

# CHEMINS DANS LE QUART DE PLAN : PREMIÈRE PARTIE

MIREILLE BOUSQUET-MÉLOU

## 1. Introduction

On considère des chemins dans  $\mathbb{Z}^2$ , issus de  $(0, 0)$ , et prenant leurs pas dans un ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$  fini, par exemple  $\mathcal{S} = \{(1, -2), (2, 4), (-1, -1)\}$ .

On cherche à dénombrer des familles de chemins selon leur longueur (le nombre de pas), et éventuellement d'autres paramètres, par exemple les coordonnées du point d'arrivée. La série génératrice d'une famille  $\mathcal{W}$  de chemins est ainsi

$$W(t) = \sum_{w \in \mathcal{W}} t^{|w|},$$

où  $|w|$  désigne la longueur du chemin  $w$ ; dans une version raffinée,

$$W(x, y; t) = \sum_{w \in \mathcal{W}} t^{|w|} x^{i(w)} y^{j(w)},$$

si le point final du chemin  $w$  a pour coordonnées  $(i(w), j(w))$ .

Les chemins qu'on va considérer sont confinés dans l'intersection d'un certain nombre de demi-plans rationnels, c'est-à-dire d'équation  $ai + bj + c \geq 0$ , pour  $a, b, c$  des rationnels non tous nuls. De telles contraintes apparaissent naturellement lorsque les chemins codent des familles d'objets combinatoires (arbres, cartes...), ou décrivent l'évolution de files d'attente [16, 13, 12, 34].

### 1.1. Vivons sans contraintes ! Séries rationnelles

S'il n'y a aucune contrainte, les chemins évoluent dans tout le plan. Ce sont simplement des suites de pas de  $\mathcal{S}$ , et leur série génératrice (raffinée) est

$$W(x, y; t) = \frac{1}{1 - t \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} x^i y^j}. \quad (1)$$

### 1.2. Une contrainte : séries algébriques

Par une transformation linéaire appliquée à  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathcal{S}$ , on peut se ramener au cas du demi-plan  $y \geq k$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Un exemple typique est celui des chemins de Dyck, obtenus pour  $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$  et  $k = 0$ . Cet exemple est tout à fait représentatif du problème, car la plupart des méthodes qui permettent de compter les chemins de Dyck permettent de compter des chemins à pas généraux confinés dans un demi-plan :

- utilisation de grammaires (factorisation au premier retour, etc.) [11] ;
- construction des chemins pas à pas et méthode du noyau [1, 8] ; c'est cette approche qu'on généralisera au quart de plan ;
- moins connue de ce côté-ci de l'Atlantique, l'approche de Gessel par *factorisation canonique* de la série des chemins non contraints [17] mérite une visite. La susdite factorisation canonique sert d'ailleurs aussi pour certains modèles de chemins dans le quart de plan.

Quelle que soit la méthode utilisée, on aboutit (bien sûr) au même résultat : les séries génératrices des chemins confinés dans un demi-plan sont algébriques. Il y a un lien avec les chemins non contraints, puisque, lorsque la droite frontière est  $y = k$ , la série génératrice (en  $t, x$  et  $y$ ) s'exprime en fonction des racines du polynôme

$$1 - t \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} x^i y^j$$

(vu comme un polynôme en  $y$ ), qui n'est autre que le dénominateur de (1). Ce polynôme, et ses symétries, joueront encore un rôle central dans l'étude des chemins du quart de plan.

Notons qu'une projection sur l'axe des  $y$  nous ramène à un problème 1-dimensionnel : l'énumération de chemins (pondérés) à pas dans un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$ , confinés sur une demi-droite.

### 1.3. Deux contraintes : chemins dans le quart de plan

Par une transformation linéaire, on peut se ramener à confiner nos chemins dans l'intersection des demi-plans  $x \geq k$  et  $y \geq \ell$ , pour des entiers  $k$  et  $\ell$  (ou encore dans le premier quart de plan, en prenant un point de départ éventuellement différent de  $(0, 0)$ ). De nouveau, un problème à deux contraintes D-dimensionnel se ramène par projection à un problème à deux dimensions.

Si le monde était simple, la hiérarchie pas de contrainte/une contrainte/deux contraintes se refléterait dans une hiérarchie claire de séries formelles : après les séries rationnelles et algébriques, on attend la classe suivante, celle des séries holonomes (ou différentiellement finies), c'est-à-dire solutions d'une équation différentielle linéaire (en  $t$ ) à coefficients polynomiaux. Mais il paraît que le monde n'est pas simple : certains problèmes de chemins dans le quart de plan ont une solution non holonome [9, 28].

À l'opposé, certains problèmes à deux contraintes sont équivalents à des problèmes à zéro ou une contrainte (Fig. 1) et mènent donc à des séries rationnelles ou algébriques. On ne s'intéressera pas à ceux-là. En revanche, on verra que plusieurs problèmes non triviaux ont une série algébrique, pour des raisons qui restent mal comprises.



FIGURE 1. Des ensembles de pas pour lesquels le problème à deux contraintes dégénère en un problème à zéro ou une contrainte, beaucoup plus facile.

On connaît deux critères généraux qui garantissent l'holonomie des chemins confinés dans le premier quadrant : si  $\mathcal{S}$  est invariant par une réflexion d'axe vertical et ne comprend que des pas  $(i, j)$  où  $|i| \leq 1$ , alors la série est holonome [9, 5]. C'est aussi le cas si  $\mathcal{S}$  est invariant par un groupe de Weyl et que les chemins sont confinés à une chambre de Weyl correspondante [18]. On peut dans ce cas dénombrer les chemins en utilisant le principe de réflexion.

Tout le matériau de ces notes est extrait d'un article avec Marni Mishna [7]. Voir aussi les exposés d'Alin Bostan, Florin Avram, Marni Mishna, et bien sûr l'autre partie du cours, donnée par Kilian Raschel.

## 2. Un exemple simple — qui dit presque tout

On va dénombrer les chemins du quadrant à pas dans  $\mathcal{S} = \{E, S, NW\}$ , en quatre étapes élémentaires. On verra dans la section suivante que cette approche fonctionne dans beaucoup d'autres cas.

