Exposé - GdT Représentations groupe symétrique

J. Gay

18 mai 2016

1 Caractères

Définition 1.1. *Caractère*

Propriété 1.2. *Soit χ caractère d'une représentation ρ de degré n.*

1. $\chi(1) = n$
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ *pour* $s \in G$
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ *pour* $s, t \in G$.
4. *Si ρ et ρ' son équivalentes,* $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$
5. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$.

Démonstration. Faire la première à l'oral, exo pour les autres. □

Exemple 1.3. Faire table des caractères (définir) de $\mathfrak{S}_3$ en expliquant difficulté pour vérifier qu'il n'y en a pas plus, et que celle de dimension 2 n'est peut-être pas irréductible.

Exemple 1.4. Commencer celle de $\mathfrak{S}_4$ en demandant ce qu'on connaît comme action de $\mathfrak{S}_4$.

Proposition 1.5. *Lemme de Schur*

Démonstration. Faire la preuve en commun, voir que ker et Im sous-représentation, importance du corps algébriquement clos... □

Montrer les deux résultats sur les fonctions et sur les matrices, peut-être juste une slide, juste dire que ça permet d'avoir ça de façon calculatoire et pas intéressante :

Corollaire 1.6. *Expression fonctionnelle et matricielle*

Définition 1.7. *Fonctions centrale. De dimension nombre de classes de conjugaison. Produit scalaire*

Corollaire 1.8. *Les caractères des représentations irréductibles forment une famille orthonormale dans les fonctions centrales. Plus précisément :*

— *Si χ irréductible,* $(\chi|\chi) = 1$

— *Si χ et χ' irr non iso,* $(\chi|\chi') = 0$.

En particulier nombre fini de représentations irréductibles $\leq$ nombre classe conj. Et les lignes du tableau sont orthonormales à condition de tenir compte de l'effectif de chacune des classes de conjugaison.

Exemple 1.9. Retour à l'exemple pour voir l'orthogonalité.

Théorème 1.10. *Soit V représentation de G de caractère χ avec $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ décomposition en somme directe d'irr.*
Si W est une représentation irr de caractère φ le nombre de W_i isomorphe à W est égal à $(\chi|\varphi)$. En particulier ne dépend pas de la décomposition.

Démonstration. immédiate, à l'oral... □

Corollaire 1.11. *Deux représentations de même caractère sont isomorphes.*
χ irréductible ssi $(\chi|\chi) = 1$.

Exemple 1.12. Retour à l'exemple de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ pour conclure à l'irréductibilité des caractères de l'action sur le triangle/cube/tétraèdre...

2 Représentation régulière

Définition 2.1. *Représentation régulière*

On fait ces deux exo en commun :

Exercice 2.2. *Caractère de la représentation régulière*

Exercice 2.3. *Décomposition de la représentation régulière : chaque irréductible un nombre de fois égal à son degré.*

Corollaire 2.4. *Les degrés vérifient $\sum n_i^2 = |G|$*
Si $s \in G, \sum n_i \chi_i(s) = 0$

Démonstration. Exo : clair comme $r_G = \sum n_i \chi_i$. □

Exemple 2.5. Regarder s'il nous manque ou pas des représentations dans le cas de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_3$.

3 Nombre repr irr

Théorème 3.1. *Les caractères irr forment BON des fonctions centrale.*

Démonstration. idée à l'oral : une représentation de caractère orthogonale au vect des caractère irr est donc de caractère orthogonal à toute représentation, dont la régulière. En réécrivant on obtient que la fonction est nulle. □

Corollaire 3.2. *Le nombre de repr irr est le nombre de classe de conj.*

Proposition 3.3. *Les colonnes sont orthogonales pour le produit scalaire classique, et la norme d'une colonne est le cardinal du groupe divisé par le cardinal de la classe de conjugaison de la colonne.*

Exemple 3.4. Refaire le cas de $\mathfrak{S}_4$ armé de tout cela : deux repr de degré 1. Regarder celle sur $\mathbb{C}^4$, lui retrancher l'identité. Tordre par ε. Faire le calcul pour la dernière.

Proposition 3.5. *G est commutatif ssi toutes ses représentations sont de degré* 1

Démonstration. En commun : il suffit d'écrire la somme des carrés et de se souvenir que chaque classe de conjugaison est triviale. □

Corollaire 3.6. *Les représentations de degré 1 d'un groupe G sont celles de $G/D(G)$ en particulier $\mathfrak{S}_n$ n'a que deux représentations de degré 1.*

Exemple 3.7. Table caractère groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et si c'est pas immédiat, le faire pour le groupe cyclique.

4 Exemples et exercice

4.1 Représentation de permutation

La définir. Qui est $\chi(g)$? ($= |X^g|$)

Exercice 4.1 (Rauch p57)**.** *La multiplicité du caractère identité est égal au nombre d'orbites sous l'action du groupe G. (donc si transitif : 1, cf. exemple $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$.)*

Exercice 4.2 (Rauch p58)**.** *Soit m_i multiplicité des caractères irréductibles pour une représentation de permutation de G sur X. Alors $\sum m_i^2$ est le nombre d'orbites de $X \times X$ sous G. (Quand transitif, on a déjà la diagonale comme orbite. Si doublement transitif on a aussi son complémentaire. D'où la représentation de permutation est somme directe de l'identité et d'une autre irréductible : cp. avec $\mathfrak{S}_4$).*

4.2 Autres groupes

Leur donner quelques détails sur les groupes pour pouvoir le résoudre, comme les classes de conjugaison, les groupes dérivés...

Exercice 4.3. *Table caractère $\mathfrak{A}_4$*

Exercice 4.4. *Table caractère $\mathfrak{D}_4$*

Exercice 4.5. *Table caractère $\mathbb{H}_8$*

Remarque 4.6. Groupe différents peuvent avoir même table caractère.