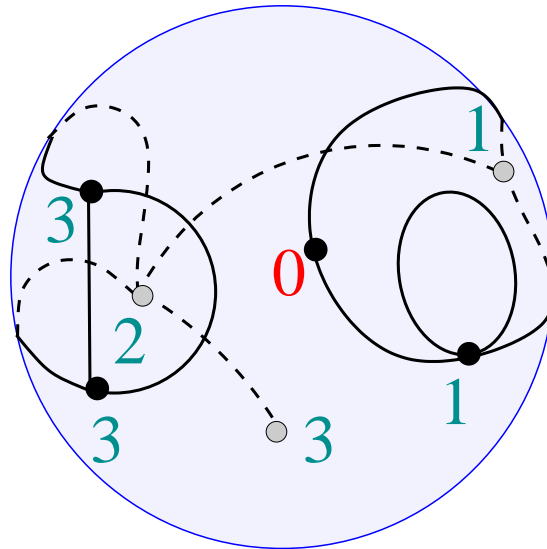
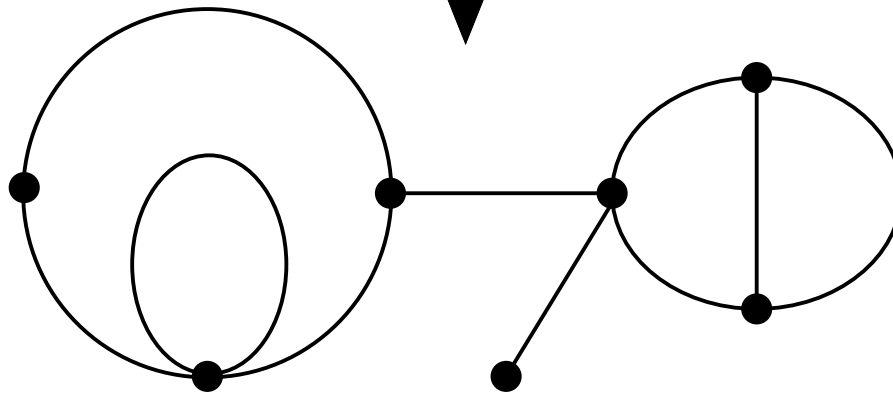
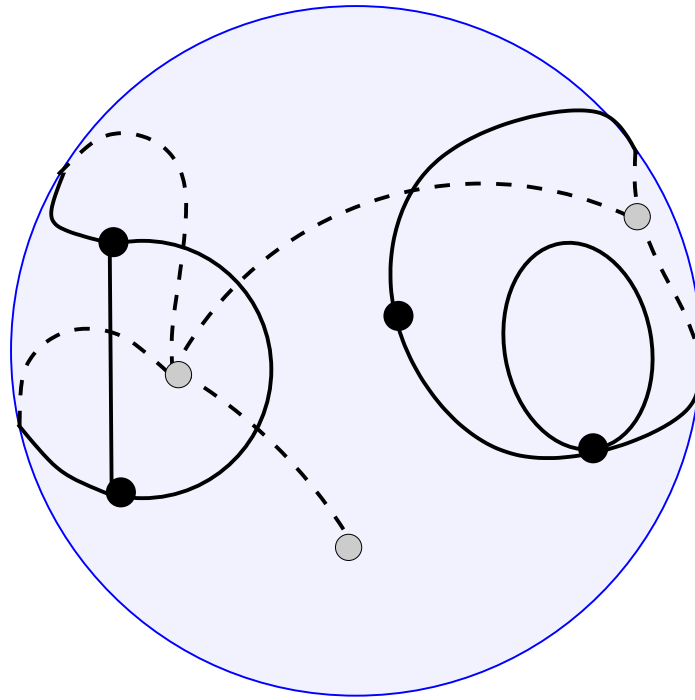


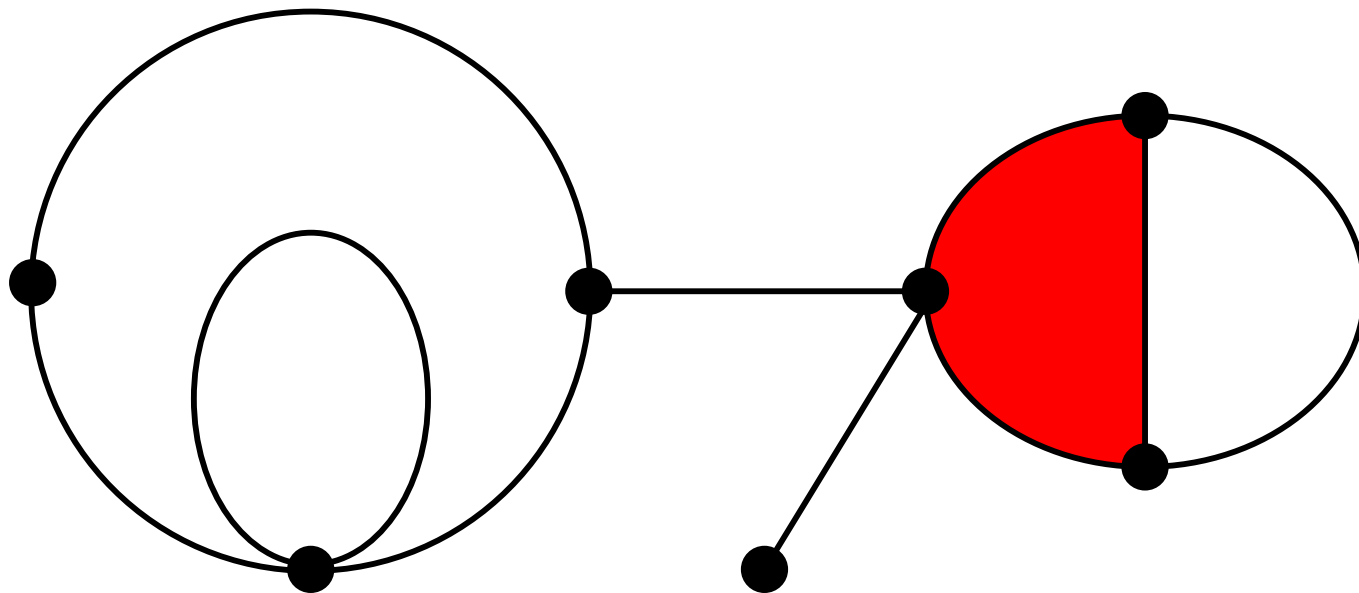
Cartes planaires et fractions continues

en collaboration avec Jérémie Bouttier

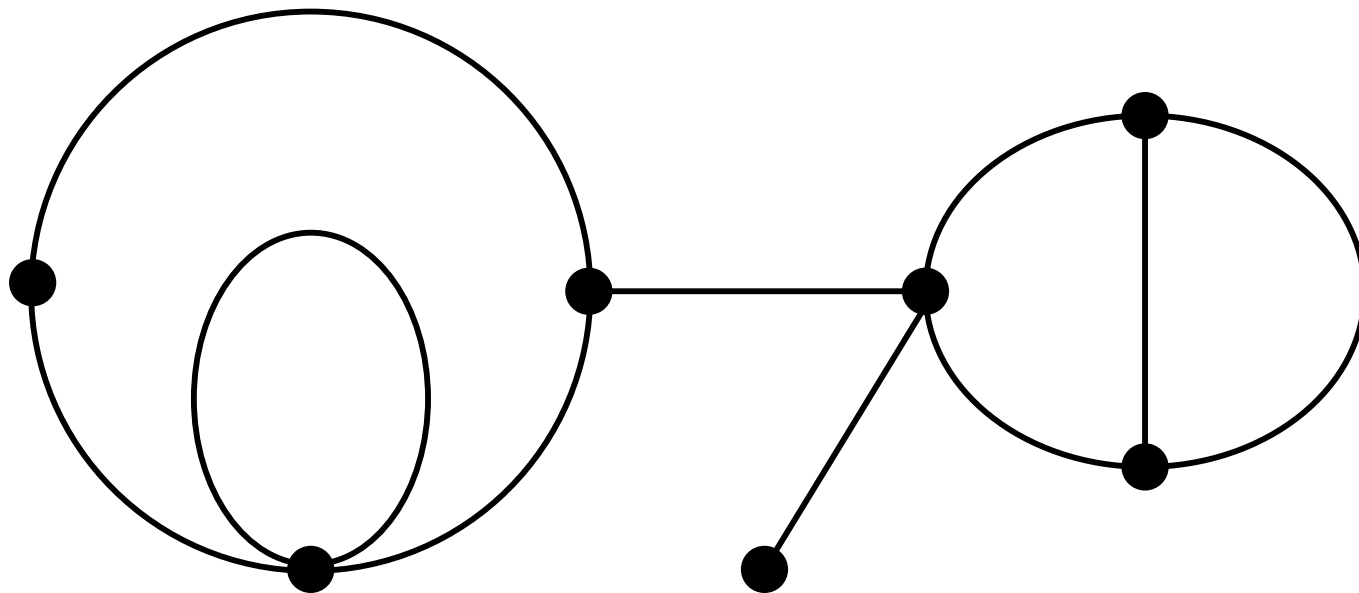


cartes et distances: généralités

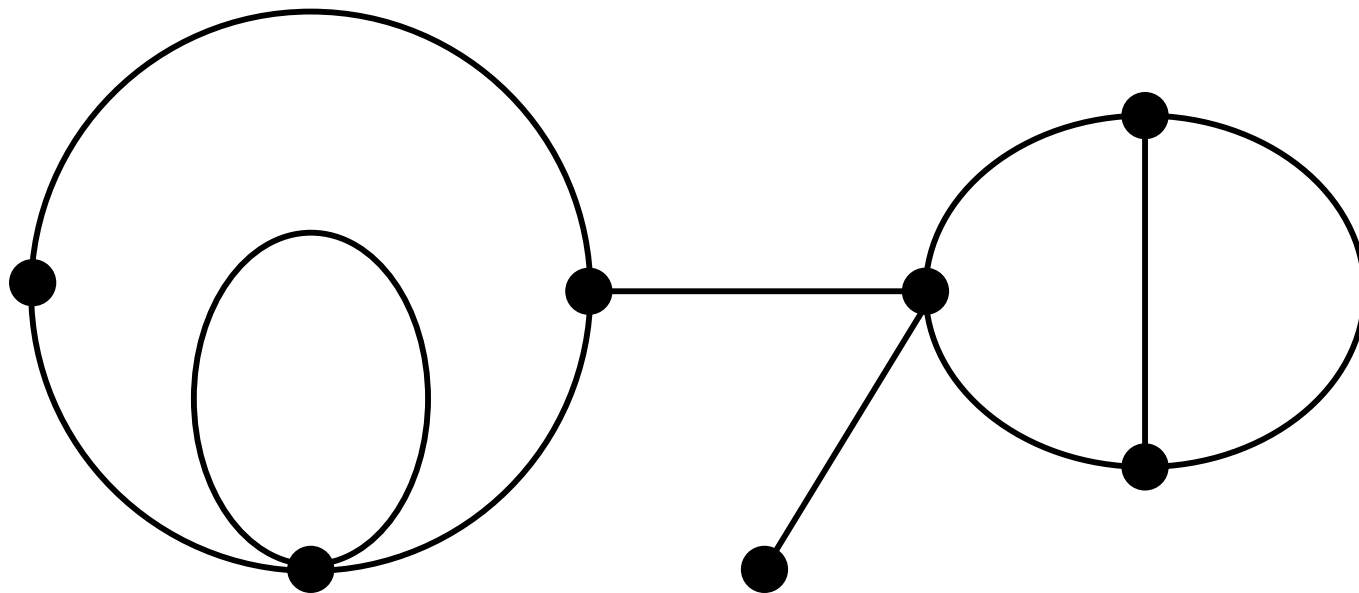




degré d'une face = nombre de demi-arêtes incidentes (ici **3**)