### 2.1. Une équation fonctionnelle

On note  $Q(x, y; t)$ , ou pour faire court  $Q(x, y)$ , la série génératrice des chemins du quadrant, comptés selon la longueur et les coordonnées d'arrivée. En particulier,  $Q(x, 0)$  compte (selon les mêmes paramètres) les chemins finissant sur l'axe des abscisses.

En construisant nos chemins pas à pas, en prenant garde à ne pas traverser l'un des axes de coordonnées, on aboutit à

$$Q(x, y) = 1 + txQ(x, y) + t\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) + t\bar{x}y(Q(x, y) - Q(0, y)),$$

(avec  $\bar{x} = 1/x$  et  $\bar{y} = 1/y$ ), soit encore

$$(1 - t(x + \bar{y} + \bar{x}y))Q(x, y) = 1 - t\bar{y}Q(x, 0) - t\bar{x}yQ(0, y). \quad (2)$$

On pourrait imaginer obtenir une information intéressante en remplaçant  $y$  par  $0$ , par exemple : mais ce n'est possible qu'après avoir multiplié par  $y$ , et l'équation obtenue après substitution est alors tautologique. L'équation (2) est dite à *deux variables catalytiques*,  $x$  et  $y$ .

## 2.2. Le groupe associé à $\mathcal{S}$

C'est un outil crucial, tiré du "petit livre jaune" de Fayolle, Iasnogorodski et Malyshev [13]. Le *noyau* est le coefficient de  $Q(x, y)$  dans l'équation ci-dessus. Il décrit les pas de  $\mathcal{S}$ , et n'est autre que le dénominateur de la série des chemins non contraints (1). Trions-le en puissances croissantes de  $x$  :

$$K(x, y) := 1 - t(x + \bar{y} + \bar{x}y) = -t\bar{x}y + 1 - t\bar{y} - tx.$$

On observe que ce polynôme (de Laurent) est inchangé si on remplace  $x$  par  $\bar{x}y$ . En d'autres termes,

$$K(x, y) = K(\Phi(x, y)), \quad \text{avec} \quad \Phi(x, y) = (\bar{x}y, y).$$

De même,

$$K(x, y) = K(\Psi(x, y)), \quad \text{avec} \quad \Psi(x, y) = (x, x\bar{y}).$$

On observe que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux involutions. Par composition, elles engendrent un groupe de transformations rationnelles de  $(x, y)$ , ici le groupe diédral  $D_3$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & & \text{---} & & \\ & \Phi & (\bar{x}y, y) & \text{---} & (\bar{x}y, \bar{x}) & \Phi \\ & \swarrow & & \searrow & \\ (x, y) & & & & (\bar{y}, \bar{x}) \\ & \Psi & (x, x\bar{y}) & \text{---} & (\bar{y}, x\bar{y}) & \Psi \\ & & \Phi & & \end{array}$$

C'est le groupe  $G$  associé à  $\mathcal{S}$ . Il est remarquable qu'il soit fini.

## 2.3. Somme sur le groupe

Revenons à notre équation fonctionnelle (2). Après multiplication par  $xy$ , les séries inconnues en  $x$  et  $y$  se séparent dans le membre de droite :

$$K(x, y)xyQ(x, y) = xy - txQ(x, 0) - ty^2Q(0, y).$$

Écrivons courageusement les six équations obtenues en remplaçant tour à tour  $(x, y)$  par les six paires  $(x', y')$  de l'orbite de  $G$ . Par construction,  $K(x', y') = K(x, y)$  dans tous les cas :

$$\begin{aligned} K(x, y)xyQ(x, y) &= xy - txQ(x, 0) - ty^2Q(0, y), \\ K(x, y)\bar{x}y^2Q(\bar{x}y, y) &= \bar{x}y^2 - t\bar{x}yQ(\bar{x}y, 0) - ty^2Q(0, y), \\ K(x, y)\bar{x}^2yQ(\bar{x}y, \bar{x}) &= \bar{x}^2y - t\bar{x}yQ(\bar{x}y, 0) - t\bar{x}^2Q(0, \bar{x}), \\ K(x, y)\bar{x}\bar{y}Q(\bar{y}, \bar{x}) &= \bar{x}\bar{y} - t\bar{y}Q(\bar{y}, 0) - t\bar{x}^2Q(0, \bar{x}), \\ K(x, y)x\bar{y}^2Q(\bar{y}, x\bar{y}) &= x\bar{y}^2 - t\bar{y}Q(\bar{y}, 0) - tx^2\bar{y}^2Q(0, x\bar{y}), \\ K(x, y)x^2\bar{y}Q(x, x\bar{y}) &= x^2\bar{y} - txQ(x, 0) - tx^2\bar{y}^2Q(0, x\bar{y}). \end{aligned}$$

Deux équations successives ont une série inconnue en commun dans leur membre de droite. En formant la somme alternée de ces six équations, toutes les occurrences de  $Q(\cdot, 0)$  et  $Q(0, \cdot)$  disparaissent, laissant, après division par  $K(x, y)$  :

$$\begin{aligned} xyQ(x, y) - \bar{x}y^2Q(\bar{x}y, y) + \bar{x}^2yQ(\bar{x}y, \bar{x}) - \bar{x}\bar{y}Q(\bar{y}, \bar{x}) + x\bar{y}^2Q(\bar{y}, x\bar{y}) - x^2\bar{y}Q(x, x\bar{y}) \\ = \frac{xy - \bar{x}y^2 + \bar{x}^2y - \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}^2 - x^2\bar{y}}{1 - t(x + \bar{y} + \bar{x}y)}. \quad (3) \end{aligned}$$

## 2.4. Extraction de $Q(x, y)$

A-t-on vraiment gagné au change? On a remplacé une équation où intervenaient  $Q(x, y)$ ,  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  par une autre où pas moins de 6 variantes de  $Q(x, y)$  apparaissent! Eh bien oui : (3) se présente comme une identité sur des séries en  $t$  dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en  $x$  et  $y$ . En extrayant de cette identité les monômes d'exposants strictement positifs en  $x$  et en  $y$ , on obtient que  $xyQ(x, y)$  est la *partie strictement positive*, en  $x$  et  $y$ , d'une fraction rationnelle simple :

$$xyQ(x, y) = [x^{>0}y^{>0}] \frac{xy - \bar{x}y^2 + \bar{x}^2y - \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}^2 - x^2\bar{y}}{1 - t(x + \bar{y} + \bar{x}y)} = R(x, y). \quad (4)$$

## 2.5. Quand le vin est tiré...

La formule ci-dessus résout notre problème d'énumération, prétendons-nous. On peut en effet en extraire tout un tas de choses.

