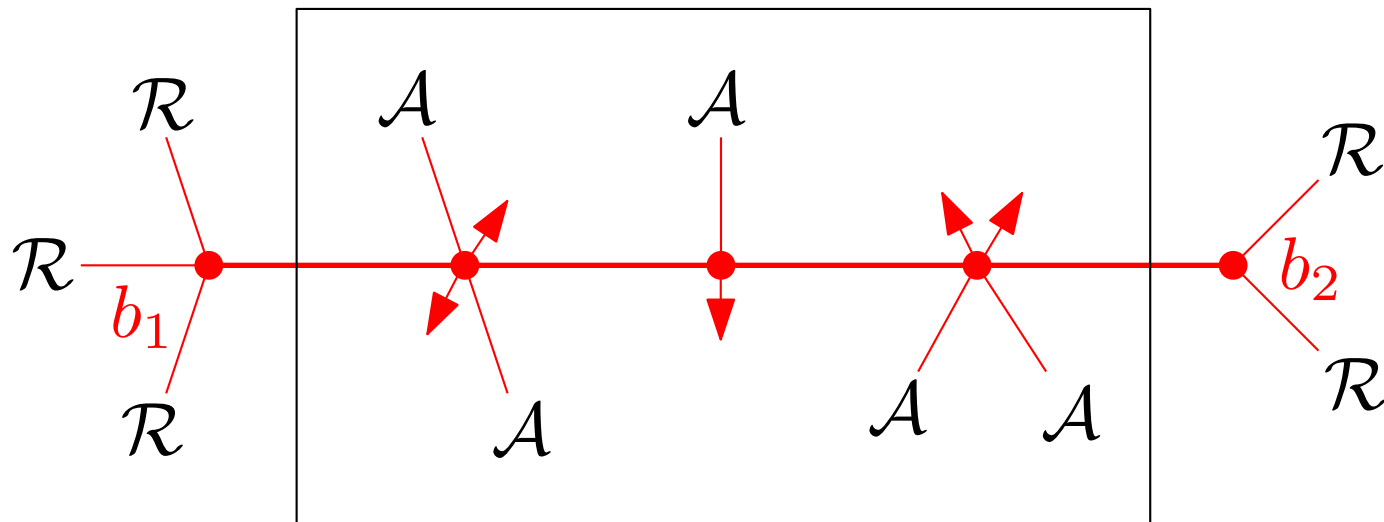


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

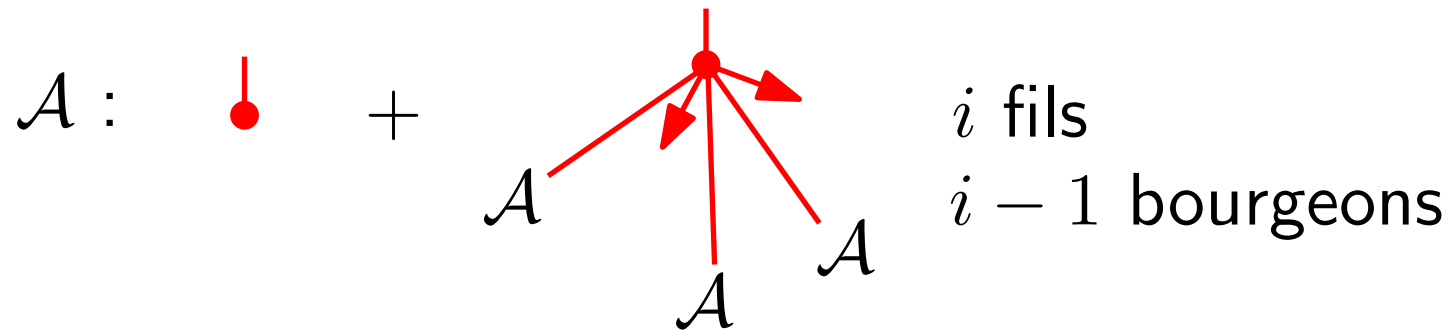


