Vers un énoncé du critère de Gelfand

Thibaut BENJAMIN

2 juin 2016

Dans toute la suite, on considère des représentations sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique 0. Pour un groupe G, on note $\widehat{G}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G, et $\mathrm{Conj}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaisons de G.

D'une manière générale, on notera ρ une représentation irréductible, et μ une représentation quelconque. Etant donné une représentation μ donnée, on note χ_μ son caractère et V_μ le k-espace vectoriel dans lequel elle agit.

1 Représentation des Groupes Abéliens

Théorème 1. *Les représentations irréductibles des groupes abéliens sont toutes de dimension 1*

Démonstration. Avec la théorie des caractères, si G est abélien, $|\widehat{G}| = |\mathrm{Conj}(G)| = |G|$, et comme $\sum\limits_{\rho \in \widehat{G}} \chi_\rho(1)^2 = |G|$, on en déduit, que pour tout $\rho \in \widehat{G}\chi_\rho(1) = 1$ □

Le résultat est en fait généralisable aux représentations sur les algèbres :

Théorème 2. *Les représentations irréductibles d'une algèbre commutative de dimension finie sont de dimension 1*

Démonstration. Choisissons une base $\{a_1 \cdots a_n\}$ de notre algèbre, et (ρ, V_ρ) une représentation irréductible.

$\rho(a_1)$ est alors un endomorphisme du k-espace vectoriel V_ρ. k étant algébriquement clos, cet opérateur possède une valeur propre α_1, avec l'espace propre correspondant E_1. De plus $\rho(a_2)$ est un opérateur qui commute avec $\rho(a_1)$ (car $\rho(a_1)\rho(a_2) = \rho(a_1a_2) = \rho(a_2a_1) = rho(a_2)\rho(a_1)$). Ainsi E_1 est stable par $\rho(a_2)$, et $\rho(a_2)|E_1$ possède une valeur propre λ_2 d'espace propre associé $E_2 \subset E_1$.

En itérant ce processus, comme tous les $\rho(a_i)$ commutent entre eux, on construit un vecteur x qui est un vecteur propre pour tous les $\rho(a_i)$. Ainsi, $k.x$ est une sous-représentation de V_ρ de dimension 1, mais comme V_ρ est irréductible, cela implique $V_\rho = k.x$ et donc V_ρ est de dimension 1.

□

Exercice. *Calculer la table des caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

2 Composantes Isotypiques

Définition 1. *Soit (μ, V_μ) une représentation de G, V_μ est isomorphe en tant que représentation à une somme de la forme*

$$V_\mu = \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} V_\rho^{\oplus m_\rho}$$

Cette décomposition est unique et les $V_\rho^{\oplus m_\rho}$ sont appelées composantes isotypiques de μ, et m_ρ est appelé la multiplicité de ρ dans μ

Exemple. *Soit G un groupe et (ρ, V_ρ) une représentation irréductible de G. La composante isotypique de ρ dans la représentation régulière (à gauche) de G est $V_\rho^{\oplus \dim V_\rho}$*

Définition 2. *On dit qu'une représentation est sans multiplicité, si les m_ρ sont égaux à 0 ou 1*

Exemple. *La représentation régulière d'un groupe commutatif est sans multiplicité*

Proposition 1. *L'opérateur* Hom *est compatible aux sommes directes à gauche et à droite, c'est à dire*

— *Soient trois représentations V_1, V_2, W alors $\mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, W) = \mathrm{Hom}_G(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_2, W)$*

— *Soient trois représentations V, W_1, W_2 alors $\mathrm{Hom}_G(V, W_1 \oplus W_2) = \mathrm{Hom}_G(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W_2)$*

Démonstration.

— Soit $f \in \mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, W)$, on note $f_1 = f|_{V_1}$ et $f_2 = f|_{V_2}$ de telle sorte que $f = f_1 + f_2$, et on vérifie aisément que $f_1 \in \mathrm{Hom}_G(V_1, W)$ et $f_2 \in \mathrm{Hom}_G(V_2, W)$. Réciproquement, si $f_1 \in \mathrm{Hom}_G(V_1, W)$ et $f_2 \in \mathrm{Hom}_G(V_2, W)$, alors $f_1 + f_2 \in \mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, W)$

— De même, soit $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W_1 \oplus W_2)$ et $x \in V$, alors $f(x)$ s'écrite de manière unique $f(x) = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in W_1$ et $y_2 \in W_2$. Posons alors $f_1(x) = y_1$ et $f_2(x) = y_2$, on vérifie alors que f_1 et f_2 vérifient les bonnes propriétés. La réciproque est claire.