- La nature de la série : par les propriétés de clôture des séries holonomes,  $Q(x, y)$  est holonome [25, 26].
- Le nombre de chemins de longueur  $n$  finissant au point  $(i, j)$  s'extrait facilement, en utilisant

$$[t^n x^i y^j] \frac{1}{1 - t(x + \bar{y} + \bar{x}y)} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

où

$$3a = n + 2i + j, \quad 3b = n - i - 2j, \quad 3c = n - i + j.$$

En sommant six coefficients de ce type, on déduit de (4) le nombre de chemins de longueur  $n$  finissant au point  $(i, j)$ , qui a une forme très simple. C'est normal : une bijection simple montre que c'est aussi le nombre de tableaux de Young standard de forme  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , avec

$$3\lambda_1 = n + 2i + j, \quad 3\lambda_2 = n - i + j, \quad 3\lambda_3 = n - i - 2j.$$

- On peut bien sûr faire de l'asymptotique à main nues, c'est-à-dire armés seulement de la formule de Stirling, sur ce genre de formule close.
- Les propriétés de clôture des séries holonomes étant effectives, on peut (normalement) construire à partir de (4) une équation différentielle (en  $t$ ) satisfaite par  $Q(x, y; t)$ , ou toute spécialisation intéressante de cette série, comme  $Q(0, 0; t)$  ou  $Q(1, 1; t)$ . Le paquetage MGFUN de Maple (<http://algo.inria.fr/chyzak/mgfun.html>), que l'auteur de ces lignes ne maîtrise pas bien, doit faire cela.
- Rappelons enfin qu'en l'absence de formule close, on peut faire de l'asymptotique à partir d'une équation différentielle, comme expliqué dans [15, Chap. VII.9]. Au bémol près habituel : on n'obtient pas les facteurs constants. En revanche, Maple fait tout le travail, via la commande `formal_sols` du paquetage `DEtools`.

## 3. Généralisation : groupes finis et séries holonomes

On examine maintenant dans quelle mesure la solution élémentaire ci-dessus peut être généralisée à d'autres ensembles de pas. On ne considère que les chemins issus de  $(0, 0)$ , mais l'extension à d'autres points de départ serait indolore.

### 3.1. L'équation fonctionnelle

Cet angle d'attaque est robuste : pour tout point de départ et tout ensemble de pas  $\mathcal{S}$ , la construction des chemins pas à pas mène à une équation linéaire comportant (au plus) deux variables catalytiques  $x$  et  $y$ . S'il y a des pas négatifs d'amplitude plus grande que 1, d'autres séries inconnues interviendront dans le membre de droite. Par exemple, si  $\mathcal{S}$  contient  $(-2, 0)$ , il faudra soustraire aussi la série des chemins finissant à l'abscisse 1. De plus, si certains pas ont

deux coordonnées strictement négatives, des séries indépendantes de  $x$  et  $y$  apparaissent aussi dans le membre de droite. Par exemple, pour le pas  $(-1, -1)$  la contribution obtenue est

$$t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) + Q(0, 0)).$$

Le noyau de l'équation est toujours

$$K(x, y) = 1 - t \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} x^i y^j.$$

### 3.2. Le groupe

Là, les choses se gâtent un peu : pour définir le groupe en section 2.2, on a utilisé le fait que nos chemins font des *petits pas*, c'est-à-dire des pas inclus dans  $\{-1, 0, 1\}^2$ . On se limitera à ces ensembles de pas par la suite. D'ailleurs, tout le petit livre jaune [13] leur est consacré. Moyennant cette restriction, deux involutions  $\Phi$  et  $\Psi$  préservent  $K(x, y)$  :

$$\Phi : (x, y) \mapsto \left( \bar{x} \frac{B_{-1}(y)}{B_1(y)}, y \right) \quad \text{et} \quad \Psi : (x, y) \mapsto \left( x, \frac{A_{-1}(x)}{A_1(x)} \bar{y} \right),$$

où

$$K(x, y) = B_{-1}(y)\bar{x} + B_0(y) + B_1(y)x = A_{-1}(x)\bar{y} + A_0(x) + A_1(x)y.$$

Ces involutions engendrent un groupe  $G(\mathcal{S})$  de transformations birationnelles de  $(x, y)$ , qui est un groupe diédral, fini ou non. Si  $g \in G(\mathcal{S})$ , le *signe* de  $g$  est 1 (resp.  $-1$ ) si  $g$  est le produit d'un nombre pair (resp. impair) de générateurs  $\Phi, \Psi$ . On le note  $\varepsilon(g)$ .

**Proposition 1** ([7]). *Parmi les  $2^8$  problèmes de chemins du quadrant à pas dans  $\{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , il existe exactement 79 problèmes non-triviaux et distincts (deux problèmes dont les pas diffèrent par une symétrie diagonale sont considérés comme identiques).*

*Parmi ces 79 problèmes, 23 exactement ont un groupe fini, d'ordre 4, 6 ou 8.*

Voilà donc nos espérances limitées à 23 modèles.