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

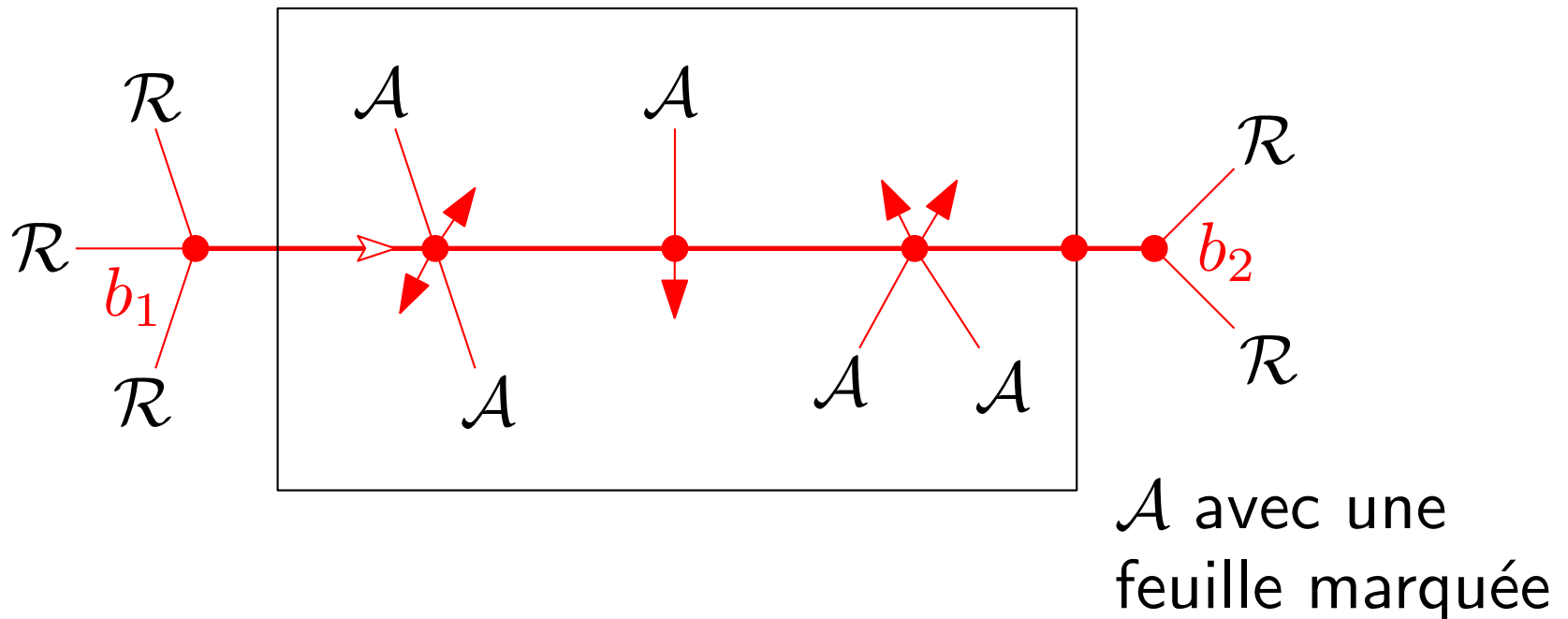


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

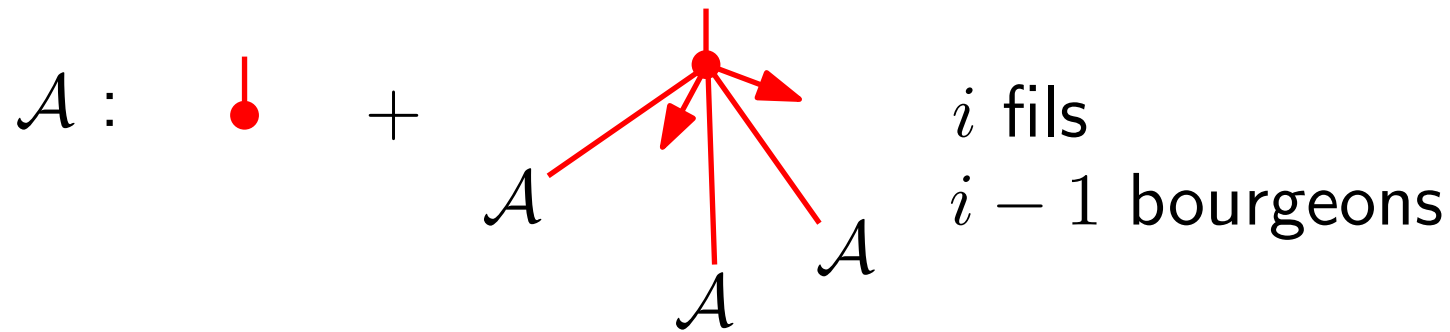


