Gog, Magog et involution de Schützenberger

Hayat Cheballah

LIPN-Université Paris 13

Journées ALÉA

8 avril 2011

Le schéma

$$\mathbf{TSSCPPs}_{2n\times 2n\times 2n} \longleftrightarrow \mathbf{Magog}_n \overset{?}{\longleftrightarrow} \mathbf{Gog}_n \longleftrightarrow \mathbf{ASMs}_n$$

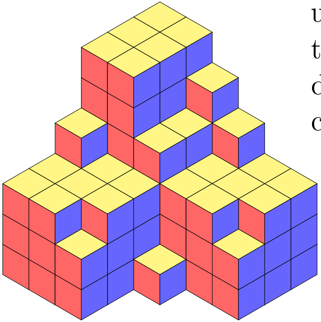
Matrices à signes alternants(ASM)

Matrice carrée de $0, 1, -1$, telle que dans chaque ligne et dans chaque colonne

- Les 1 et -1 apparaissent alternativement.
- La somme sur chaque ligne et sur chaque colonne est égale à 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

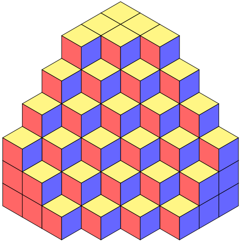
Partitions planes(PP) : elles peuvent être vues comme un empilement de cubes dans un coin.



une PP est une 3D-partition : tableau bidimensionnel h de suites décroissantes d'entiers en ligne et en colonne

665433
664333
664332
4331
333
332

PP Totalement symétriques Auto-complémentaires (TSSCPP)



Les TSSCPPs de taille $2n \times 2n \times 2n$ sont munies de toutes les symétries de l'hexagone.

$\Rightarrow$ Domaine fondamental : douzième de l'hexagone original.

Enumération et Problématique

Théorème [Zeilberger]

$$|\mathrm{ASMs}_{n\times n}| = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = |\mathrm{TSSCPPs}_{2n\times 2n\times 2n}|$$

Enumération et Problématique

Théorème [Zeilberger]

$$|\mathrm{ASMs}_{n\times n}| = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = |\mathrm{TSSCPPs}_{2n\times 2n\times 2n}|$$

Problème ouvert

Donner une construction bijective.

Triangles de Gelfand-Tsetlin de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $X = (x_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
x_{n,1} & & \leqslant & & x_{n,2} & & \leqslant & & x_{n,3} & & \leqslant & & \cdots & & & \leqslant & & x_{n,n} \\
& \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & \\
& & x_{n-1,1} & & \leqslant & & x_{n-1,2} & & \leqslant & & \cdots & & \leqslant & & x_{n-1,n-1} & & & \\
& & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & \\
& & & & x_{n-2,1} & & & & \cdots & & & & x_{n-2,,n-2} & & & & & \\
& & & & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & \cdots & & & & & & & \\
& & & & & & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & & & & \\
& & & & & & & & x_{1,1} & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Triangle Gog de taille n

arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{n,1} & & < & & x_{n,2} & & < & & x_{n,3} & & < & \cdots & < & & x_{n,n} \\
 & \leq & & \leq & & \leq & & \leq & & & & & & \leq & \\
 & & x_{n-1,1} & & < & & x_{n-1,2} & & < & \cdots & < & & x_{n-1,n-1} & & \\
 & & & \leq & & & & & & & & \leq & & & \\
 & & & & x_{n-2,1} & & & \cdots & & & x_{n-2,n-2} & & & & \\
 & & & & & \leq & & & & \leq & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \leq & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \leq & & & & & & \\
 & & & & & & & x_{1,1} & & & & & & &
\end{array}
$$