### 3.3. Somme sur le groupe

On suppose ici que les pas sont petits et le groupe  $G(\mathcal{S}) \equiv G$  fini (23 cas, donc, d'après la proposition ci-dessus). Le phénomène de disparition des séries  $Q(\cdot, 0)$  et  $Q(0, \cdot)$  observé dans l'exemple précédent (section 2.3) est alors général. La somme alternée de l'équation, instanciée sur tous les éléments de  $G$ , donne

$$\sum_{g \in G} \varepsilon(g) g(xyQ(x, y)) = \frac{1}{K(x, y)} \sum_{g \in G} \varepsilon(g) g(xy). \quad (5)$$

Le membre de droite de cette équation vaut 0 pour quatre des vingt-trois modèles qui restent en lice : pour  $\mathcal{S} = \{x, \bar{x}, xy, \bar{x}\bar{y}\}$  (cas que nous ne *résoudrons pas*; voir l'exposé d'Alin Bostan, la deuxième partie du cours et les articles [22, 4, 24, 14]), pour  $\mathcal{S}_1 = \{\bar{x}, \bar{y}, xy\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{x, y, \bar{x}\bar{y}\}$ , and  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . Dans chacun de ces trois derniers modèles, la symétrie diagonale des pas implique que  $Q(y, x) = Q(x, y)$ , et comme la paire  $(y, x)$  apparaît dans l'orbite de  $G$ , le fait que

$$\sum_{g \in G} \varepsilon(g) g(xyQ(x, y)) = 0$$

est évident. Ce n'est pas le cas dans le problème que nous laisserons de côté, celui des chemins dits de Gessel,  $\mathcal{S} = \{x, \bar{x}, xy, \bar{x}\bar{y}\}$ .

### 3.4. Extraction de $Q(x, y)$

Pour les 19 problèmes dotés d'un groupe fini et pour lesquelles la somme sur  $G$  est non nulle, l'extraction de  $Q(x, y)$  se passe sans heurt : la série rationnelle

$$R(x, y; t) = \frac{1}{K(x, y; t)} \sum_{g \in G} \varepsilon(g) g(xy)$$

est une série en  $t$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(x)[y, \bar{y}]$  (polynômes de Laurent en  $y$ , à coefficients dans  $\mathbb{Q}(x)$ ). De plus, la partie positive en  $y$  de  $R(x, y; t)$ , notée  $R^+(x, y; t)$ , est une série en  $t$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}[x, \bar{x}, y]$ . En extrayant la partie positive en  $x$  de  $R^+(x, y; t)$ , on obtient  $xyQ(x, y; t)$ . Pour faire court,

$$xyQ(x, y; t) = [x^{>0}][y^{>0}]R(x, y; t). \quad (6)$$

En particulier,  $Q(x, y; t)$  est holonome.

### 3.5. Lorsque la somme sur $G$ est nulle : séries algébriques

On sait résoudre, de façon uniforme, les trois cas où l'orbite de  $G$  est symétrique en  $x$  et  $y$ , à savoir  $\mathcal{S}_1 = \{\bar{x}, \bar{y}, xy\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{x, y, \bar{x}\bar{y}\}$ , et  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . On utilise encore des manipulations de séries formelles, avec un ingrédient (factorisation *canonique* d'une série) un chouïa moins élémentaire que ce qu'on a vu jusque-là. Malgré tout, la solution ne prend qu'une page. En revanche, résoudre avec des manipulations simples de séries formelles le modèle de Gessel  $\mathcal{S} = \{x, \bar{x}, xy, \bar{x}\bar{y}\}$  reste un problème ouvert. Toutefois, la solution est connue et algébrique [4].

On va ici traiter le cas des chemins dits de Kreweras, obtenus pour  $\mathcal{S} = \{\bar{x}, \bar{y}, xy\}$ . On renvoie à [7] pour les détails. Le groupe  $G$  agit sur  $(x, y)$  comme suit :

$$(x, y) \xleftarrow{\Phi} (\bar{x}\bar{y}, y) \xleftarrow{\Psi} (\bar{x}\bar{y}, x) \xleftarrow{\Phi} (y, x) \xleftarrow{\Psi} (y, \bar{x}\bar{y}) \xleftarrow{\Phi} (x, \bar{x}\bar{y}) \xleftarrow{\Psi} (x, y).$$

L'équation fonctionnelle de base s'écrit

$$(1 - t(\bar{x} + \bar{y} + xy)) Q(x, y) = 1 - t\bar{x}Q(0, y) - t\bar{y}Q(x, 0). \quad (7)$$

En multipliant par  $xy$ , et en sommant sur les trois premiers éléments de l'orbite, on obtient

$$xyQ(x, y) - \bar{x}Q(\bar{x}\bar{y}, y) + \bar{y}Q(\bar{x}\bar{y}, x) = \frac{xy - \bar{x} + \bar{y} - 2txQ(x, 0)}{K(x, y)}, \quad (8)$$

avec  $K(x, y) = 1 - t(\bar{x} + \bar{y} + xy)$ . En décomposant  $1/K(x, y)$  en éléments simples (de  $y$ ), et en développant ensuite en  $y$ , on obtient

$$[y^{-1}] \frac{1}{K(x, y)} = \frac{Y_0}{\sqrt{\Delta(x)}}, \quad [y^0] \frac{1}{K(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}}, \quad [y^1] \frac{1}{K(x, y)} = \frac{xY_0}{\sqrt{\Delta(x)}}, \quad (9)$$

où

$$Y_0 = \frac{1 - t\bar{x} - \sqrt{\Delta(x)}}{2tx} \quad \text{et} \quad \Delta(x) = (1 - t\bar{x})^2 - 4t^2x. \quad (10)$$

La série  $Y_0$  est l'une des deux racines du noyau. Le coefficient de  $y^j$  dans  $1/K(x, y)$  est la série génératrice des chemins à pas dans  $\mathcal{S}$  finissant à hauteur  $j$ , sans autre contrainte.