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

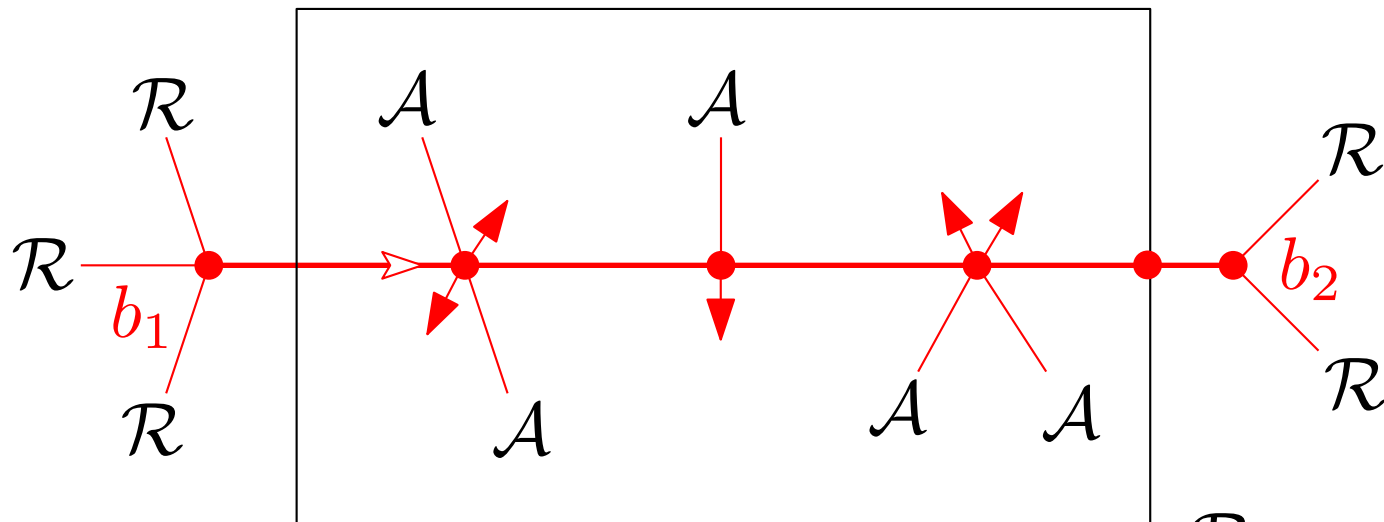


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)