Triangle Gog de taille n

arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & & & 2 & & & & 3 & & & & \cdots & & & & n \\
\shortparallel & & & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & & & & & & & \shortparallel \\
x_{n,1} & & < & & x_{n,2} & & < & & x_{n,3} & & < & & \cdots & & < & & x_{n,n} \\
& \rotatebox{-45}{$\leq$} & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & \rotatebox{-45}{$\leq$} & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\geq$} & \\
& & x_{n-1,1} & & < & & x_{n-1,2} & & < & & \cdots & & < & & x_{n-1,n-1} & & \\
& & & \rotatebox{-45}{$\leq$} & & & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & & \\
& & & & x_{n-2,1} & & & & \cdots & & & & x_{n-2,n-2} & & & & \\
& & & & & \rotatebox{-45}{$\leq$} & & & & & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & \cdots & & & & & & \\
& & & & & & & \rotatebox{-45}{$\leq$} & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & & & & & & \\
& & & & & & & & x_{1,1} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Statistiques

X triangle Gog de taille n.

- $l(X)$: $x_{1,1}$
- $r(X)$: $\sharp k$ tel que $x_{k,k} = n$

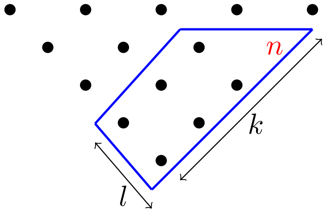
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & (5) & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & (3) & & & &
\end{array}
\xrightarrow{\text{ASM}}
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
1 & -1 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
\; \downarrow j$$

$$\xrightarrow[i]{}$$

$l(X) = 3$ $\qquad$ $r(X) = 3$

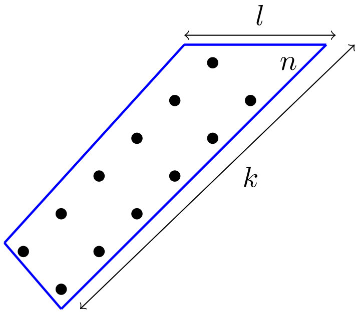
Trapèzes Gog

$(n, k, l)-$Gog trapèze : les l dernières diagonales Est des k lignes du bas tel que $(l \leqslant k)$ d'un triangle Gog et de niveau n.

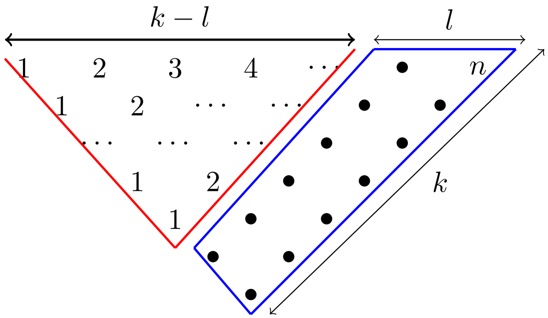


$(n, 4, 2)$-Gog Trapèze

Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Gog trapèze en un $(n,k)-$Gog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Gog trapèze le Gog de taille $k-l$ suivant



Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Gog trapèze en un $(n,k)-$Gog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Gog trapèze le Gog de taille $k-l$ suivant



Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Gog trapèze en un $(n,k)-$Gog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Gog trapèze le Gog de taille $k-l$ suivant

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & & \cdots & & & & & & n-1 & & n \\
 & \bullet & & & & & \cdots & & & \cdots & & & & & & & & \bullet & \\
 & & 1 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & & & & & n & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \cdots & & \bullet & & n & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & \cdots & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & & & \\
 & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & \bullet & & \bullet & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \bullet & & \bullet & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \bullet & & \bullet & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \bullet & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Triangles Magog de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1, n]\!]$

$$x_{n,1} \leqslant x_{n,2} \leqslant x_{n,3} \leqslant \cdots \qquad x_{n,n} \leqslant n$$

$$x_{n-1,1} \leqslant x_{n-1,2} \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1,n-1} \leqslant n-1$$