□

Théorème 3. $m_\rho = \dim \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\mu)$

Démonstration. En utilisant le lemme de Schur :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(V_\rho, \mu) &= \mathrm{Hom}_G(V_\rho, \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} V_\sigma^{\oplus m_\sigma}) \\
&= \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\sigma)^{\oplus m_\sigma} \\
&= \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\rho)^{\oplus m_\rho} \qquad \text{car } \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\sigma) = 0 \text{ si } \rho \text{ et } \sigma \text{ ne sont pas isomorphes} \\
&= k^{m_\rho}
\end{aligned}$$

□

Ce théorème montre que calculer les composantes isotypiques de μ revient à calculer les espaces $\mathrm{Hom}_G(\rho, \alpha)$

3 Le Commutant d'une Représentation

Définition 3. *Si V est une représentation,* $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ *est appelé le commutant de* V*.*

On va donner une expression explicite du commutant d'une représentation en fonction de ses composantes isotypiques.

Théorème 4. *Si (ρ, V_ρ) est une représentation irréductible,* $\mathrm{Hom}_G(V_\rho^{\oplus n}, V_\rho^{\oplus l}) = \mathcal{M}_{n,l}(k)$

Démonstration. A nouveau avec le lemme de Schur :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(V_\rho^{\oplus n}, V_\rho^{\oplus k}) &= \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)^{\oplus(n\times k)} \\ &= k^{n\times l} \\ &= \mathcal{M}_{n,l}(k)\end{aligned}$$

□

Théorème 5. *Si V_μ est la représentation de G caractérisée par les multiplicités $\{m_\rho\}$, alors*

$$\mathrm{Hom}_G(V_\mu, V_\mu) = \bigoplus_{\rho\in\widehat{G}} \mathcal{M}_{m_\rho}(k)$$

De plus, la composition des endomorphismes dans $\mathrm{Hom}_G(V_\mu, V_\mu)$ *correspond au produit matriciel.*

Démonstration. De la même façon, on décompose V_μ en composantes isotypiques et on remplace cette expression dans $\mathrm{Hom}_G(V_\mu, V_\mu)$ □

Théorème 6. *V_μ est sans multiplicité si et seulement si* $\mathrm{Hom}_G(V_\mu, V_\mu)$ *est commutatif*

Démonstration. Avec la description de commutant que l'on a donné, il est clair que ce dernier commute si et seulement si tous les m_ρ sont égaux à 0 ou 1. □

4 Restriction

Définition 4. *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et (ρ, V_ρ) une représentation de G. Alors en regardant uniquement l'action de H sur V_ρ par ρ, on obtient une représentation de H que l'on appelle restriction de (ρ, V_ρ) sur H, notée* $\mathrm{Res}_H^G V_\rho$*. Formellement,*

$$\mathrm{Res}_H^G V_\rho = (\rho|_H, V_\rho)$$

Exercice.
Calculer les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ restreintes à $\mathfrak{S}_3$, et celles de $\mathfrak{S}_5$ restreintes à $\mathfrak{S}_4$. Donner la décomposition en composantes isotypiques. Quelles sont les multiplicités ?

Définition 5. *Lorsque toutes les représentations irréductible de G sur H ont une restriction sur H sans multiplicité, on dit que H est sans multiplicité dans G*

5 Critère de Gelfand

Définition 6. *On note* $Z = Z(\mathbb{K}[G], \mathbb{K}[H]) = \{x \in \mathbb{K}[G], \forall y \in \mathbb{K}[H], xy = yx\}$ *le centralisateur de* $\mathbb{K}[H]$ *dans* $\mathbb{K}[G]$

Théorème 7 (Critère de Gelfand, admis)**.** *Si* Z *est commutatif si et seulement si* H *est sans multiplicité dans* G

Remarque. *L'espace* Z *est en fait isomorphe à* $Hom_H(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Reg}_G), \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Reg}_G))$*. Cela fait le lien avec le théorème précédent.*