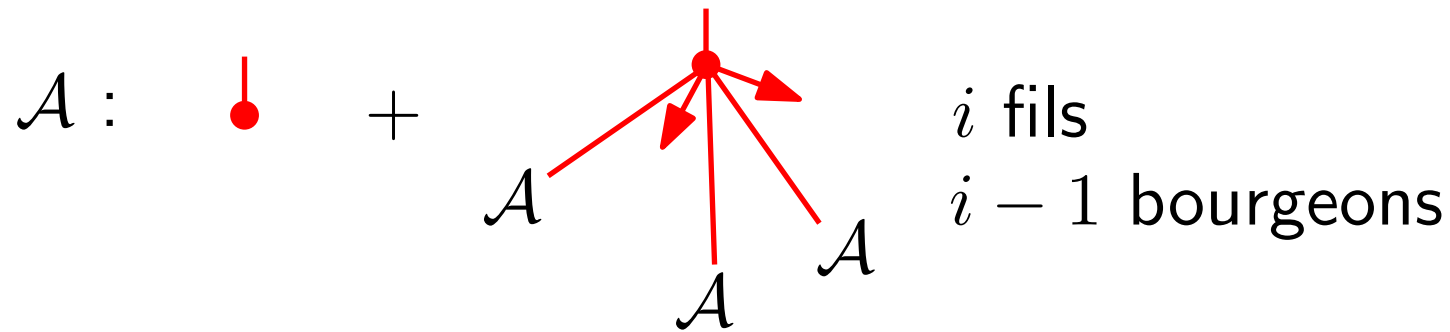
$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:



