Partitions avec des entiers à chiffres manquants

en collaboration avec S. Wagner

Manfred G. Madritsch

Department for Analysis and Computational Number Theory
Graz University of Technology
madritsch@math.tugraz.at

ALEA 2011

financé par la fondation autrichienne des sciences (FWF), projet S9603.

Plan de l'exposé

Partitions

Une partition d'un entier est une décomposition de cet entier en une somme d'entiers strictement positifs. Nous distinguons les partitions où tous les termes sont différents des autres partitions où la répétition est autorisée.
Par exemple, pour les partitions de 4 on a

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ 4 &= 3+1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4 &= 4 \\ 4 &= 3+1 \\ 4 &= 2+2 \\ 4 &= 2+1+1 \\ 4 &= 1+1+1+1 \end{aligned}$$

Λ-partitions

Soit $\Lambda = (\Lambda_i)_{i\geq 1}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs. Nous nous intéressons à la décomposition des entiers en une somme d'éléments de Λ. Par exemple, pour un entier n on a

$$n = \sum_{j=1}^{k} \Lambda_{i_j}$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Système de numération

Soit b un nombre entier supérieur ou égal à 2. Tout nombre entier n peut s'écrire de manière unique en base b sous la forme

$$n = \sum_{k \geq 0} n_k b^k \quad (n_k \in \{0, \dots, b-1\}),$$

où les n_k sont tous nuls à partir d'un certain rang.
On appelle n_k les chiffres et $\mathcal{D} := \{0, \dots, b-1\}$ l'ensemble des chiffres.

Chiffres manquants

Soit D un sous-ensemble de $\mathcal{D} = \{0, \dots, b-1\}$, dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $1 < |D| = t < b$. Nous étudions les propriétés additives des entiers dont les chiffres intervenant dans leur développement en base b appartiennent à D.

On définit :

$$\mathcal{MD}(b, D) := \left\{ \sum_{k=0}^{\ell-1} n_k b^k \mid \ell \in \mathbb{N},\ n_k \in D \right\} \setminus \{0\}.$$

Par exemple

$$\mathcal{MD}(3, \{0, 2\}) = \{2, 6, 8, 18, 20, 24, 26, 162, \dots\}.$$

Plan de l'exposé

Formule du nombre de partitions

Theorem Roth et Szekeres (1954)

Supposons que

- $\alpha^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log \Lambda_k}{\log k}$ *existe,*
- $J_k = \inf \left\{ (\log k)^{-1} \sum_{\nu=1}^{k} \|\Lambda_\nu \beta\|^2 \right\} \to \infty$ *pour* $k \to \infty$, *où la borne inférieure est sur tous les* β *tels que* $\frac{1}{2}\Lambda_k^{-1} < \beta \leq \frac{1}{2}$, *et* $\|x\|$ *designe la distance entre* x *et l'entier le plus proche.*

Formule du nombre de partitions

Theorem Roth and Szekeres (1954)

La formule asymptotique pour $q_\Lambda(n)$ est :

$$q_\Lambda(n) = (2\pi A)^{-1/2} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\eta\Lambda_k}{e^{\eta\Lambda_k}+1} + \log(1+e^{-\eta\Lambda_k})\right)\right) \cdot \left(1 + O(n^{-1/(\alpha+1)+\delta})\right),$$

où $\eta = \eta(n)$ et $A = A(n)$ sont déterminés par

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_k}{e^{\eta\Lambda_k}+1} \quad et \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_k^2 e^{\eta\Lambda_k}}{(e^{\eta\Lambda_k}+1)^2}.$$

La série génératrice de Dirichlet

Posons

$$D(s) = \sum_{m \in \mathcal{MD}(q,D)} m^{-s}.$$

Alors on a

$$D(s) = \left(1 - |D| b^{-s}\right)^{-1} R(s),$$

où R est analytique sur le demi-plan

$$\left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} s > \frac{\log |D|}{\log b} - 1 \right\}.$$

La formule du nombre de partitions

Theorem

Le nombre $q_{\mathcal{MD}}(n)$ de partitions d'un entier en éléments différents de $\mathcal{MD}(b,D)$ est asymptotiquement égal à

$$q_{\mathcal{MD}}(n) = n^{-(\alpha+2)/(2\alpha+2)} \exp\left(n^{\alpha/(\alpha+1)} W_1\left(\frac{\log\eta}{\log|D| + \log b}\right)\right) \cdot W_2\left(\frac{\log\eta}{\log|D| + \log b}\right)\left(1 + O(n^{-\min(\alpha,1-\alpha)/(\alpha+1)+\delta})\right)$$

où W_1 et W_2 sont des fonctions de période 1.