On peut maintenant extraire le coefficient de  $y^0$  dans (8) : dans le membre de gauche, seule la seconde série contribue, et on obtient

$$-\bar{x}Q_d(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}} (2xY_0 - \bar{x} - 2xtQ(x, 0)),$$

où  $Q_d(x)$  compte, selon longueur ( $t$ ) et abscisse d'arrivée ( $x$ ), les chemins du quadrant finissant sur la diagonale. Vu l'expression (10) de  $Y_0$ , cette équation se réécrit en :

$$\frac{1}{t} - \bar{x}Q_d(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}} \left( \frac{1}{t} - 2\bar{x} - 2xtQ(x, 0) \right). \quad (11)$$

C'est ici qu'intervient la *factorisation canonique* du polynôme  $\Delta(x)$  (donné par (10)) sous forme de deux polynômes en  $x$  ne comportant respectivement que des puissances positives (resp. négatives) de  $x$ . Plus précisément,

$$\Delta(x) = \Delta_0 \Delta_-(\bar{x}) \Delta_+(x),$$

avec

$$\Delta_0 = \frac{4t^2}{W^2}, \quad \Delta_+(x) = 1 - xW^2, \quad \Delta_-(\bar{x}) = 1 - \frac{W(W^3 + 4)}{4x} + \frac{W^2}{4x^2},$$

la série  $W \equiv W(t)$  étant l'unique série formelle solution de

$$W = t(2 + W^3). \quad (12)$$

On peut alors réécrire (11) comme suit :

$$\sqrt{\Delta_-(\bar{x})} \left( \frac{1}{t} - \bar{x} Q_d(\bar{x}) \right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0 \Delta_+(x)}} \left( \frac{1}{t} - 2\bar{x} - 2xt Q(x, 0) \right), \quad (13)$$

et extraire la partie positive en  $x$  :

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0 \Delta_+(x)}} \left( \frac{1}{t} - 2\bar{x} - 2xt Q(x, 0) \right) - \frac{2\bar{x}}{\sqrt{\Delta_0}}.$$

On a obtenu une expression algébrique de  $Q(x, 0)$ , et donc, via la symétrie en  $x$  et  $y$  et l'équation (7), de toute la série  $Q(x, y)$ . En extrayant plutôt la partie négative de (13), on obtient une expression de  $Q_d(x)$ .

Énonçons donc une proposition, pour ce modèle et les deux autres qui se résolvent de la même façon.

**Proposition 2.** *Soit  $W \equiv W(t)$  la série formelle en  $t$  définie par (12). La série génératrice des chemins du quadrant formés de pas W, S et NE, et finissant sur l'axe des  $x$  est*

$$Q(x, 0; t) = \frac{1}{tx} \left( \frac{1}{2t} - \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{W} - \frac{1}{x} \right) \sqrt{1 - xW^2} \right).$$

La série génératrice des chemins finissant au point  $(i, 0)$  est

$$[x^i] Q(x, 0; t) = \frac{W^{2i+1}}{2 \cdot 4^i t} \left( C_i - \frac{C_{i+1} W^3}{4} \right),$$

où  $C_i = \binom{2i}{i} / (i+1)$  est le  $i$ -ème nombre de Catalan. La formule d'inversion de Lagrange donne le nombre de tels chemins de longueur  $n = 3m + 2i$  :

$$q(i, 0; 3m + 2i) = \frac{4^m (2i + 1)}{(m + i + 1)(2m + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3m + 2i}{m}.$$

La série génératrice des chemins finissant sur la diagonale est

$$Q_d(x; t) = \frac{W - \bar{x}}{t \sqrt{1 - xW(1 + W^3/4) + x^2 W^2/4}} + \bar{x}/t.$$

**Proposition 3.** *Soit  $W \equiv W(t)$  la série formelle en  $t$  définie par (12). La série génératrice des chemins du quadrant formés de pas N, E et SW, et finissant sur l'axe des  $x$  est*

$$Q(x, 0; t) = \frac{W(4 - W^3)}{16t} - \frac{t - x^2 + tx^3}{2xt^2} - \frac{(2x^2 - xW^2 - W) \sqrt{1 - xW(W^3 + 4)/4 + x^2 W^2/4}}{2txW}.$$

La série génératrice des chemins finissant sur la diagonale est

$$Q_d(x; t) = \frac{xW(x + W) - 2}{2tx^2 \sqrt{1 - xW^2}} + \frac{1}{tx^2}.$$

La série génératrice des chemins finissant au point  $(i, i)$  est

$$[x^i] Q_d(x; t) = \frac{W^{2i+1}}{4^{i+1} t (i+2)} \binom{2i}{i} (2i + 4 - (2i + 1)W^3).$$

La formule d'inversion de Lagrange donne le nombre de tels chemins de longueur  $n = 3m + 2i$  :

$$q(i, i; 3m + 2i) = \frac{4^m (i + 1)^2}{(m + i + 1)(2m + 2i + 1)} \binom{2i + 1}{i} \binom{3m + 2i}{m}.$$

**Proposition 4.** Soit  $Z \equiv Z(t)$  l'unique série formelle sans terme constant satisfaisant

$$Z = t \frac{1 - 2Z + 6Z^2 - 2Z^3 + Z^4}{(1 - Z)^2},$$

et notons

$$\Delta_+(x) = 1 - 2Z \frac{1 + Z^2}{(1 - Z)^2} x + Z^2 x^2.$$

La série génératrice des chemins du quadrant formés de pas N, S, E, W, SE et NW, et finissant sur l'axe des  $x$  est

$$Q(x, 0; t) = \frac{(Z(1 - Z) + 2xZ - (1 - Z)x^2) \sqrt{\Delta_+(x)}}{2txZ(1 - Z)(1 + x)^2} - \frac{Z(1 - Z)^2 + Z(Z^3 + 4Z^2 - 5Z + 2)x - (1 - 2Z + 7Z^2 - 4Z^3)x^2 + x^3Z(1 - Z)^2}{2txZ(1 - Z)^2(1 + x)^2}.$$

La série génératrice des chemins finissant sur la diagonale est

$$Q_d(x; t) = \frac{1 - Z - 2xZ + x^2Z(Z - 1)}{tx(1 + x)(Z - 1)\sqrt{\Delta_+(x)}} + \frac{1}{tx(1 + x)}.$$

#### 4. Cas d'un groupe infini

On sait dire bien peu de choses, du moins avec ces méthodes à base de manipulation de séries formelles. Il est conjecturé que la série génératrice n'est jamais holonome dans ce cas [3], et donc que *la série est holonome si et seulement si le groupe est fini*, ce qui serait agréable. La non-holonomie est prouvée dans deux cas [28] (voir aussi [9]). Voir [32] et l'autre partie du cours pour un traitement uniforme des chemins à petit pas, de nature plus analytique.