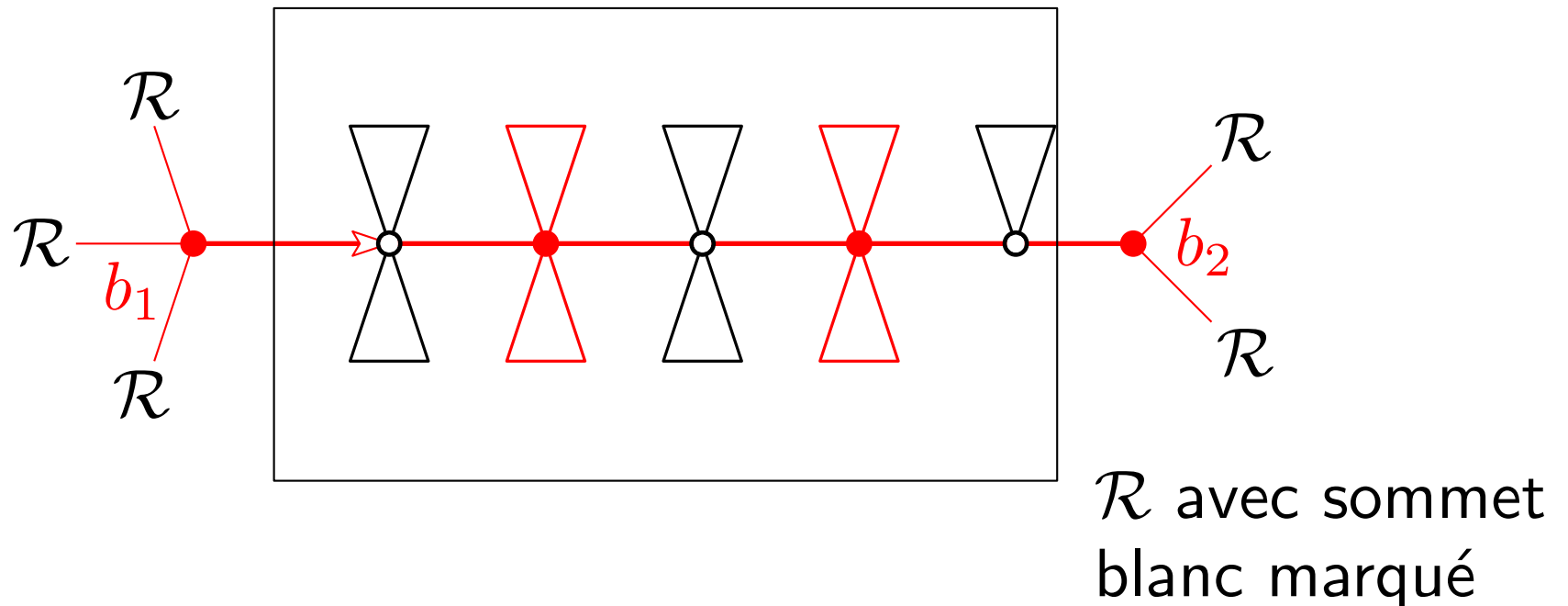
\mathcal{R} avec sommet blanc marqué

Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

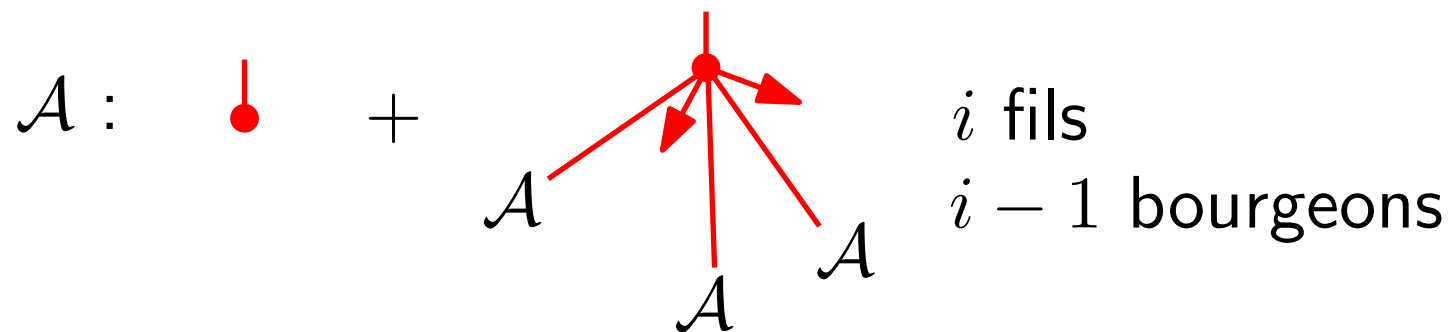


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

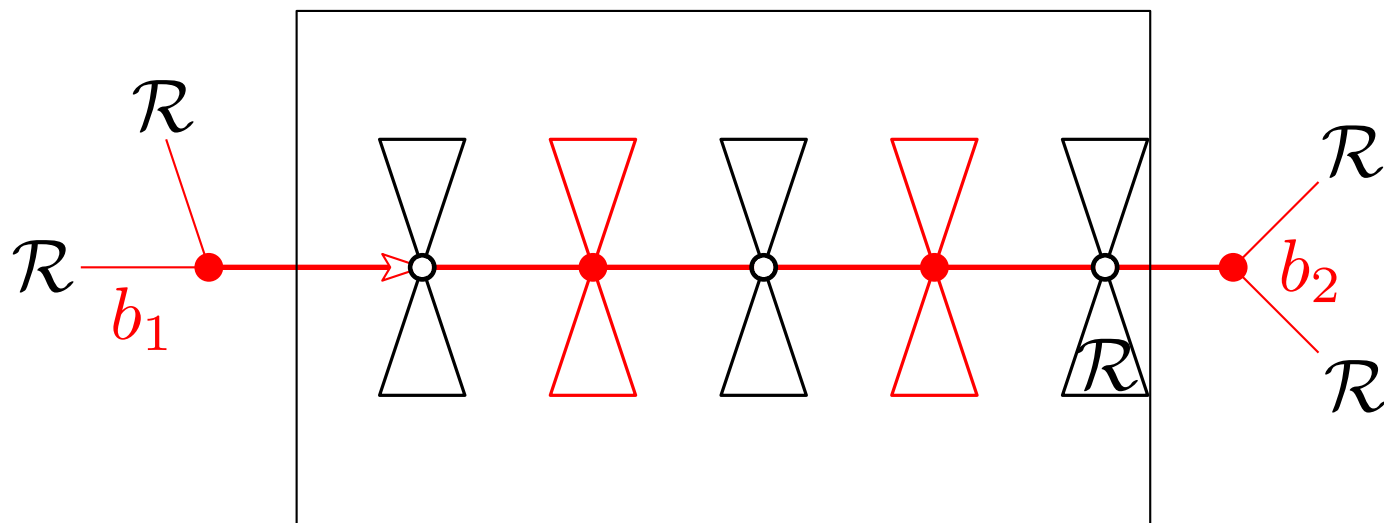


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)