→ énumérer les cartes **en contrôlant le degré des faces**

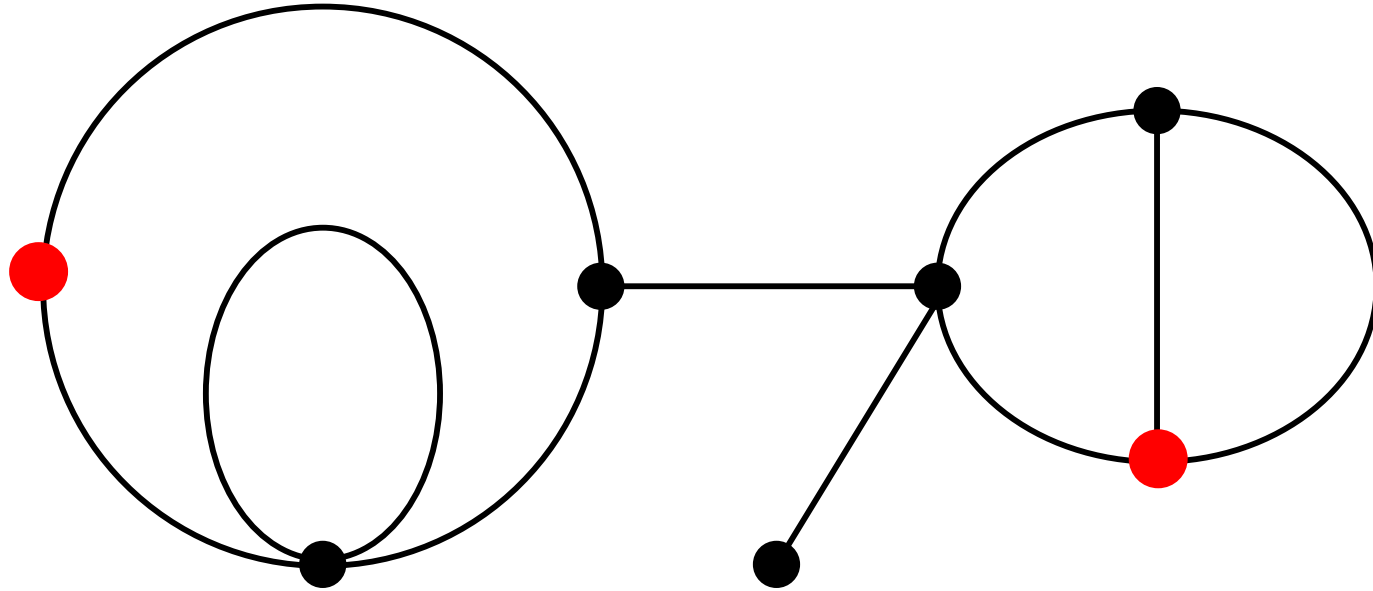


→ calculer la **fonction génératrice** des cartes
avec un poids g_k par face de degré k

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_{10}$$

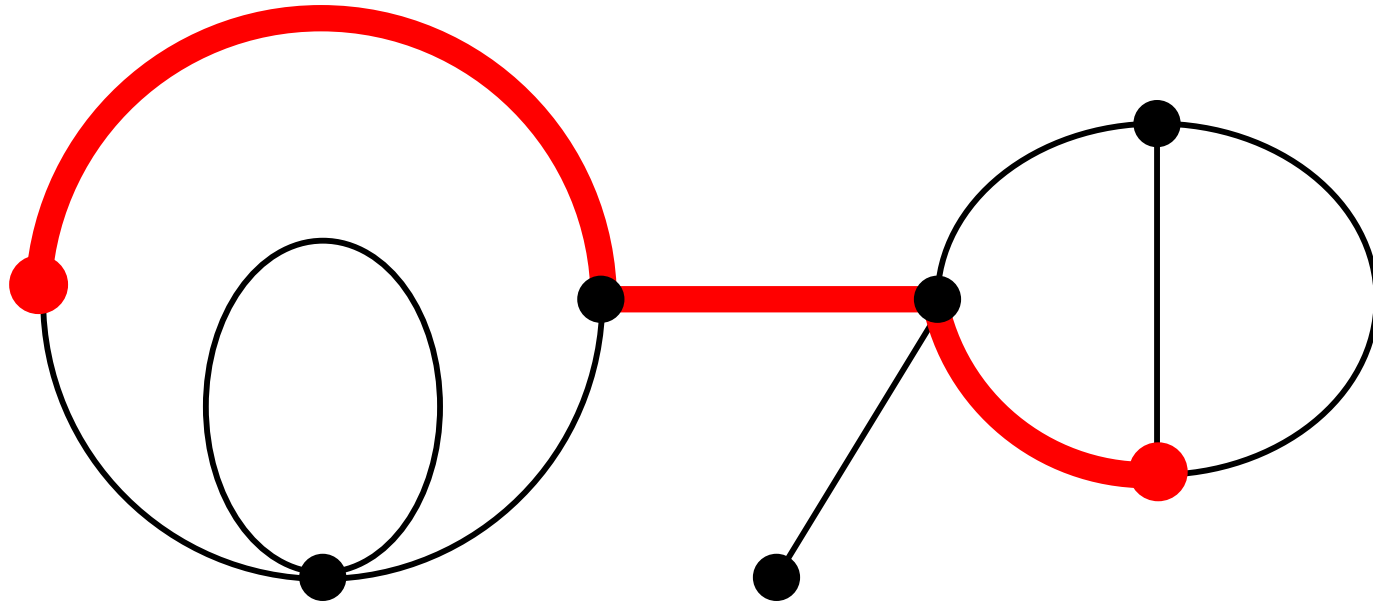
en pratique, degrés bornés (seul un nombre fini de g_k non-nuls)

distance dans les cartes

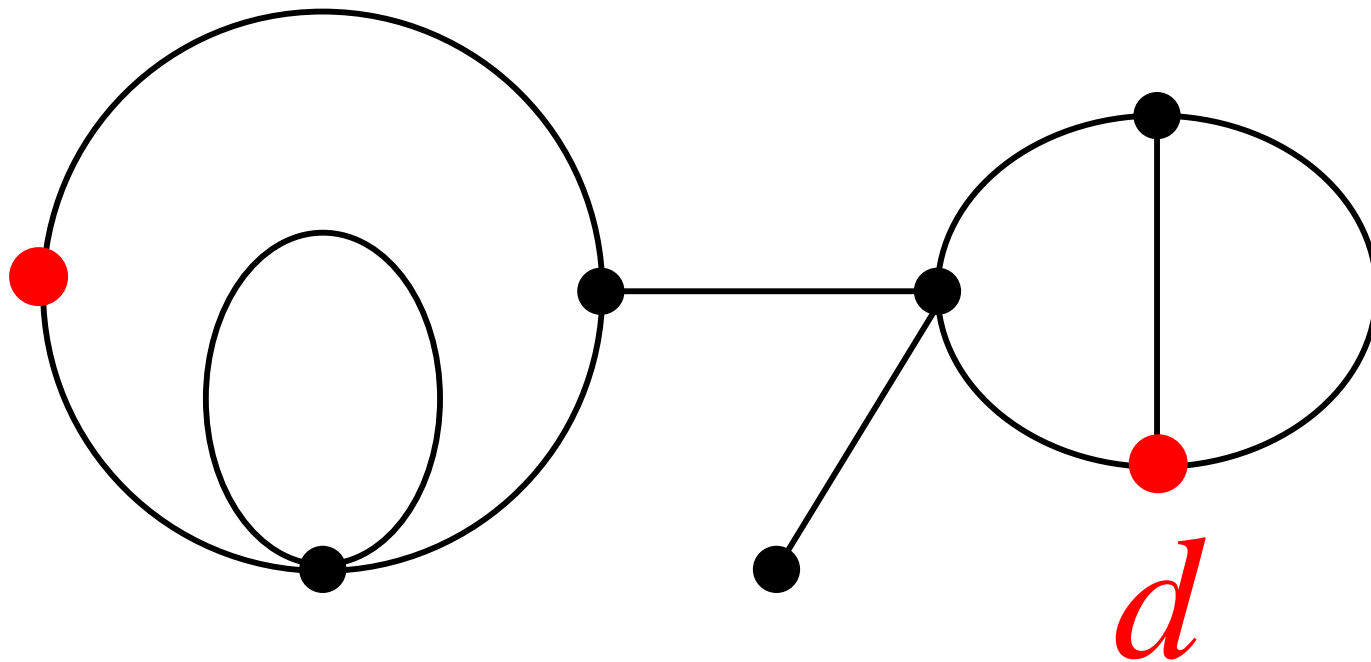


distance d entre deux sommets de la carte

distance dans les cartes

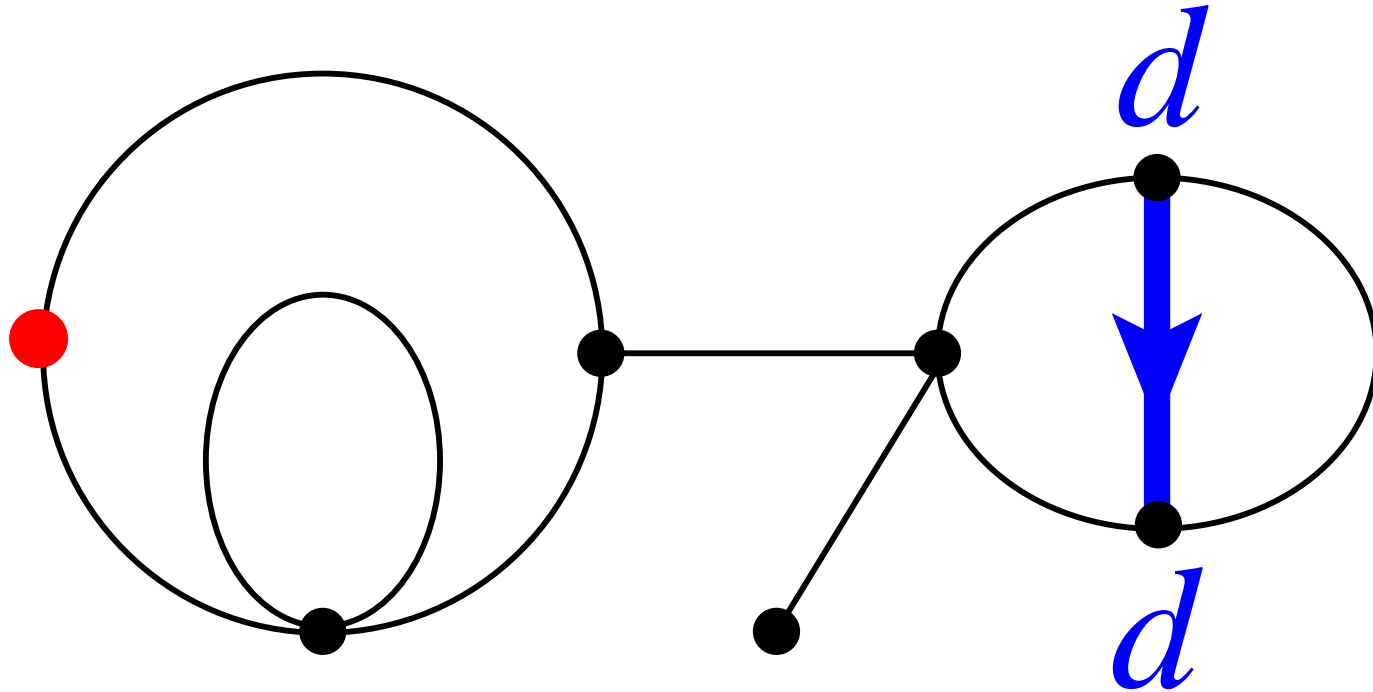


distance d entre deux sommets de la carte
= nombre minimal d'arêtes pour les relier (ici $d = 3$)



fonction à deux points dépendant de la distance
= f.g. des cartes avec:

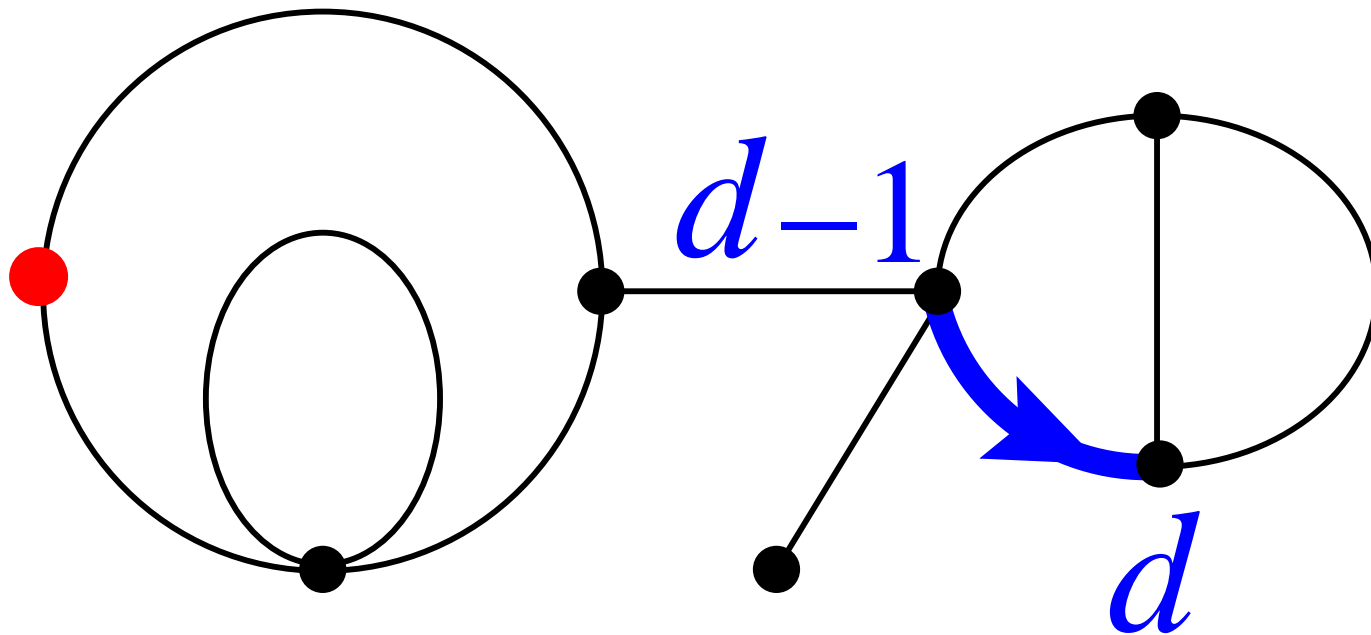
deux sommets marqués à distance d



fonction à deux points dépendant de la distance
 = f.g. des cartes avec:

un sommet et une arête orientée marqués à distance d

c-à-d: \diamond de type (d, d) : t_d ($d \geq 0$)



fonction à deux points dépendant de la distance
 = f.g. des cartes avec:

un sommet et une arête orientée marqués à distance d

c-à-d: \diamond de type $(d - 1, d)$: $r_d - \delta_{d,1} \quad (d \geq 1)$

il est plus simple d'imposer que la distance soit **plus petite** qu'une valeur i donnée, c-à-d de considérer les f.g.

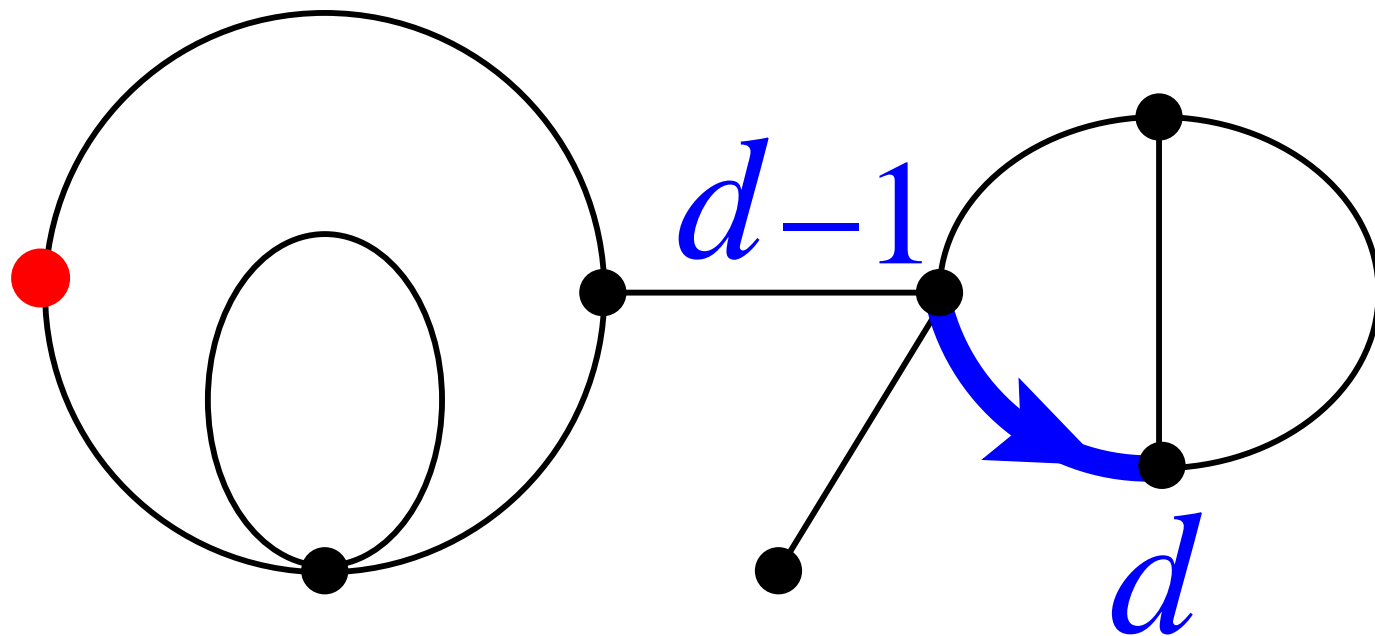
$$R_i = \sum_{d=1}^i r_d \quad (i \geq 1)$$

et

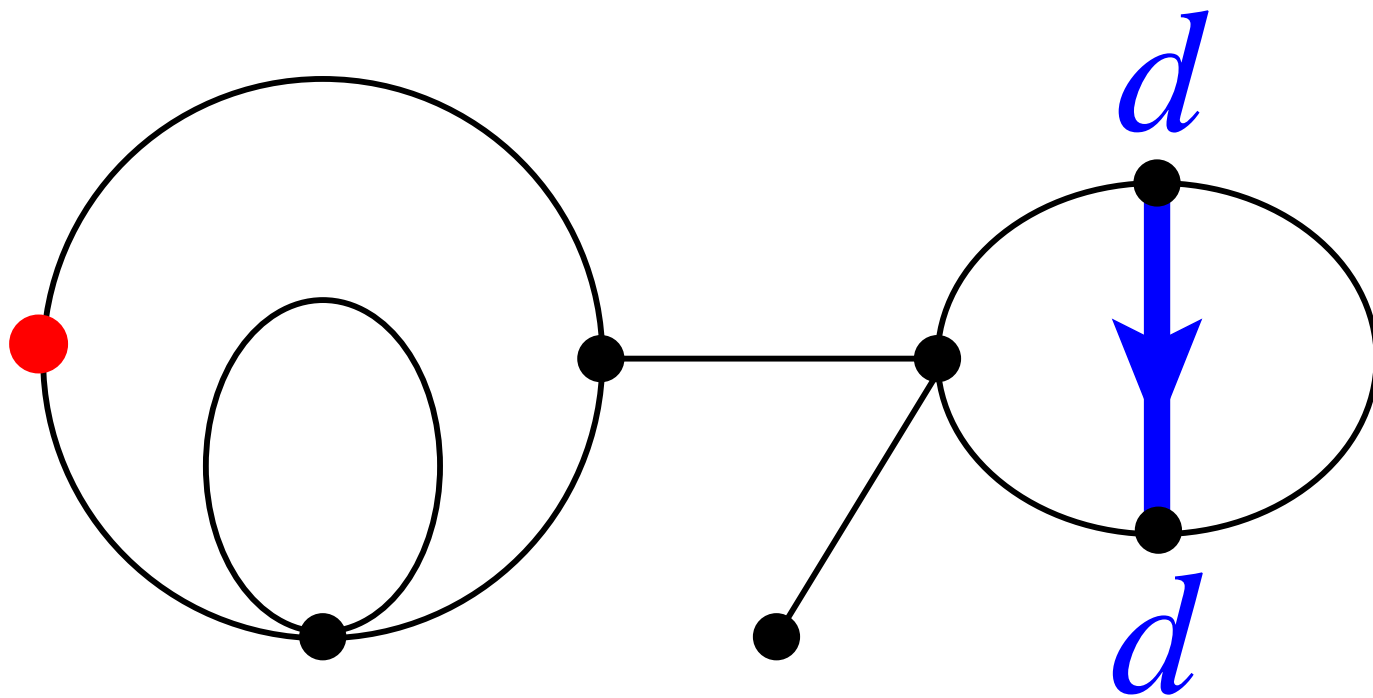
$$S_i = \left(\sum_{d=0}^i t_d \right)^{1/2} \quad (i \geq 0)$$