#### 5. Quelques commentaires, et du pain sur la planche

**Le principe de réflexion** permet de résoudre un certain nombre de ces modèles. Il fournit alors une explication combinatoire de la formule (6). Il ne résout aucun des modèles algébriques évoqués en section 3.5.

**Des poids sur les pas.** Il est possible d'enrichir les modèles en attribuant un poids à chaque pas. Le poids d'un chemin est alors le produit des poids de ses pas. On peut en principe appliquer la même approche. Mais il arrive qu'un problème associé à un groupe fini quand tous les poids sont 1 soit associé à un groupe infini pour des poids différents de 1.

**Chaînes de Markov dans le quadrant.** On peut essayer d'étudier avec les mêmes recettes la loi d'une chaîne de Markov évoluant dans le quart de plan. Elles offrent une alternative "algébrique" (c'est-à-dire à base de séries formelles) aux techniques analytiques du petit livre jaune [13]. Il y a beaucoup à faire de ce côté-là, car seul le cas des pas de Kreweras a été étudié [6].












**Ça manque de combinatoire,** peut-on légitimement penser en voyant qu'un certain nombre de problèmes mènent à des nombres remarquablement simples, et/ou à des séries algébriques (cf. Propositions 2, 3, 4). Voir [7] pour une liste de problèmes ouverts.

**En dimension supérieure,** les mêmes principes s'appliquent. Il serait intéressant de mener une étude systématique. Le nombre de cas à envisager est toutefois intimidant. Voir [3] pour des résultats expérimentaux concernant les marches faisant au plus 5 types de pas.

**On termine par quelques tables,** qui listent les 79 ensembles  $\mathcal{S}$  intéressants formés de petits pas. Les trois premières tables donnent les ensembles  $\mathcal{S}$  tels que  $G(\mathcal{S})$  est d'ordre 4, 6 et 8. La deuxième colonne décrit le groupe en détails. La colonne suivante donne les pas de  $\mathcal{S}$ . La quatrième donne les nombres  $q(-, -; n)$  et  $q(0, 0; n)$  qui comptent respectivement les chemins du



quadrant généraux, et ceux qui finissent en  $(0, 0)$ . On donne aussi l'entrée correspondante dans le Sloane [33], et d'autres références sur le modèle, prises dans ces notes, dans l'article d'origine [7] et dans d'autres articles.

#	$G(\mathcal{S})$	$\mathcal{S}$	$q(-, -; n)$ $q(0, 0; n)$	References
1	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y}), (x, \bar{y})$		$1, 2, 6, 18, 60, 200, 700, 2450, 8820, 31752$ (A005566) $1, 0, 2, 0, 10, 0, 70, 0, 588, 0, 5544, 0, 56628$ (A005568)	Eq. (6), [5, 10, 2, 18, 20]
2			$1, 1, 4, 9, 36, 100, 400, 1225, 4900, 15876$ (A018224) $1, 0, 1, 0, 4, 0, 25, 0, 196, 0, 1764, 0, 17424$ (A001246)	Eq. (6), [5, 18, 31]
3			$1, 2, 10, 39, 210, 960, 5340, 26250, 148610, 761796$ $1, 0, 2, 0, 18, 0, 255, 0, 4522, 0, 91896, 0, 2047452$	Eq. (6), [5, 18]
4			$1, 3, 18, 105, 684, 4550, 31340, 219555, 1564080$ $1, 0, 3, 6, 38, 160, 905, 4830, 28308, 166992$	Eq. (6), [5, 18]
5	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y} \frac{1}{x+\bar{x}}),$ $(x, \bar{y} \frac{1}{x+\bar{x}})$		$1, 1, 3, 7, 19, 49, 139, 379, 1079, 3011$ $1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 28, 0, 0, 0, 660, 0, 0, 0, 20020$	Eq. (6), [5, 27]
6			$1, 2, 9, 34, 151, 659, 2999, 13714, 63799, 298397,$ $1408415, 6678827$ $1, 0, 1, 3, 4, 20, 65, 175, 742, 2604, 9072, 36960, 139392$	Eq. (6), [5]
7	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y} \frac{1}{x+1+\bar{x}}),$ $(x, \bar{y} \frac{1}{x+1+\bar{x}})$		$1, 2, 7, 23, 84, 301, 1127, 4186, 15891, 60128, 230334$ $1, 0, 1, 0, 4, 0, 20, 0, 126, 0, 882, 0, 6732$	Eq. (6), [5]
8			$1, 3, 15, 74, 392, 2116, 11652, 64967, 365759, 2074574$ $1, 0, 2, 3, 12, 40, 145, 560, 2240, 9156, 38724, 166320,$ $728508$	Eq. (6), [5]
9	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y} \frac{x+\bar{x}}{x+1+\bar{x}}),$ $(x, \bar{y} \frac{x+\bar{x}}{x+1+\bar{x}})$		$1, 2, 8, 29, 129, 535, 2467, 10844, 50982, 231404$ $1, 0, 1, 0, 6, 0, 55, 0, 644, 0, 8694, 0, 128964$	Eq. (6), [5]
10			$1, 3, 16, 86, 509, 3065, 19088, 120401, 771758$ $1, 0, 2, 3, 20, 60, 345, 1400, 7770, 36876, 204876$	Eq. (6), [5]
11	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y} (x+1+\bar{x})),$ $(x, \bar{y} (x+1+\bar{x}))$		$1, 1, 3, 5, 17, 34, 121, 265, 969, 2246, 8351, 20118$ $1, 0, 1, 0, 4, 0, 20, 0, 126, 0, 882, 0, 6732$	Eq. (6), [5]