Plan de l'exposé

Le résultat de Hwang

Theorem

Soit ϖ_n la variable aléatoire associée au nombre des termes de partition de n en éléments de Λ. Supposons (M1)–(M3), alors ϖ_n suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(\varpi_n) \sim \mu_n$ et de variance $\mathbb{V}(\varpi_n) \sim \sigma_n^2$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\varpi_n - \mu_n}{\sigma_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t + o(1),$$

uniformément en x pour $n \to \infty$.

Les conditions

(M1) La série de Dirichlet $D(s) = \sum_{k\geq 1} \Lambda_k^{-s}$

- est convergent sur le demi-plan $\Re s > \alpha > 0$,
- peut être prolongée analytiquement sur le demi-plan $\Re s \geq -\alpha_0$ pour $\alpha_0 > 0$,
- est analytique sur $\Re s \geq -\alpha_0$, $D(s)$ sauf en un pôle simple $s = \alpha$ avec résidu A.

(M1') La série de Dirichlet $D(s) = \sum_{k\geq 1} \Lambda_k^{-s}$

- est convergent sur le demi-plan $\Re s > \alpha > 0$,
- peut être prolongée analytiquement sur le demi-plan $\Re s \geq \alpha - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$,
- a des pôles simples équidistants sur la droit $\Re s = \alpha$ et il n'y a pas de pôles supplémentaires sur $\Re s \geq \alpha - \varepsilon$.

Les conditions

On écrit $s = \sigma + it$.

(M2) Il y a une constante c_1 telle que $D(s) \ll |t|^{c_1}$ uniformément sur $\Re s \geq -\alpha_0$ pour $|t| \to \infty$.

(M2') Il y a une suite de réels $T_j \to \infty$ et une constante positive c_1 telles que

$$D(s) \ll |T_j|^{c_1}$$

uniformément pour s dans une bande $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha \rangle$ où $|t| = T_j$. En outre supposons que D satisfait

$$D(\alpha - \varepsilon + it) \ll |t|^{c_1}.$$

Les conditions

(M3) Posons $g(\tau) = \sum_{k\geq 1} e^{-\Lambda_k \tau}$, où $\tau = r + iy$ avec $r > 0$ et $-\pi \leq y \leq \pi$. Il y a une constante positive c_2 telle que $g(r) - \Re g(\tau) \geq c_2(\log(1/r))^{2+4/\alpha^2}$ uniformément sur $\pi/2 \leq |y| \leq \pi$ pour $r \to 0^+$.

(M3') La condition (M3') est la même que (M3).

Notre résultat

Theorem

Soit ϖ_n la variable aléatoire associée au nombre des termes de partition de n en éléments de Λ. Supposons (M1')–(M3'), alors ϖ_n suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(\varpi_n) \sim \mu_n$ et de variance $\mathbb{V}(\varpi_n) \sim \sigma_n^2$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\varpi_n - \mu_n}{\sigma_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t + o(1),$$

uniformément en x pour $n \to \infty$.

Plan de l'exposé

Nombres à blocs manquants

L'exemple précédent peut être généralisé à des blocs manquants comme dans le système de numération de "Fibbinary" (A003714), *i.e.*, des entiers dont la représentation binaire ne comporte pas le bloc 11 : $\{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, \ldots\}$. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, a_i \in \{0,1\}, a_i \cdot a_{i+1} = 0 \right\}.$$

On a

$$\mathcal{MD}(4, \{0,1\}) \subseteq \mathcal{F} = 2\mathcal{F} \cup (4\mathcal{F} + 1) \cup \{1\},$$

Polynômes cyclotomiques

On considère des polynômes p unitaires dont toutes les racines complexes ont un module égal à un. Ces polynômes p ont une factorisation en polynômes cyclotomiques. Donc la série génératrice de Dirichlet est égale à

$$D(s) = \sum_{m \geq 1} \phi(m)^{-s}$$

Si on considère le produit d'Euler on peut démontrer qu'elle a un pôle simple en $s = 1$ et une singularité déplaisante en $s = 0$. Le théorème de Hwang n'est pas applicable, mais nous pouvons demontre un théorème central limite.

Entier sans facteur carré

Le dernier exemple porte sur les partitions d'un entier en entiers sans facteur carré. La série génératrice de Dirichlet est égale à

$$D(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Elle a un pôle simple en $s = 1$ et de nombreux pôles avec $\Re s = \frac{1}{4}$ et encore plus si l'hypothèse de Riemann est fausse. Mais on peut également appliquer notre résultat.