$$x_{n-2,1} \qquad \cdots \qquad x_{n-2,n-2} \leqslant n-2$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$x_{1,1} \leqslant 1$$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & \\
 & & 1 & & 1 & & 3 & & 4 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & \\
& & 1 & & 1 & & 3 & & 4 & & \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & & & \\
& & & & & 1 & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\xrightarrow{\Sigma} 16 \\
\xrightarrow{\Sigma} 12
\end{array}
\longrightarrow \boxed{l(X) = 4}
$$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \\
& 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & & & \\
& & 1 & & 1 & & 3 & & 4 & \longleftarrow & x_{kk} & & \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & & & & & \\
& & & & & 1 & & & & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{l(X) = 4}$$

$$k = \max\{j / x_{jj} = j\}$$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & \\
& & 1 & & 1 & & 3 \longleftarrow & & 4 \longleftarrow & & x_{kk} \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & & & \\
& & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

$\boxed{l(X) = 4}$

$k = \max\{j / x_{jj} = j\}$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & \\
& & 1 & & 1 & & 3 \leftarrow & & 4 \leftarrow & & x_{kk} \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & & & \\
& & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

$\boxed{l(X) = 4}$

$k = \max\{j / x_{jj} = j\}$

Statistiques

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j}\right)$
- $r(X)$: hauteur de sortie du Chemin de X

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
 & & 1 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 3 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & & x_{kk} \\
\boxed{r(X) = 3} & \leftarrow & & & 1 & \leftarrow & 2 & & 3 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & &
\end{array}
$$

$$\boxed{l(X) = 4}$$

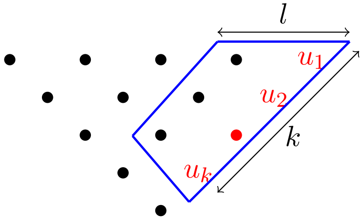
$$k = \max\{j / x_{jj} = j\}$$

Trapèzes Magog

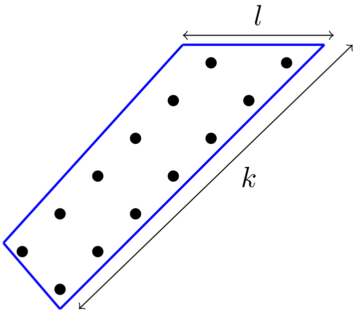
$(n, k, l)-$Magog trapèzes : les l dernières diagonales Est d'un triangle Magog des k lignes du haut tel que $(l \leqslant k)$ et de niveau n.

$$n = \max(u_1, u_2 + 1, u_3 + 2, \cdots, u_k + k - 1)$$

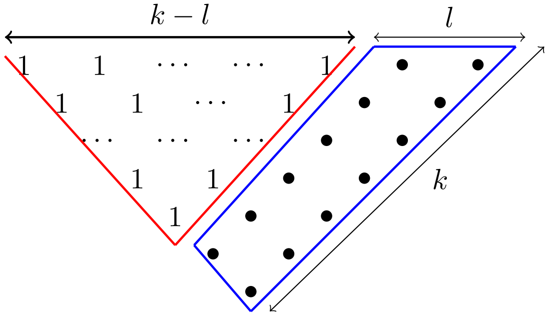
tel que u_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$ sont les éléments de la dernière diagonale.



Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Magog trapèze en un $(n,k)-$Magog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Magog trapèze le Magog de taille $k-l$ suivant



Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Magog trapèze en un $(n,k)-$Magog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Magog trapèze le Magog de taille $k-l$ suivant



Prolongement canonique d'un $(n,k,l)-$Magog trapèze en un $(n,k)-$Magog trapèze en insérant à l'ouest de ce $(n,k,l)-$Magog trapèze le Magog de taille $k-l$ suivant