de sorte que

$$r_d = R_d - R_{d-1}, \quad t_d = S_d^2 - S_{d-1}^2$$



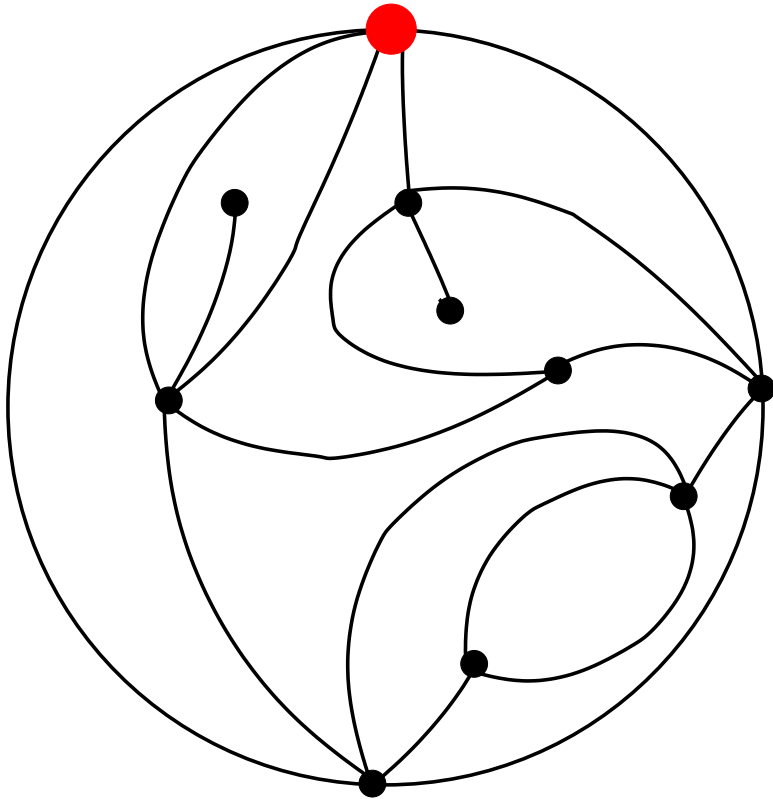
$$d \leq i \longrightarrow R_i - 1$$



$$d \leq i \longrightarrow S_i^2$$

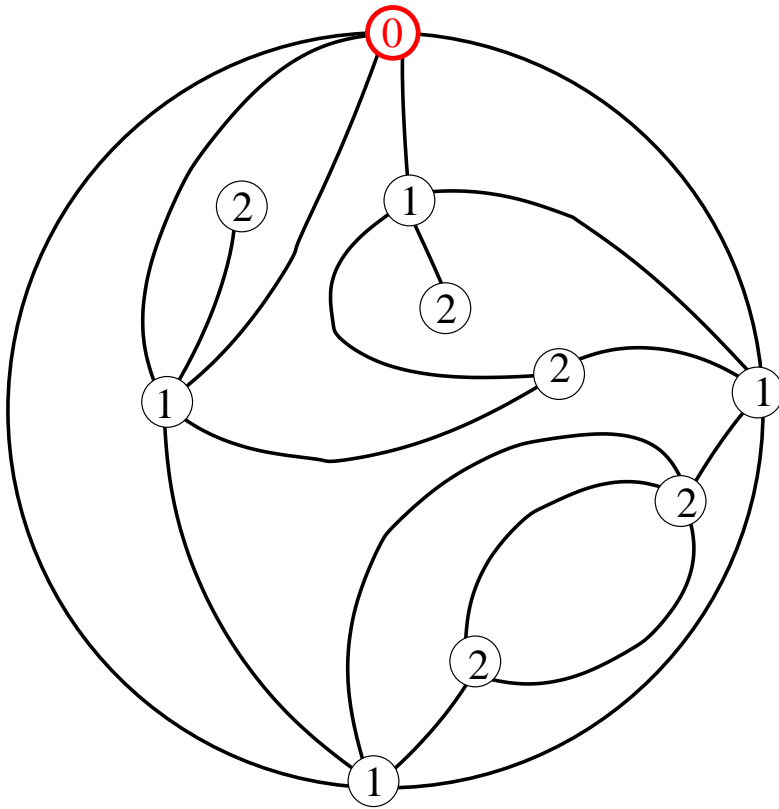
le codage par mobiles

on part d'une carte planaire avec un **sommet marqué**



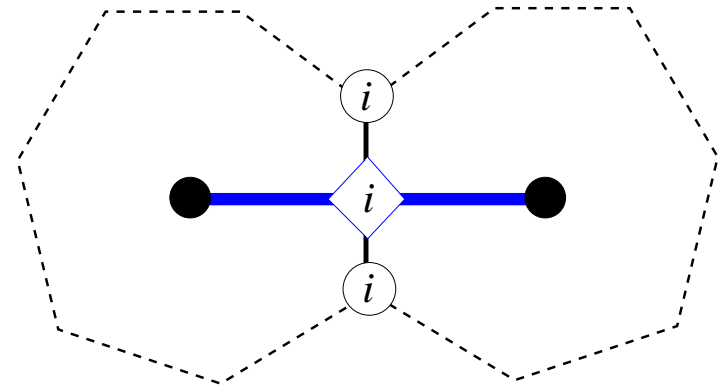
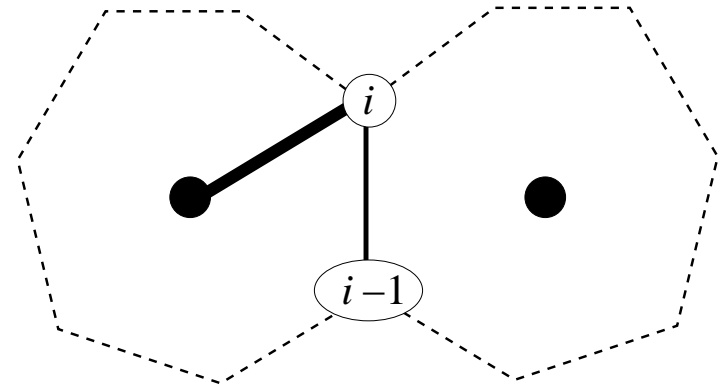
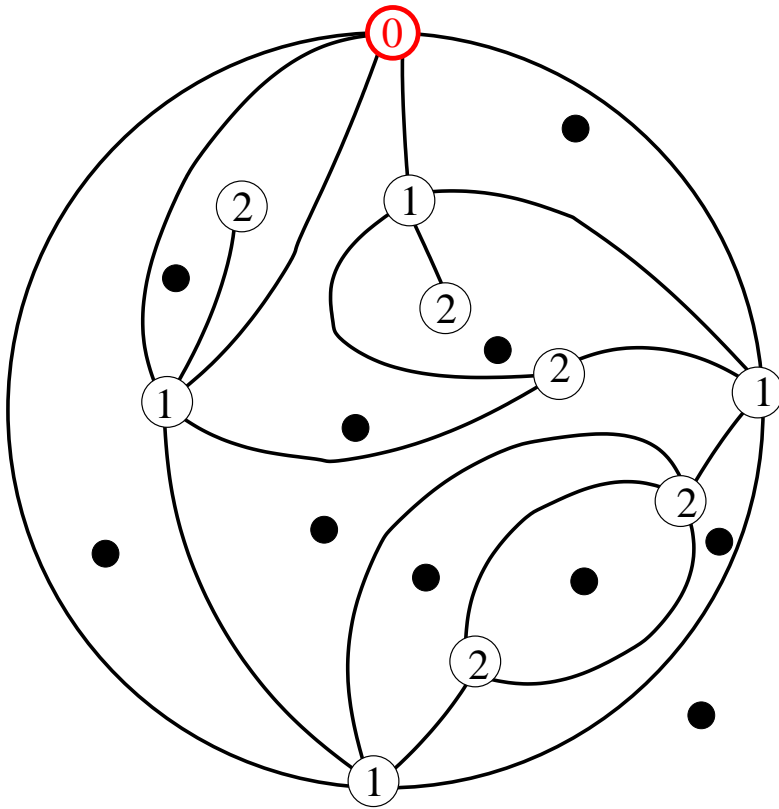
le codage par mobiles

on part d'une carte planaire avec un **sommet marqué**



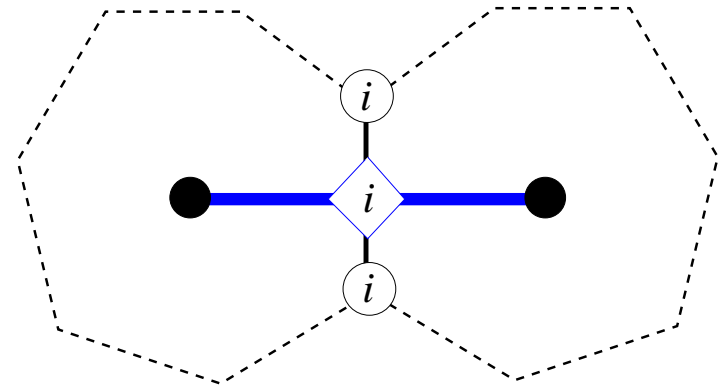
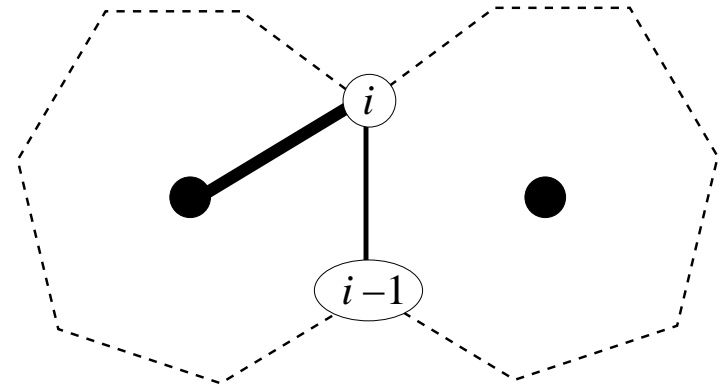
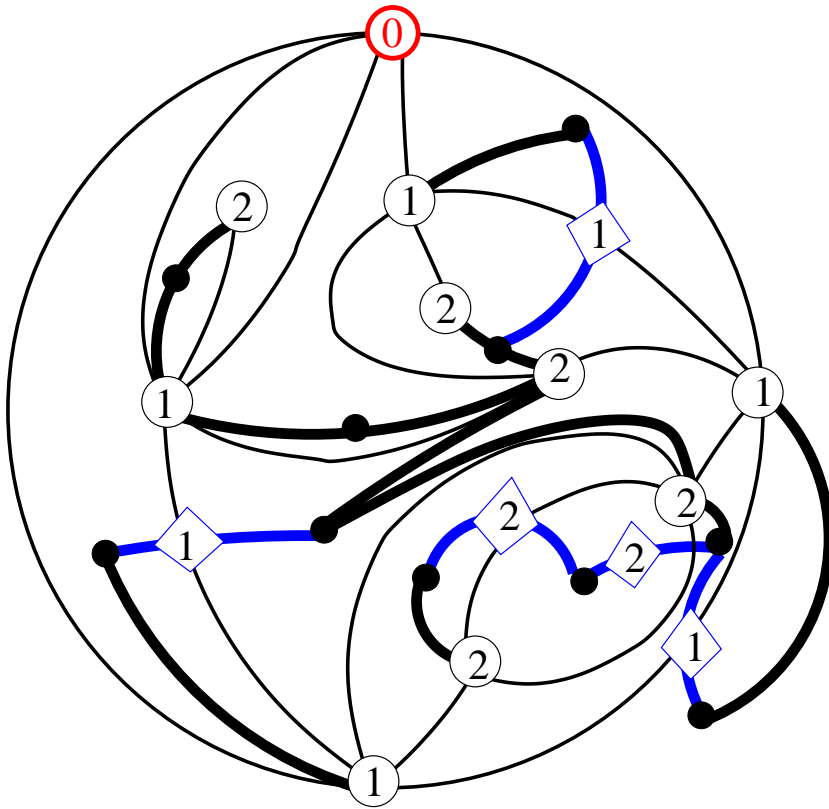
le codage par mobiles