12			$1, 2, 7, 26, 105, 444, 1944, 8728, 39999, 186266$ <hr/> $1, 0, 2, 3, 12, 40, 145, 560, 2240, 9156, 38724, 166320, 728508$	Eq. (6), [5]
13	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y} \frac{x+1+\bar{x}}{x+\bar{x}}),$ $(x, \bar{y} \frac{x+1+\bar{x}}{x+\bar{x}})$		$1, 1, 5, 13, 61, 199, 939, 3389, 16129, 61601, 295373$ <hr/> $1, 0, 1, 0, 6, 0, 55, 0, 644, 0, 8694, 0, 128964$	Eq. (6), [5]
14			$1, 2, 11, 49, 277, 1479, 8679, 49974, 301169, 1805861$ <hr/> $1, 0, 2, 3, 20, 60, 345, 1400, 7770, 36876, 204876$	Eq. (6), [5]
15	$(x, y), (\bar{x}, y),$ $(\bar{x}, \bar{y}(x + \bar{x})),$ $(x, \bar{y}(x + \bar{x}))$		$1, 1, 2, 3, 8, 15, 39, 77, 216, 459, 1265, 2739, 7842$ <hr/> $1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 28, 0, 0, 0, 660$	Eq. (6), [5, 27]
16			$1, 2, 6, 21, 76, 290, 1148, 4627, 19038, 79554, 336112$ <hr/> $1, 0, 1, 3, 4, 20, 65, 175, 742, 2604, 9072, 36960$	Eq. (6), [5]

TABLE 1: Le groupe  $G(\mathcal{S})$  est isomorphe à  $D_2$ . Ces 16 modèles ont une série génératrice holonome.

#	$G(\mathcal{S})$	$\mathcal{S}$	$q(-, -; n)$ $q(0, 0; n)$	References
1	$(x, y), (\bar{x}y, y),$ $(\bar{x}y, \bar{x}), (\bar{y}, \bar{x}),$ $(\bar{y}, \bar{y}x), (x, \bar{y}x)$		$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798$ (A001006) <hr/> $1, 0, 0, 1, 0, 0, 5, 0, 0, 42, 0, 0, 462$ (A005789)	Eq. (6), [7, Prop. 9], [18]
2			$1, 2, 8, 32, 144, 672, 3264, 16256, 82688$ (A129400) <hr/> $1, 0, 2, 2, 12, 30, 130, 462, 1946, 7980, 34776, 153120$	Eq. (6), [7, Prop. 10], [18]
3	$(x, y), (\bar{x}y, y),$ $(\bar{x}y, x), (y, x),$ $(y, \bar{x}y), (x, \bar{x}y)$		$1, 1, 3, 7, 17, 47, 125, 333, 939, 2597, 7183$ <hr/> $1, 0, 0, 2, 0, 0, 16, 0, 0, 192, 0, 0, 2816$ (A006335)	Prop. 2, [23, 6]
4			$1, 2, 4, 10, 26, 66, 178, 488, 1320, 3674, 10318$ <hr/> $1, 0, 0, 2, 0, 0, 16, 0, 0, 192, 0, 0, 2816$ (A006335)	Prop. 3, [27]
5			$1, 3, 14, 67, 342, 1790, 9580, 52035, 285990$ <hr/> $1, 0, 3, 4, 26, 80, 387, 1596, 7518, 34656, 167310$	Prop. 4

TABLE 2: Le groupe  $G(\mathcal{S})$  est isomorphe à  $D_3$ . Ces cinq modèles ont une série génératrice holonome, et même algébrique pour les trois derniers.

#	$G(\mathcal{S})$	$\mathcal{S}$	$\frac{q(-, -; n)}{q(0, 0; n)}$	References
1	$(x, y), (y\bar{x}, y),$ $(y\bar{x}, y\bar{x}^2), (\bar{x}, y\bar{x}^2),$ $(\bar{x}, \bar{y}), (x\bar{y}, \bar{y}),$ $(x\bar{y}, x^2\bar{y}), (x, \bar{y}x^2)$		$\frac{1, 1, 3, 6, 20, 50, 175, 490, 1764, 5292 \text{ (A005558)}}{1, 0, 1, 0, 3, 0, 14, 0, 84, 0, 594, 0, 4719 \text{ (A005700)}}$	Eq. (6), [7, Prop. 11], [18, 19, 29]
2	$(x, y), (\bar{x}\bar{y}, y),$ $(\bar{x}\bar{y}, x^2y), (\bar{x}, x^2y),$ $(\bar{x}, \bar{y}), (xy, \bar{y}),$ $(xy, \bar{x}^2\bar{y}), (x, \bar{y}x^2)$		$\frac{1, 2, 7, 21, 78, 260, 988, 3458, 13300, 47880 \text{ (A060900)}}{1, 0, 2, 0, 11, 0, 85, 0, 782, 0, 8004, 0, 88044 \text{ (A135404)}}$	[21, 4, 30, 14, 24]

TABLE 3: Le groupe  $G(\mathcal{S})$  est isomorphe à  $D_4$ . Ces deux modèles ont une série génératrice holonome, et même algébrique pour le second.

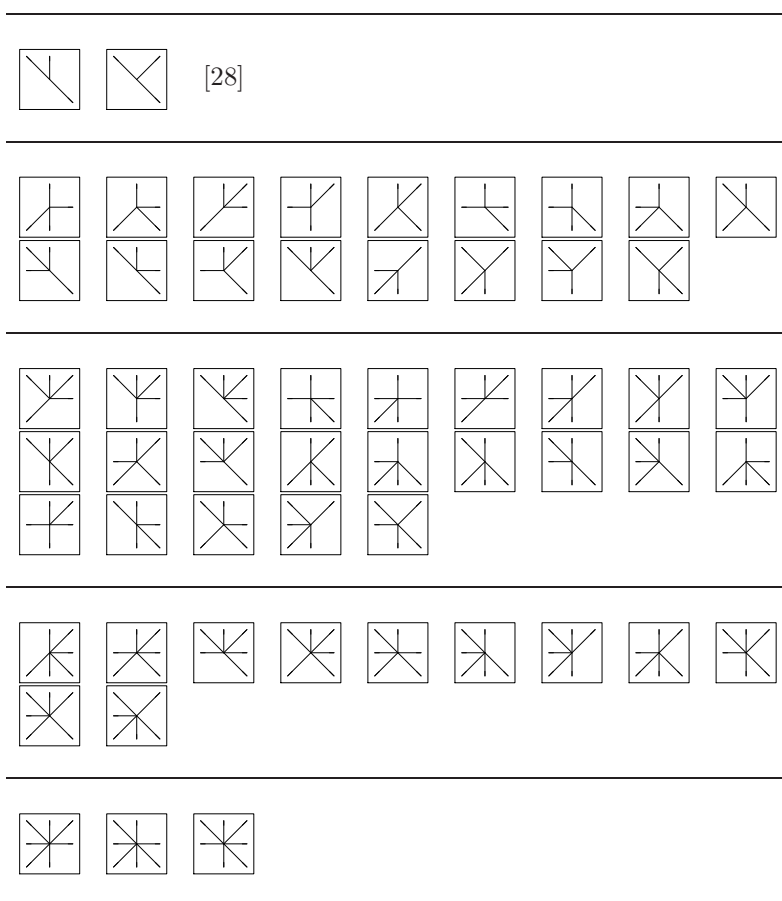


TABLE 4. Ces 56 ensembles de pas sont associés à un groupe infini. Voir [32] pour une solution analytique.