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & \cdots & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & \cdots & & 1 & & \bullet & & \bullet \\
& 1 & \cdots & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & \bullet & & \bullet & \\
& & \ddots & & \ddots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & \\
& & & & & & & 1 & & 1 & & \bullet & & \bullet & & & \\
& & & & \ddots & & \ddots & & 1 & & \bullet & & \bullet & & & & \\
& & & & & \ddots & & 1 & & \bullet & & \bullet & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & 1 & & \bullet & & & & & & \\
& & & & & & & \ddots & & 1 & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Conjecture sur les triangles

$$|Gog|_{n,r,l} = |Magog|_{n,r,l}$$

<table>
<tr><th>r \ l</th><th>1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1 2 3
1 2
1</td><td colspan="2">1 2 3
1 3
1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1 2 3
1 2
2</td><td>1 2 3
2 3
2</td><td>1 2 3
1 2
2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>1 2 3
1 3
3</td><td>1 2 3
2 3
3</td></tr>
</table>

triangles Gog de taille 3

<table>
<tr><th>r \ l</th><th>1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1 1 1
1 1
1</td><td colspan="2">1 1 2
1 1
1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1 1 2
1 2
1</td><td>1 2 2
1 2
1</td><td>1 1 3
1 2
1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>1 1 3
1 1
1</td><td>1 2 3
1 2
1</td></tr>
</table>

triangles Magog de taille 3

Exemple pour $n = 7$

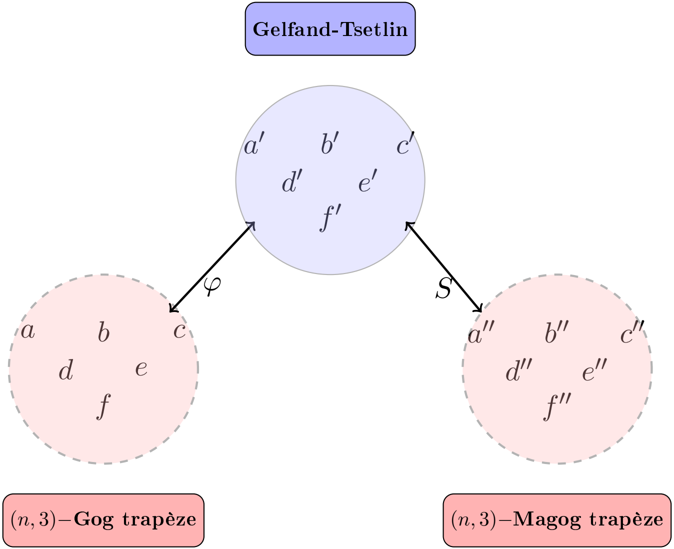
r $\quad l$	1	2	3	4	5	6	7
1	429	1287	2002	2002	1287	429	0
2	1287	4160	6838	7176	4849	1716	0
3	2002	6838	11908	13260	9594	3718	0
4	2002	7176	13260	15912	12714	5720	0
5	1287	4849	9594	12714	11869	7007	0
6	429	1716	3718	5720	7007	7436	0
7	0	0	0	0	0	0	7436

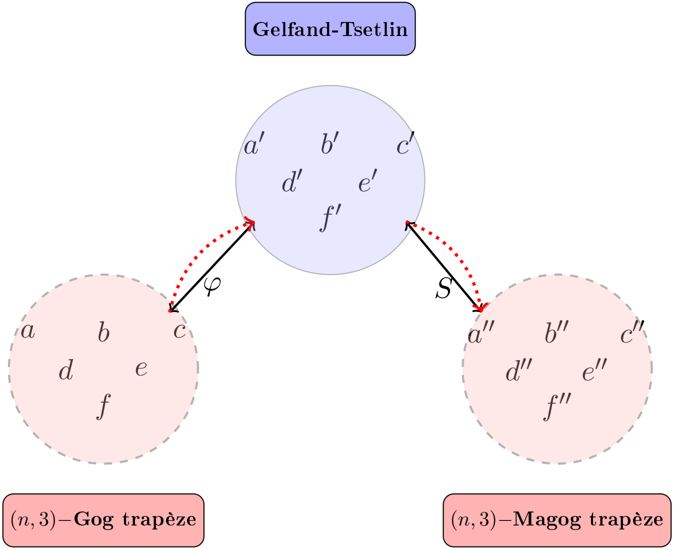
Conjecture sur les trapèzes

Il existe une bijection entre les triangles Gog et Magog qui préserve les statistiques r et l et les trapèzes.