on part d'une carte planaire avec un **sommet marqué**



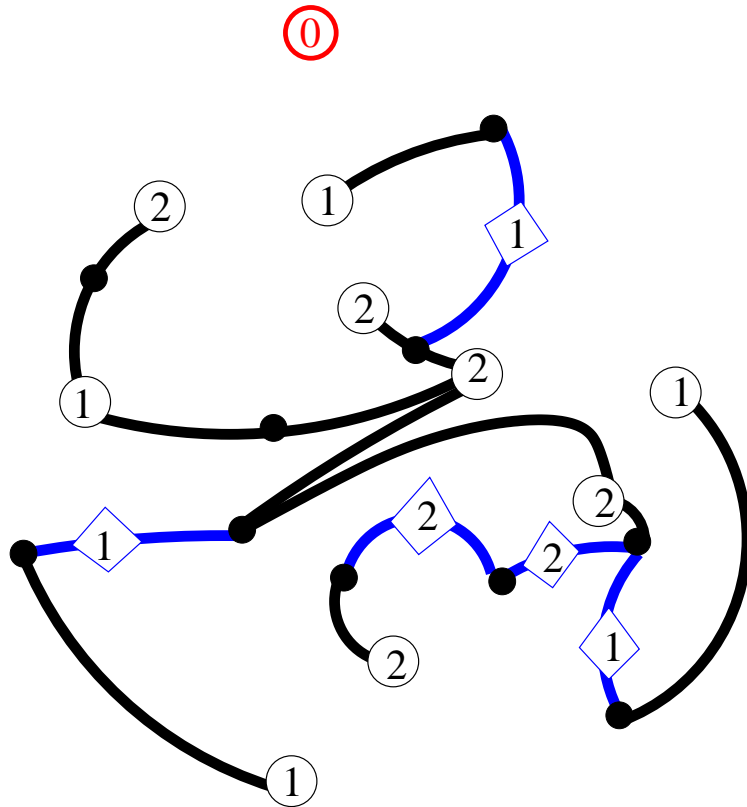
le codage par mobiles

on part d'une carte planaire avec un **sommet marqué**



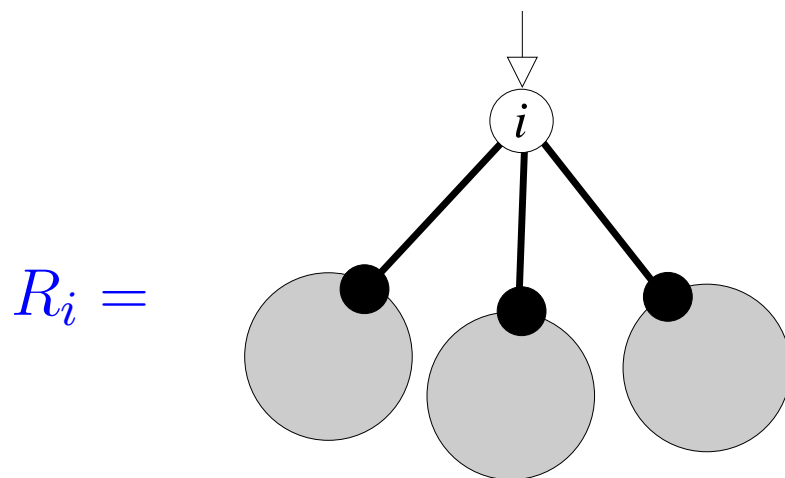
le codage par mobiles

on part d'une carte planaire avec un **sommet marqué**

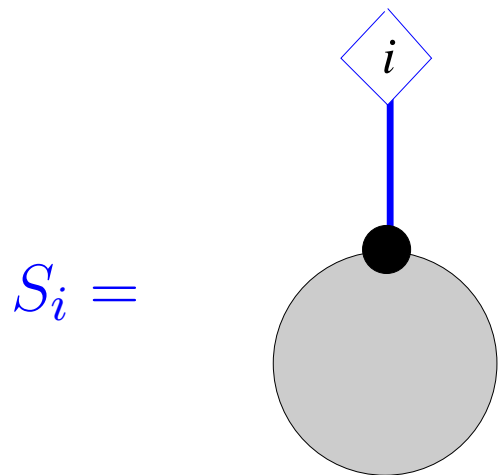


on obtient un **mobile** \equiv arbre avec étiquettes (= entiers)

R_i et S_i peuvent s'interpréter comme des f.g. de mobiles



et



→ rel. de récurrence pour R_i et S_i

examples

◇ triangulations $g_k = g_3 \delta_{k,3}$

examples

◇ triangulations $g_k = g_3 \delta_{k,3}$

$$R_i = 1 + g_3 R_i (S_i + S_{i-1}), \quad S_i = g_3 (S_i^2 + R_i + R_{i+1}) \quad (R_0 = 0)$$

examples

◇ triangulations $g_k = g_3 \delta_{k,3}$

$$R_i = 1 + g_3 R_i (S_i + S_{i-1}), \quad S_i = g_3 (S_i^2 + R_i + R_{i+1}) \quad (R_0 = 0)$$

◇ quadrangulations $g_k = g_4 \delta_{k,4}$

$$R_i = 1 + g_4 R_i (R_{i-1} + R_i + R_{i+1}), \quad S_i = 0 \quad (R_0 = 0)$$

examples

◇ triangulations $g_k = g_3 \delta_{k,3}$

$$R_i = 1 + g_3 R_i (S_i + S_{i-1}), \quad S_i = g_3 (S_i^2 + R_i + R_{i+1}) \quad (R_0 = 0)$$

$$R_i = R \frac{(1-y^i)(1-y^{i+2})}{(1-y^{i+1})^2}, \quad S_i = S - g_3 R^2 y^i \frac{(1-y)(1-y^2)}{(1-y^{i+1})(1-y^{i+2})}$$

$$R = 1 + 2g_3 RS, \quad S = g_3 (S^2 + 2R) \quad y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1}{g_3^2 R^3}$$

◇ quadrangulations $g_k = g_4 \delta_{k,4}$

$$R_i = 1 + g_4 R_i (R_{i-1} + R_i + R_{i+1}), \quad S_i = 0 \quad (R_0 = 0)$$

examples

◇ triangulations $g_k = g_3 \delta_{k,3}$

$$R_i = 1 + g_3 R_i (S_i + S_{i-1}), \quad S_i = g_3 (S_i^2 + R_i + R_{i+1}) \quad (R_0 = 0)$$

$$R_i = R \frac{(1-y^i)(1-y^{i+2})}{(1-y^{i+1})^2}, \quad S_i = S - g_3 R^2 y^i \frac{(1-y)(1-y^2)}{(1-y^{i+1})(1-y^{i+2})}$$

$$R = 1 + 2g_3 RS, \quad S = g_3 (S^2 + 2R) \quad y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1}{g_3^2 R^3}$$

◇ quadrangulations $g_k = g_4 \delta_{k,4}$

$$R_i = 1 + g_4 R_i (R_{i-1} + R_i + R_{i+1}), \quad S_i = 0 \quad (R_0 = 0)$$

$$R_i = R \frac{(1-y^i)(1-y^{i+3})}{(1-y^{i+1})(1-y^{i+2})}, \quad R = 1 + 3g_4 R^2, \quad y + \frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{g_4 R^2}$$

jusqu'à maintenant, la solution avait été **devinée** pour

- les triangulations

- les cartes biparties *c-à-d avec des faces de degrés pairs*
uniquement ($g_{2k+1} = 0 \forall k$)

jusqu'à maintenant, la solution avait été **prouvée** pour

- les triangulations
- les cartes biparties pour des petits degrés 4,6,8

jusqu'à maintenant, la solution avait été **prouvée** pour

- les triangulations

- les cartes biparties pour des petits degrés 4,6,8

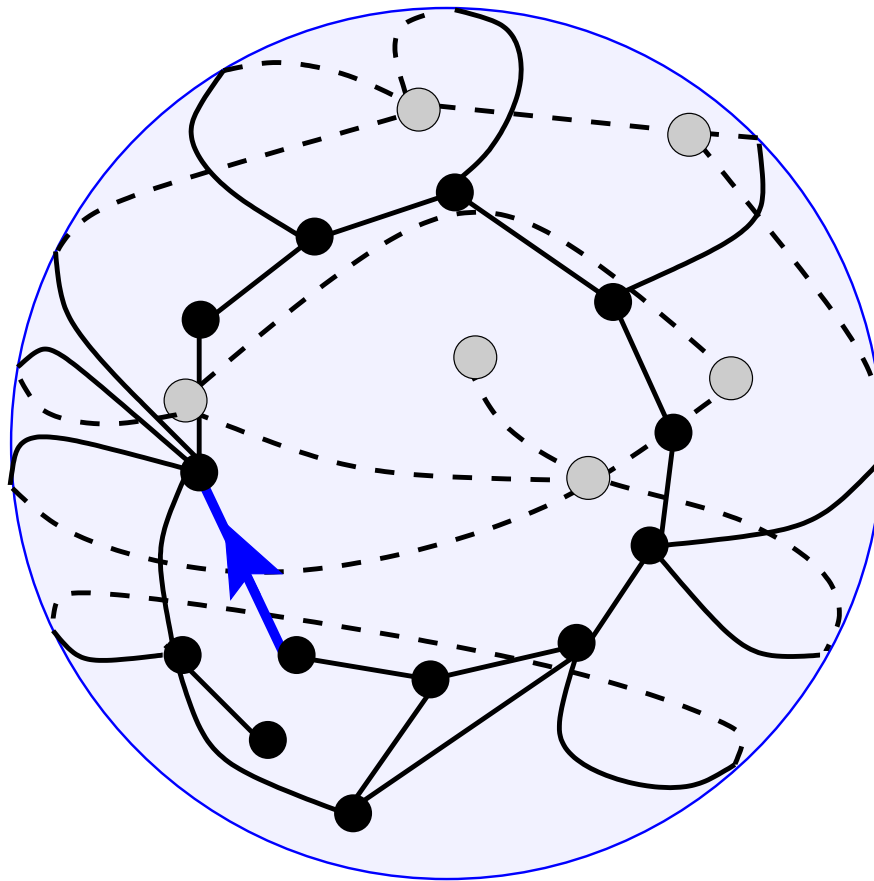
- ◇ peut-on obtenir une expression générale de R_i et S_i pour des cartes arbitraires ?

- ◇ peut-on l'obtenir de façon constructive (pas simplement la deviner) ?