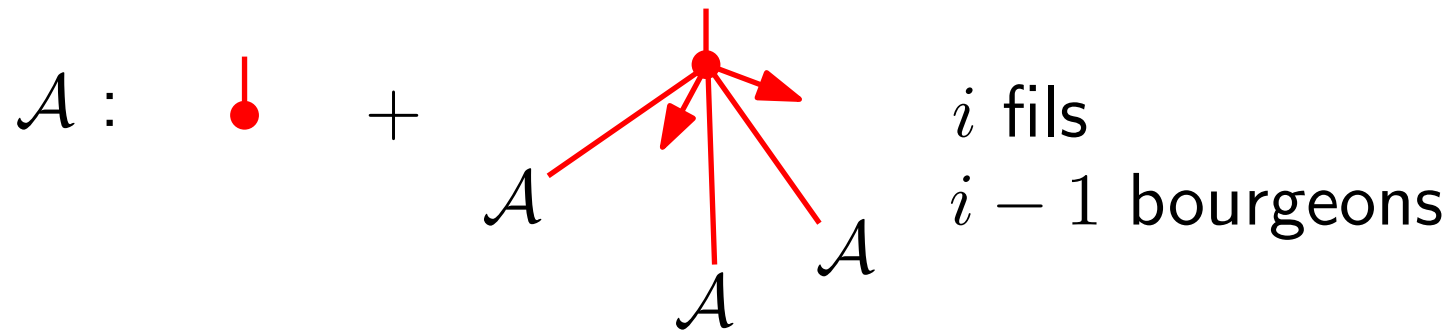


$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \quad \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:

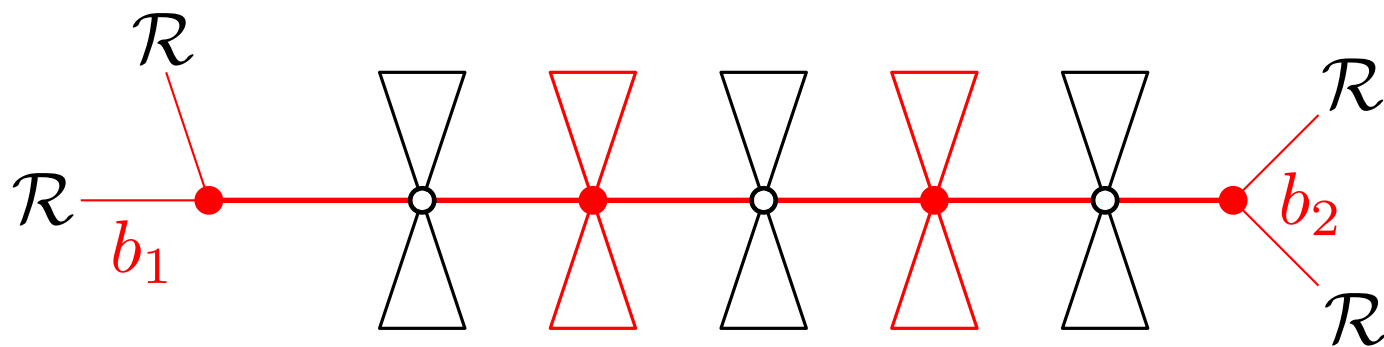


Arbres bourgeonnants (Schaeffer'97)



$$A = t + \sum_{i \geq 1} x_i \binom{2i-1}{i} A^i = R \quad \Leftrightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{R}$$

$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1}$:



$$\simeq \tilde{\mathcal{R}}_{2a_1, 2a_2}$$

Formule pour les cartes quasi-biparties

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2a_1+1, 2a_2-1, l_3, \dots, l_r} \simeq \tilde{\mathcal{R}}_{2a_1, 2a_2, l_3, \dots, l_r}$$