Nous construisons une bijection explicite entre les $(n, 3)-$Gog trapèzes et les $(n, 3)-$Magog trapèzes.
Cette construction se base sur deux opérations

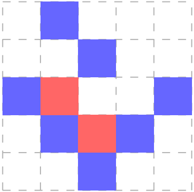
- Transformation de l'Inversion φ.
- Involution de Schützenberger S.


Gelfand-Tsetlin
a' b' c'
d' e'
f'
φ
S
a b c
d e
f
a'' b'' c''
d'' e''
f''
$(n,3)-$**Gog trapèze**
$(n,3)-$**Magog trapèze**



Gelfand-Tsetlin
a' b' c'
d' e'
f'
φ
S
a b c
d e
f
a'' b'' c''
d'' e''
f''
$(n,3)-$**Gog trapèze**
$(n,3)-$**Magog trapèze**

Inversion dans un triangle Gog



1 2 3 4 5

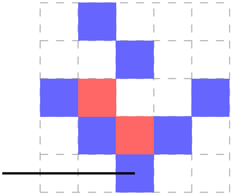
1 3 4 5

1 4 5

2 4

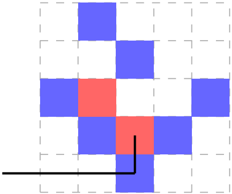
3

Inversion dans un triangle Gog



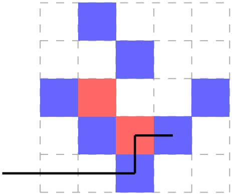
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



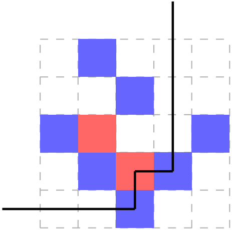
1		2		3		4		5
	1		3		4		5	
		1		4		5		
			2		4			
				3				

Inversion dans un triangle Gog



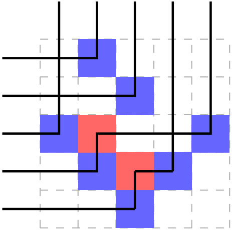
1 2 3 4 5
1 3 4 5
1 4 5
2 4
3

Inversion dans un triangle Gog



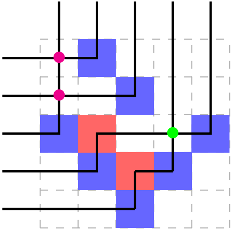
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