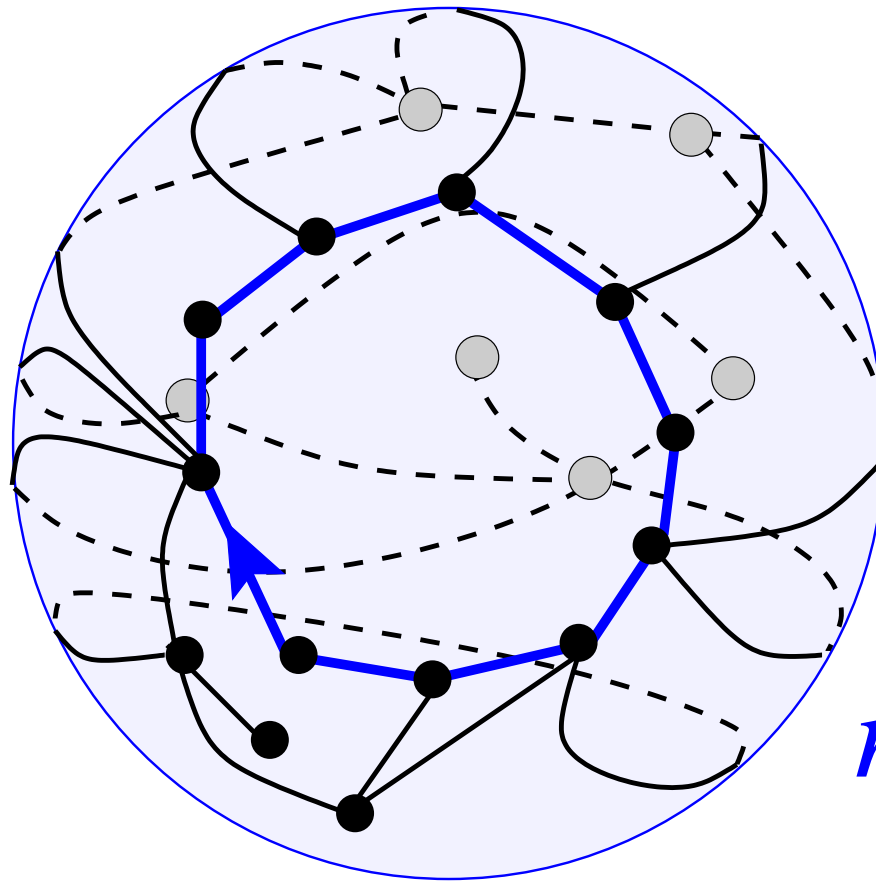
- ◇ peut-on expliquer la forme observée (sous forme de (bi-)rapports) ?

une connexion inattendue
avec un problème beaucoup plus simple

carte **enracinée** \equiv avec une **arête orientée marquée**

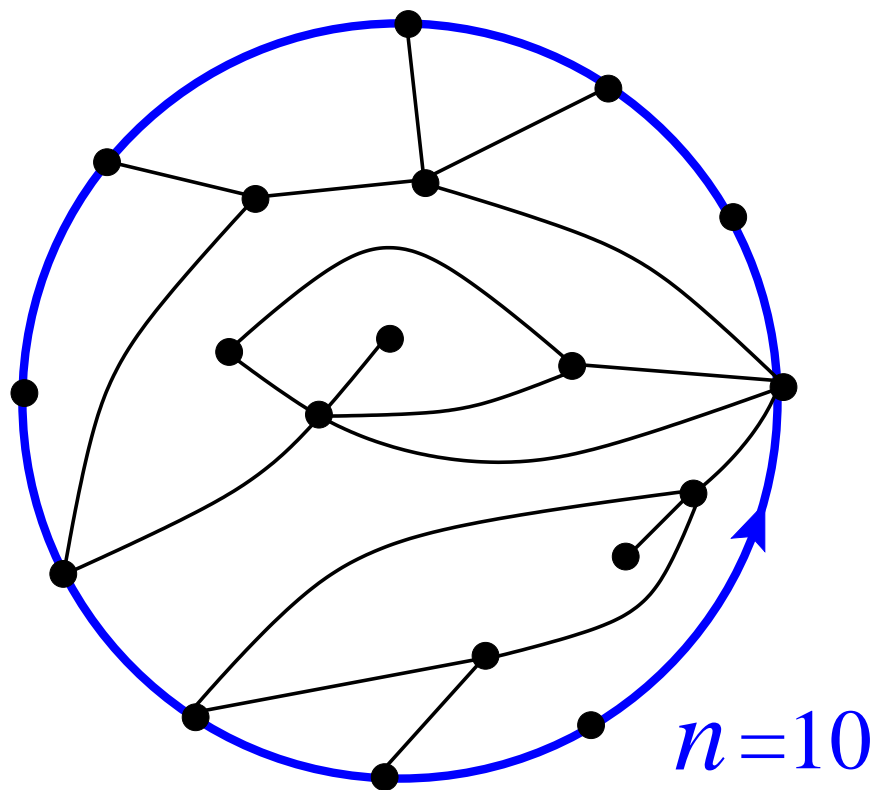


contrôle sur le degré n de la **face racine** (à droite de l'arête)

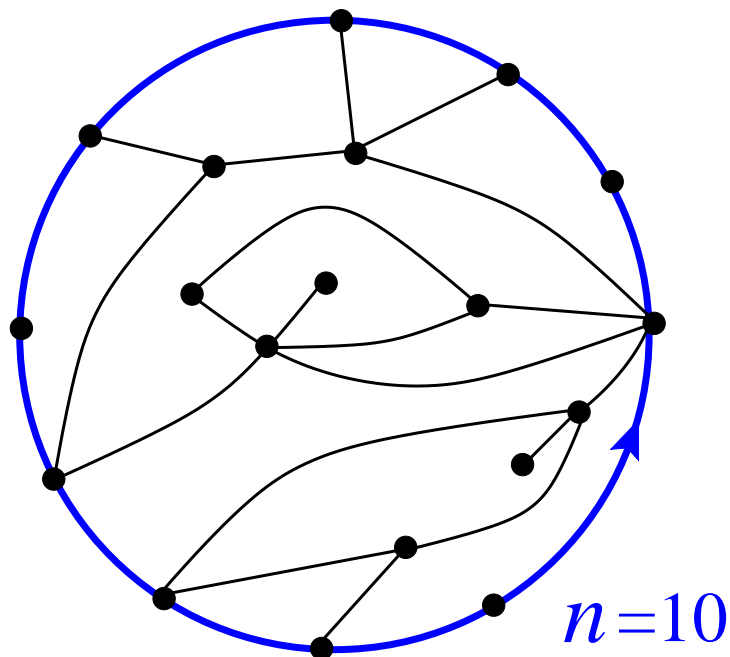


$n = 10$

en prenant la face racine comme **face externe** dans le plan



cartes avec un "bord" de longueur n



$$\rightarrow F_n$$

par convention, pas de poids pour la face externe et $F_0 = 1$

- quantité **globale** (*ne fait pas intervenir la distance*)
- obéit aux **équations de Tutte** (\equiv équations de boucles des modèles de matrices) bien comprises depuis Tutte (60's)

si l'on considère la “résolvante” (bien comprise)

$$F(z) \equiv \sum_{n \geq 0} F_n z^n$$

si l'on considère la "résolvante" (bien comprise)

$$F(z) \equiv \sum_{n \geq 0} F_n z^n$$

alors, on a la propriété remarquable:

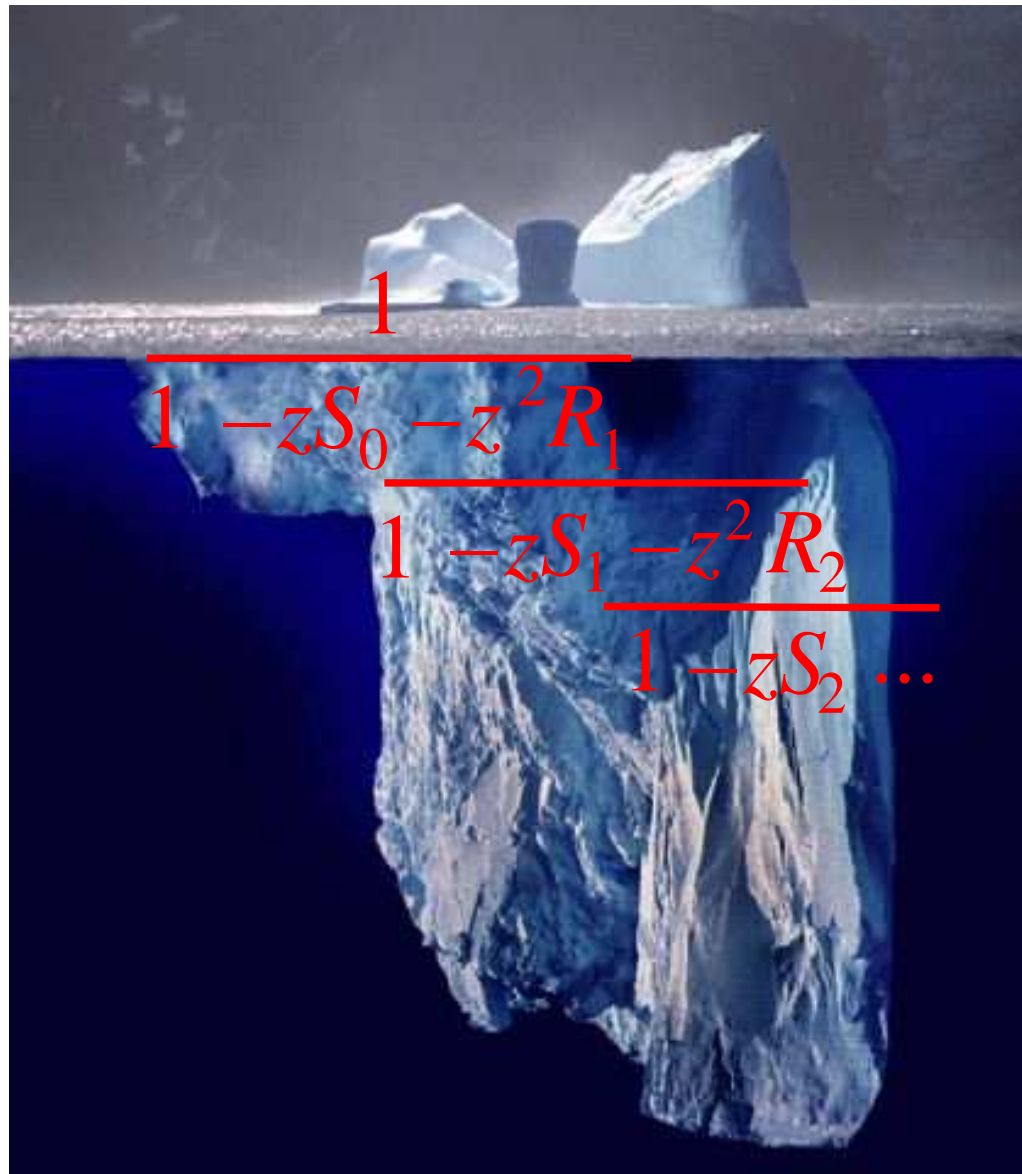
$$F(z) = \frac{1}{1 - S_0 z - \frac{R_1 z^2}{1 - S_1 z - \frac{R_2 z^2}{1 - \dots}}}$$