## Références

- [1] C. Banderier and P. Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 281(1-2) :37–80, 2002.
- [2] O. Bernardi. Bijective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems. *Electron. J. Combin.*, 14(1) :Research Paper 9, 36 pp. (electronic), 2007.
- [3] A. Bostan and M. Kauers. Automatic classification of restricted lattice walks. In *FPSAC'09*, Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci. Proceedings, pages 203–217, 2009. ArXiv :0811.2899v1.
- [4] A. Bostan and M. Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010. With an appendix by Mark van Hoeij.
- [5] M. Bousquet-Mélou. Counting walks in the quarter plane. In *Mathematics and computer science 2*, (Versailles, 2002), Trends Math., pages 49–67. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [6] M. Bousquet-Mélou. Walks in the quarter plane : Kreweras' algebraic model. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1451–1491, 2005.
- [7] M. Bousquet-Mélou and M. Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. *Contemp. Math.*, 520 :1–40, 2010.
- [8] M. Bousquet-Mélou and M. Petkovšek. Linear recurrences with constant coefficients : the multivariate case. *Discrete Math.*, 225(1-3) :51–75, 2000.
- [9] M. Bousquet-Mélou and M. Petkovšek. Walks confined in a quadrant are not always D-finite. *Theoret. Comput. Sci.*, 307(2) :257–276, 2003.
- [10] R. Cori, S. Dulucq, and G. Viennot. Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(1) :1–22, 1986.
- [11] P. Duchon. On the enumeration and generation of generalized Dyck words. *Discrete Math.*, 225(1-3) :121–135, 2000.
- [12] G. Fayolle and R. Iasnogorodski. Solutions of functional equations arising in the analysis of two-server queueing models. In *Performance of computer systems (Proc. Fourth Internat. Sympos. Modelling Performance Evaluation Comput. Systems, Vienna, 1979)*, pages 289–303. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [13] G. Fayolle, R. Iasnogorodski, and V. Malyshev. *Random walks in the quarter-plane : Algebraic methods, boundary value problems and applications*, volume 40 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [14] G. Fayolle and K. Raschel. On the holonomy or algebraicity of generating functions counting lattice walks in the quarter plane. *Markov Process. Related Fields*, 16(3) :485–496, 2010. Arxiv :1004.1733.
- [15] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [16] L. Flatto and S. Hahn. Two parallel queues created by arrivals with two demands. I. *SIAM J. Appl. Math.*, 44(5) :1041–1053, 1984.
- [17] I. M. Gessel. A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration. *J. Combin. Theory Ser. A*, 28(3) :321–337, 1980.
- [18] I. M. Gessel and D. Zeilberger. Random walk in a Weyl chamber. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115(1) :27–31, 1992.
- [19] D. Gouyou-Beauchamps. Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young. In *Combinatoire énumérative (Montréal, 1985, Québec)*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, pages 112–125. Springer, Berlin, 1986.
- [20] R. K. Guy, C. Krattenthaler, and B. E. Sagan. Lattice paths, reflections, & dimension-changing bijections. *Ars Combin.*, 34 :3–15, 1992.
- [21] M. Kauers, C. Koutschan, and D. Zeilberger. Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 106(28) :11502–11505, 2009. ArXiv :0806.4300.
- [22] M. Kauers and D. Zeilberger. The quasi-holonomic Ansatz and restricted lattice walks. *J. Difference Equ. Appl.*, 14 :1119–1126, 2008. ArXiv :0806.4318.
- [23] G. Kreweras. Sur une classe de problèmes liés au treillis des partitions d'entiers. *Cahiers du B.U.R.O.*, 6 :5–105, 1965.
- [24] I. Kurkova and K. Raschel. Explicit expression for the generating function counting Gessel's walks. *Adv. in Appl. Math.*, to appear. Arxiv :0912.0457.
- [25] L. Lipshitz. The diagonal of a  $D$ -finite power series is  $D$ -finite. *J. Algebra*, 113(2) :373–378, 1988.
- [26] L. Lipshitz.  $D$ -finite power series. *J. Algebra*, 122 :353–373, 1989.
- [27] M. Mishna. Classifying lattice walks restricted to the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(2) :460–477, 2009. ArXiv :math/0611651.
- [28] M. Mishna and A. Rechnitzer. Two non-holonomic lattice walks in the quarter plane. *Theoret. Comput. Sci.*, 410(38-40) :3616–3630, 2009. ArXiv :math/0701800.

- [29] H. Niederhausen. Random walks in octants, and related structures. *J. Statist. Plann. Inference*, 135(1) :165–196, 2005.
- [30] M. Petkovsek and H. S. Wilf. On a conjecture of Ira Gessel. ArXiv :0807.3202v1, 2008.
- [31] D. Poulalhon and G. Schaeffer. *Applied Combinatorics on Words*, volume 105 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, chapter "Coding, counting and sampling with words". Cambridge University Press, 2005.
- [32] K. Raschel. Counting walks in a quadrant : a unified approach via boundary value problems. Arxiv :1003.1362, 2010.
- [33] N. J. A. Sloane and S. Plouffe. *The encyclopedia of integer sequences*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1995. [http ://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html](http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html).
- [34] P. E. Wright. Two parallel processors with coupled inputs. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(4) :986–1007, 1992.

CNRS, LABRI, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, 351 COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* mireille.bousquet@labri.fr