1 2 3 4 5
1 3 4 5
1 4 5
2 4
3

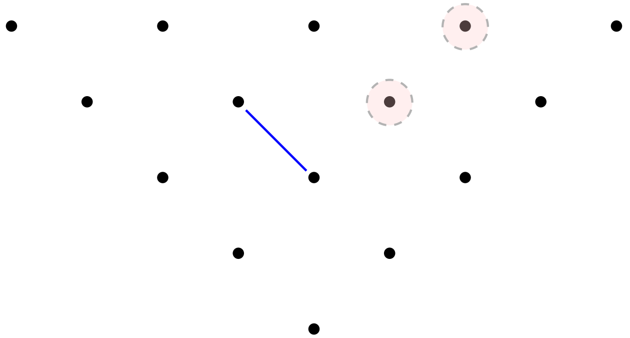
Inversion dans un triangle Gog



$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}
$$

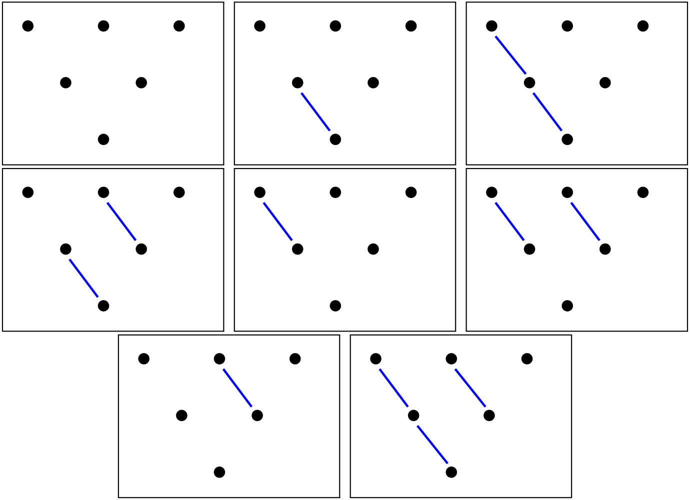
Inversion dans un triangle

Soit x un Gog trapèze. x contient une inversion



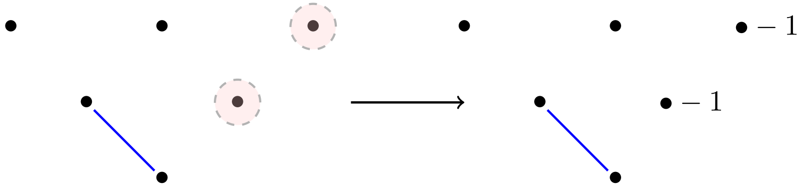
Les éléments  sont couverts par l'inversion.

Configurations d'inversions dans $(n,3)-$Gog trapèzes



Transformation de l'inversion (φ)

La transformation de l'inversion agit sur les $(n, 3)-$Gog trapèze en diminuant les éléments couverts par chaque inversion de 1



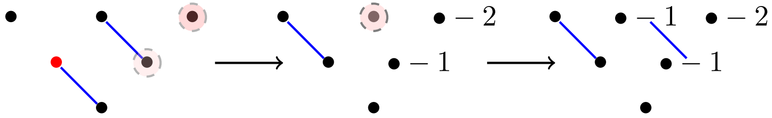
Problème

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & \not\leq & 2 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Problème

$$\begin{array}{ccccc}1&&3&&4\\&2&&3&\\&&2&&\end{array}\xrightarrow{\varphi}\begin{array}{ccccc}1&&3&\not\leq&2\\&2&&2&\\&&2&&\end{array}$$

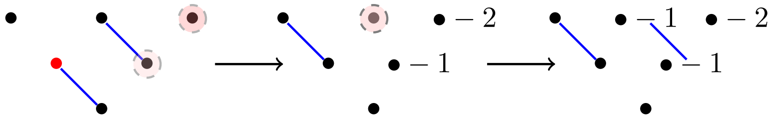
Solution



Problème

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & \not\leq & 2 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

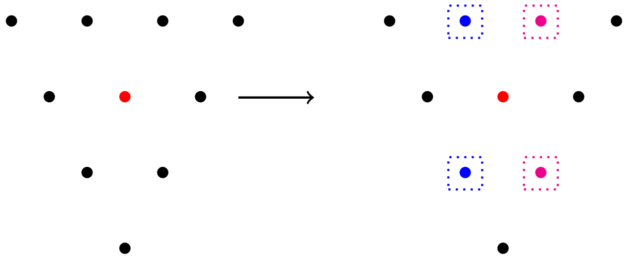
Solution



$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 2 \\ & 1 & & 2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