→ les fonctions à deux points dépendant de la distance S_i et R_i sont données par le développement en **fraction continue** de la résolvante

$$F(z) =$$



$$F(z) =$$



$$\frac{1}{1 - zS_0 - z^2 R_1} \frac{1}{1 - zS_1 - z^2 R_2} \frac{1}{1 - zS_2 \dots}$$

fractions continues et chemins

résultat classique de combinatoire (Flajolet 1980):

$$\frac{1}{1 - S_0 z - \frac{R_1 z^2}{1 - S_1 z - \frac{R_2 z^2}{1 - \dots}}} = \sum_{n \geq 0} Z_{0,0}^+(n) z^n$$

où $Z_{0,0}^+(n)$ est la f.g. de chemins de Motzkin de longueur n :

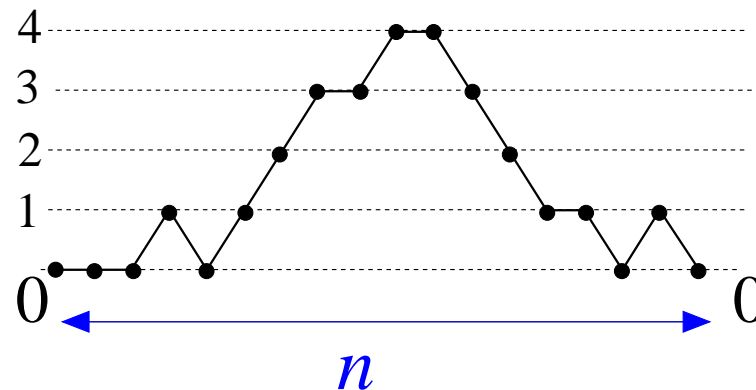
fractions continues et chemins

résultat classique de combinatoire (Flajolet 1980):

$$\frac{1}{1 - S_0 z - \frac{R_1 z^2}{1 - S_1 z - \frac{R_2 z^2}{1 - \dots}}} = \sum_{n \geq 0} Z_{0,0}^+(n) z^n$$

$$Z_{0,0}^+(n) = \sum_{\text{chemins dans } Z_{0,0}^+(n)} \prod_{i \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \\ \dashrightarrow \end{array}} R_i \prod_{i \begin{array}{l} \dashrightarrow \\ \dashleftarrow \end{array}} S_i$$

$Z_{0,0}^+(n)$:

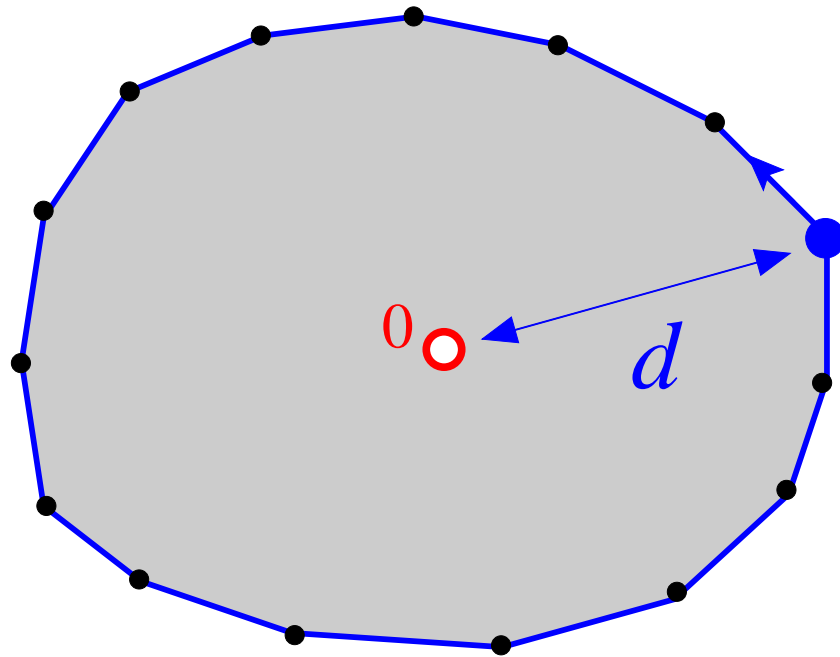


on a la propriété remarquable

$$F_n = Z_{0,0}^+(n)$$

*où $Z_{0,0}^+(n)$ énumère les chemins de Motzkin
pondérés par les fonctions à deux points dépendant
de la distance R_i et S_i*

preuve

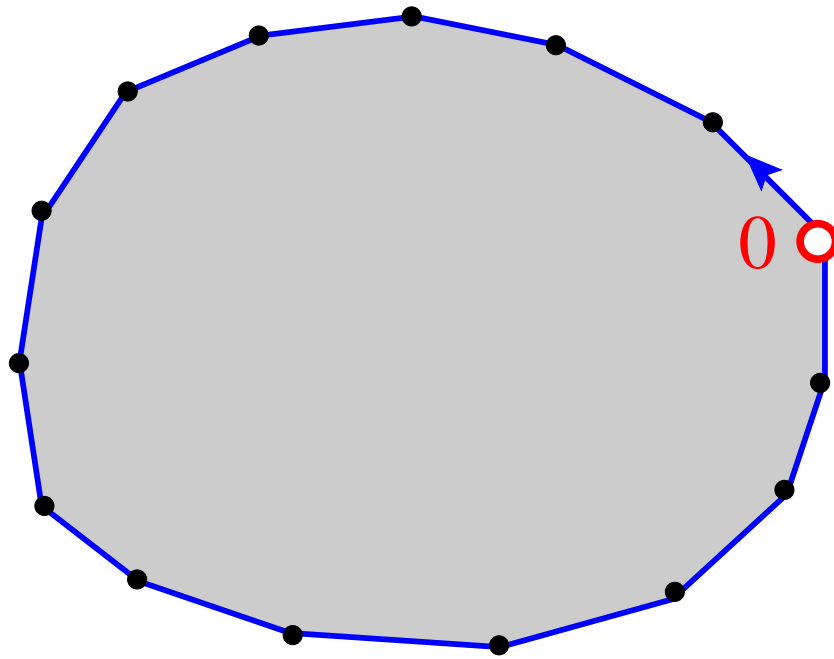


plus-proche sommet
à distance d

cartes avec un bord de longueur n , un sommet marqué \circ et une arête orientée marquée sur le bord dont l'origine \bullet est à distance d du sommet marqué \circ et est un "plus-proche sommet" (\equiv plus proche de \circ que tous les autres sommets du bord)

