Exposé - GdT Représentations groupe symétrique

J. Gay

18 mai 2016

1 Caractères

Défin t on 1.1. *Caractère*

Propr été 1.2. *Soit χ caractère d'une représentation ρ de degré n.*

1. $\chi(1) = n$
2. $\chi(s\ ^{1}) = \overline{\chi(s)}$ *pour* $s \in G$
3. $\chi(tst\ ^{1}) = \chi(s)$ *pour* $s, t \in G$.
4. *Si ρ et ρ^0 son équivalentes,* $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$
5. $\chi_{\rho\ \ \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$.

Démonstration. Faire la première à l'oral, exo pour les au res. □

Exemple 1.3. Faire able des carac ères (définir) de $\mathfrak{S}_3$ en expliquan difficul é pour vérifier qu'il n'y en a pas plus, e que celle de dimension 2 n'es peu -ê re pas irréduc ible.

Exemple 1.4. Commencer celle de $\mathfrak{S}_4$ en demandan ce qu'on connaî comme ac ion de $\mathfrak{S}_4$.

Propos t on 1.5. *Lemme de Schur*

Démonstration. Faire la preuve en commun, voir que ker e Im sous-représen a ion, impor ance du corps algébriquemen clos... □

Mon rer les deux résul a s sur les fonc ions e sur les ma rices, peu -ê re jus e une slide, jus e dire que ça perme d'avoir ça de façon calcula oire e pas in éressan e :

Corolla re 1.6. *Expression fonctionnelle et matricielle*

Défin t on 1.7. *Fonctions centrale. De dimension nombre de classes de conjugaison. Produit scalaire*

Corolla re 1.8. *Les caractères des représentations irréductibles forment une famille orthonormale dans les fonctions centrales. Plus précisément :*

— *Si χ irréductible,* $(\chi|\chi) = 1$
— *Si χ et χ^0 irr non iso,* $(\chi|\chi^0) = 0$.

En particulier nombre fini de représentations irréductibles $\leq$ nombre classe conj. Et les lignes du tableau sont orthonormales à condition de tenir compte de l'e ectif de chacune des classes de conjugaison.

Exemple 1.9. Re our à l'exemple pour voir l'or hogonali é.

Théorème 1.10. *Soit V*

Démonstration. En commun : il suffi d'écrire la somme des carrés e de se souvenir que chaque classe de conjugaison es   riviale. □

Corolla re 3.6. *Les représentations de degré* 1 *d'un groupe* G *sont celles de* $G/D(G)$ *en particulier* $\mathfrak{S}_n$ *n'a que deux représentations de degré* 1*.*

Exemple 3.7. Table carac ère groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e si c'es pas immédia , le faire pour le groupe cyclique.

4 Exemples et exercice

4.1 Représentation de permutation

La définir. Qui es $\chi(g)$? $(= |X^g|)$

Exerc ce 4.1 (Rauch p57)**.** *La multiplicité du caractère identité est égal au nombre d'orbites sous l'action du groupe* G*. (donc si transitif :* 1*, cf. exemple* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $[\![1, n]\!]$*.)*

Exerc ce 4.2 (Rauch p58)**.** *Soit* m_i *multiplicité des caractères irréductibles pour une représentation de permutation de* G *sur* X*. Alors* $\sum m_i^2$ *est le nombre d'orbites de* $X \times X$ *sous* G*. (Quand transitif, on a déjà la diagonale comme orbite. Si doublement transitif on a aussi son complémentaire. D'où la représentation de permutation est somme directe de l'identité et d'une autre irréductible : cp. avec* $\mathfrak{S}_4$*).*

4.2 Autres groupes

Leur donner quelques dé ails sur les groupes pour pouvoir le résoudre, comme les classes de conjugaison, les groupes dérivés...

Exerc ce 4.3. *Table caractère* $\mathfrak{A}_4$

Exerc ce 4.4. *Table caractère* $\mathfrak{D}_4$

Exerc ce 4.5. *Table caractère* $\mathbb{H}_8$

Remarque 4.6. Groupe différen s peuven avoir même able carac ère.