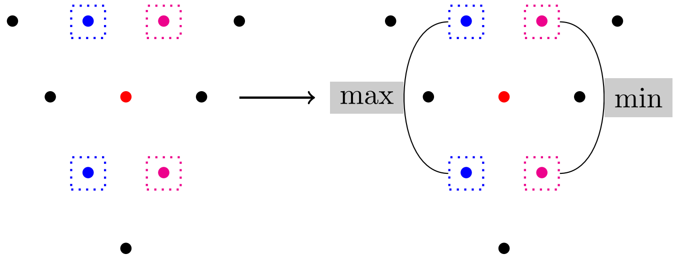
Involution de Schützenberger

Soit un trapèze de Gelfand-Tsetlin de taille n . Définissons l'opération τ sur un élément d'une ligne comme suit :



Involution de Schützenberger

Soit un Gelfand-Tsetlin trapèze de taille n . Définissons l'opération τ qui agit sur un élément d'une ligne comme suit :



$$\tau(\bullet) = \boxed{\max} + \boxed{\min} - \bullet$$

τ_i agit sur tous les éléments de la i^{me} ligne.

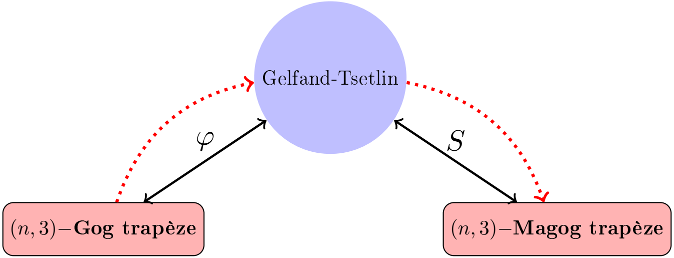
Involution de Schützenberger

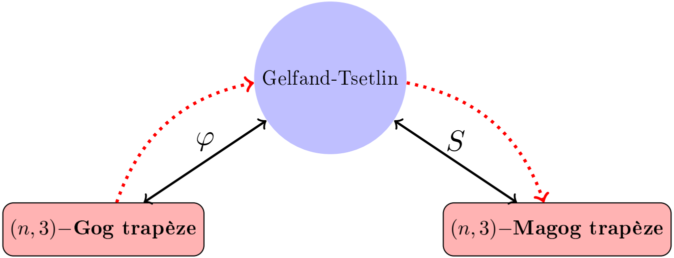
Soit un Gog ou Magog trapèze de taille n. On note S_n l'involution de Schützenberger qui agit comme suit

$$S_n = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-2}\cdots\tau_1\tau_2\tau_1$$

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&2&&8&\\&&4&&\end{array}\xrightarrow{\tau_1}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&2&&8&\\&&6&&\end{array}\xrightarrow{\tau_2}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&5&&6&\\&&6&&\end{array}\xrightarrow{\tau_1}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&5&&6&\\&&5&&\end{array}$$


Gelfand-Tsetlin
φ
S
$(n,3)-$**Gog trapèze**
$(n,3)-$**Magog trapèze**

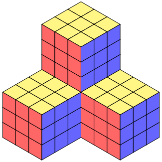


Théorème [C, Biane]

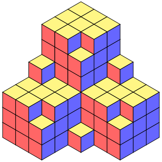
Cet algorithme est une bijection qui préserve les statistiques l et r.

Concluons ...

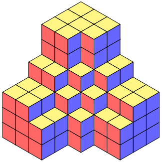
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$



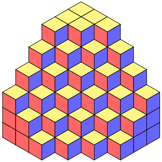
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$



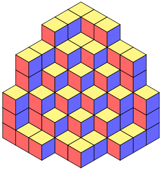
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$



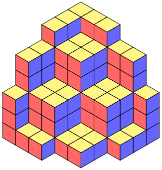
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$



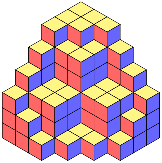
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

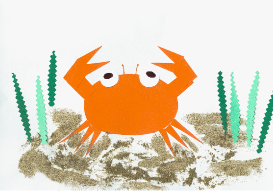


$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$





Merci