$$\rightarrow f_{n;d}$$

preuve

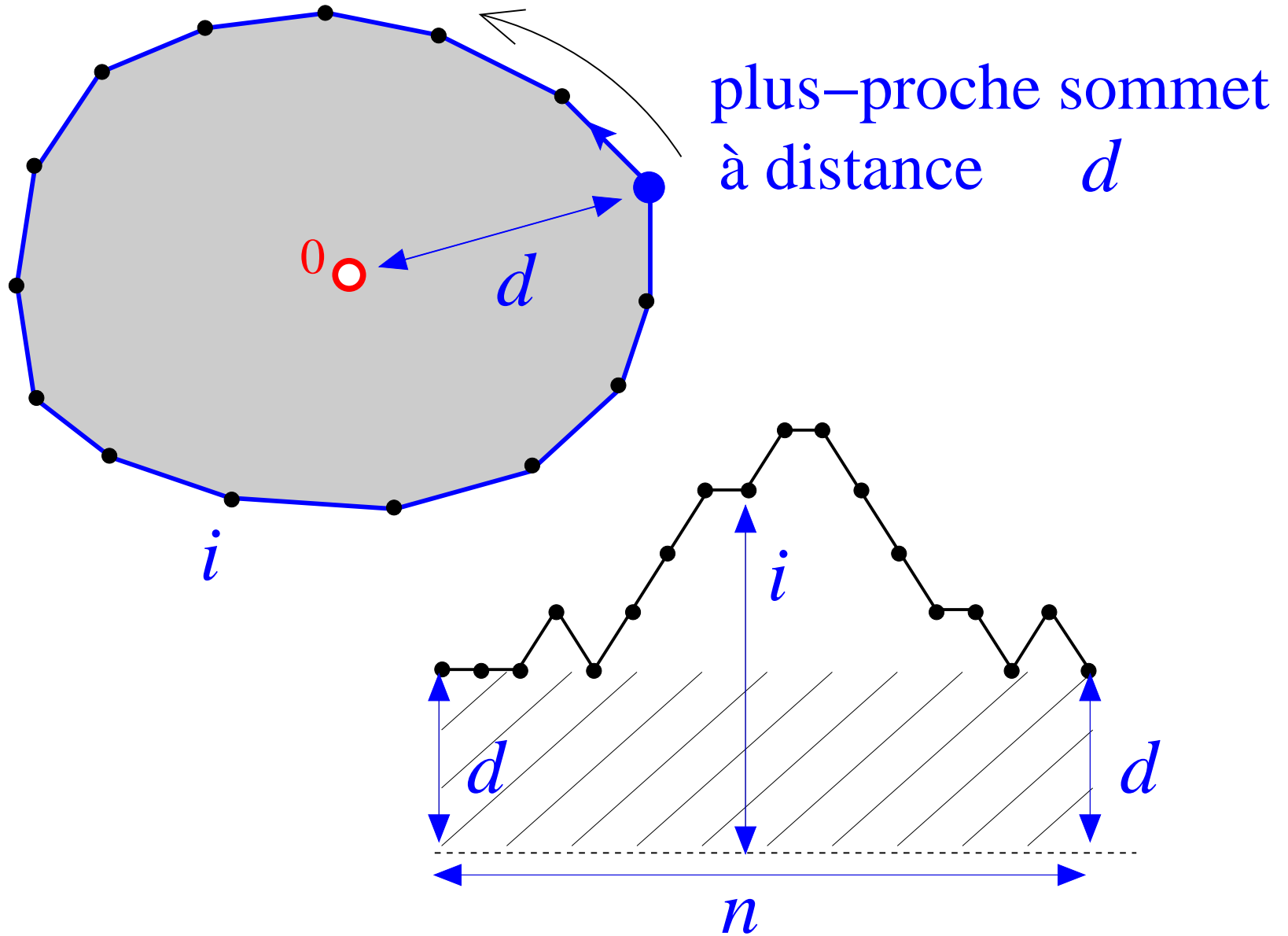


plus-proche sommet
à distance 0

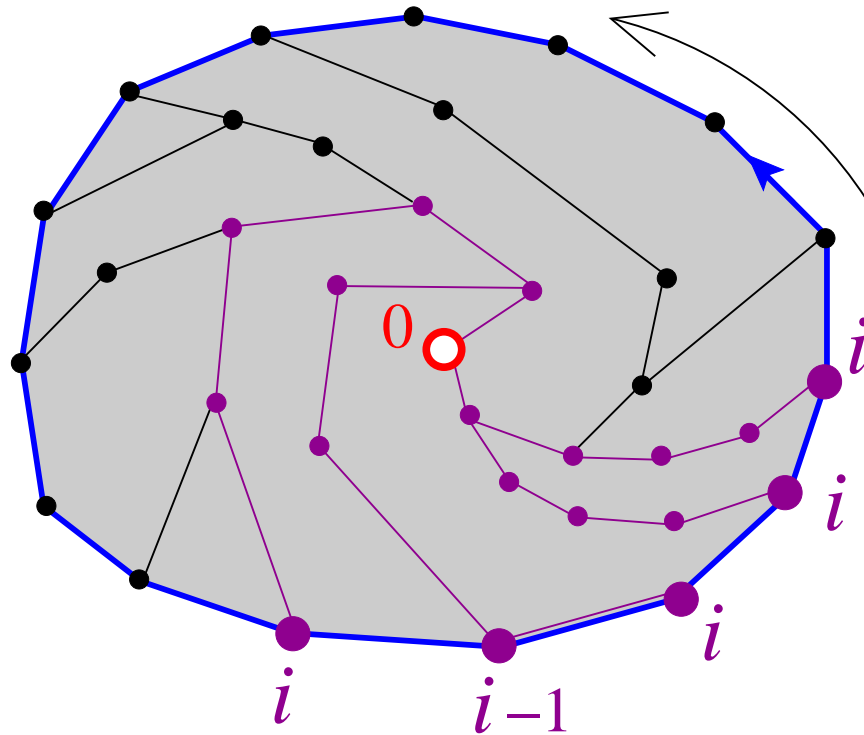
on a

$$F_n = f_{n;0}$$

preuve

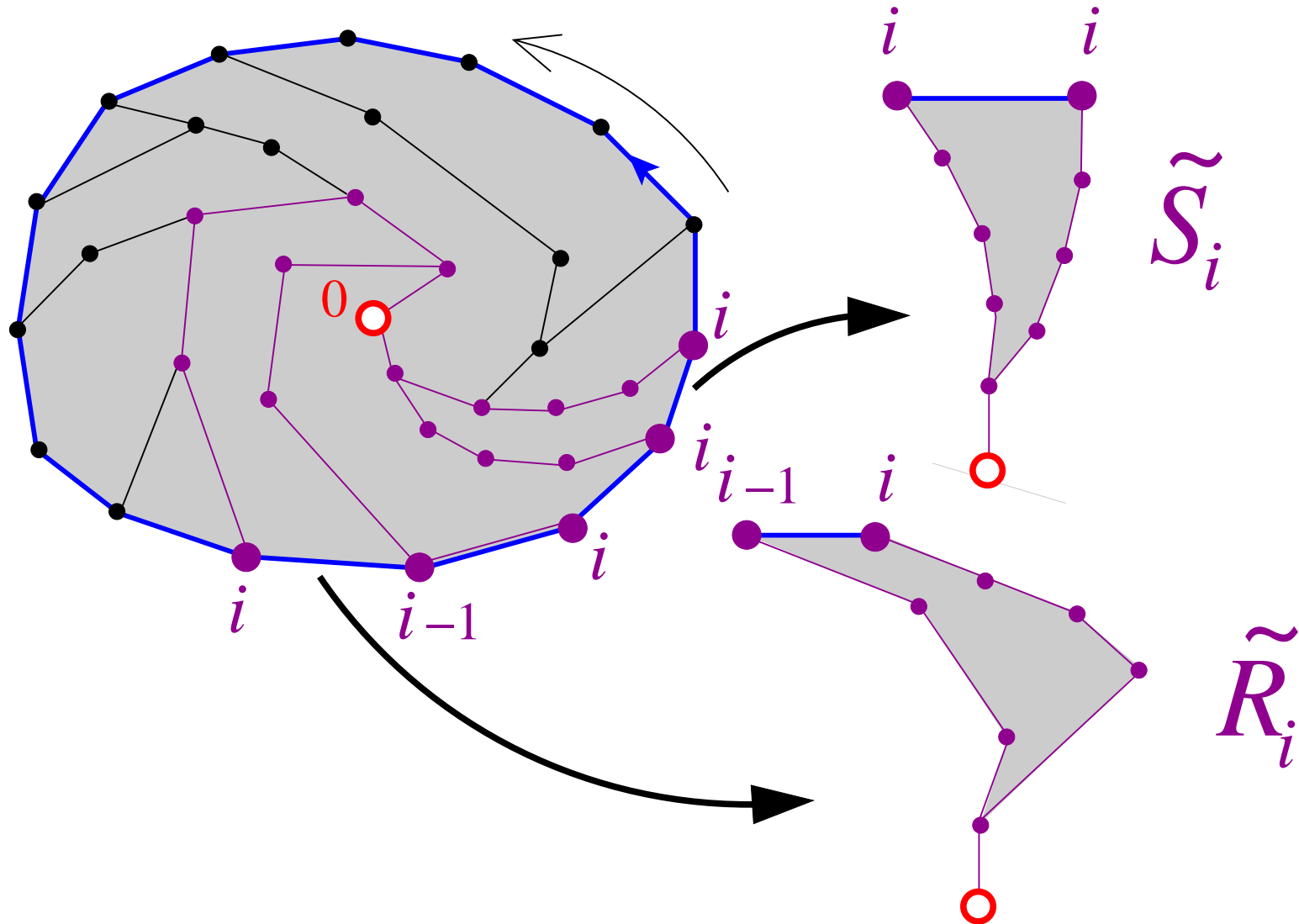


preuve

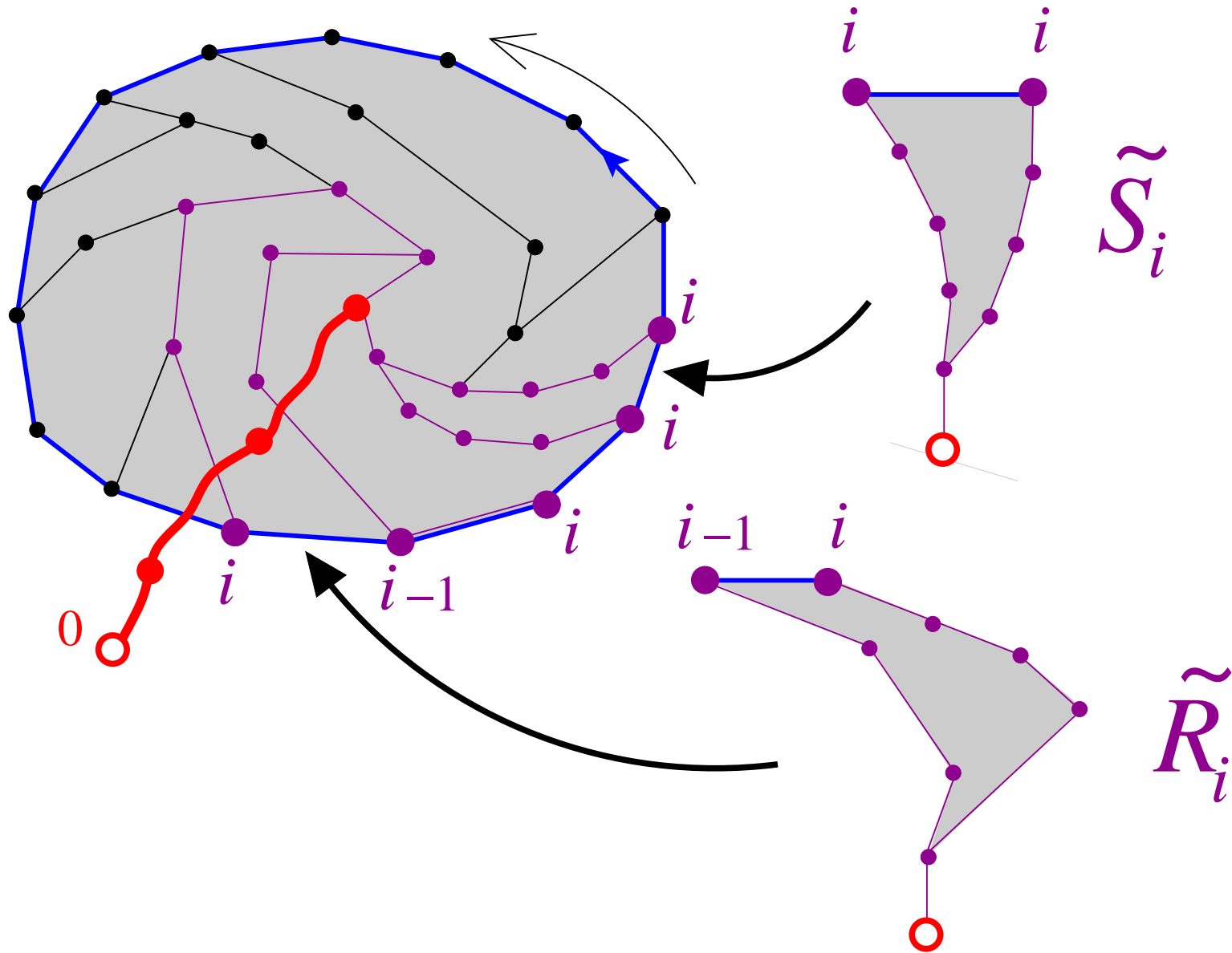


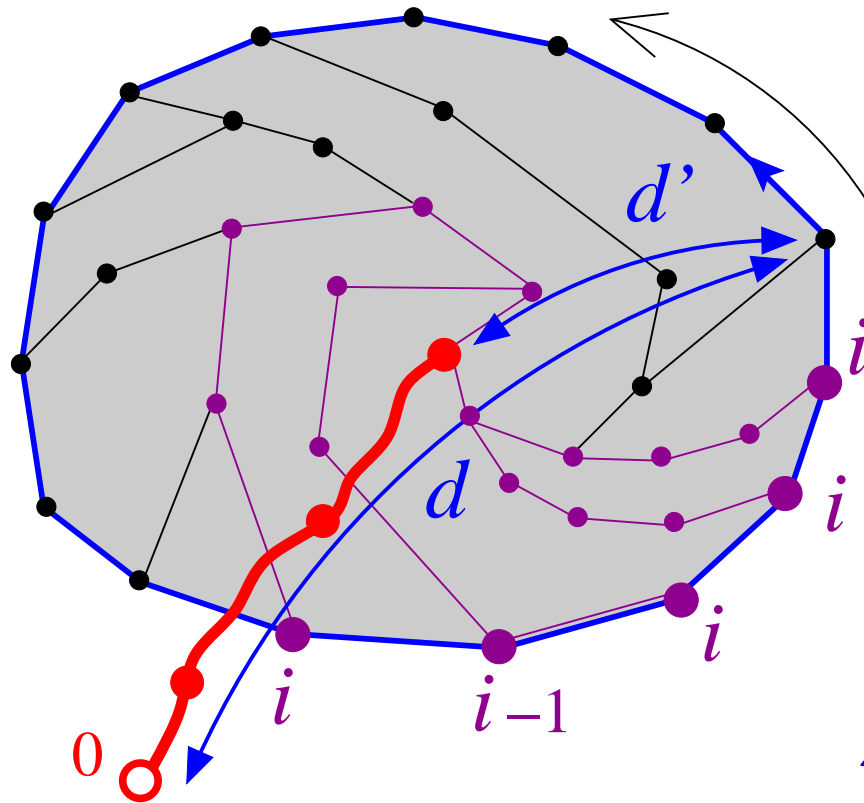
on dessine la **géodésique la plus à gauche** partant de chaque sommet du bord vers le sommet marqué \circ

preuve



décomposition en deux types de **tranches** associées resp.
aux pas descendants ($i \rightarrow i - 1$) et horizontaux ($i \rightarrow i$)

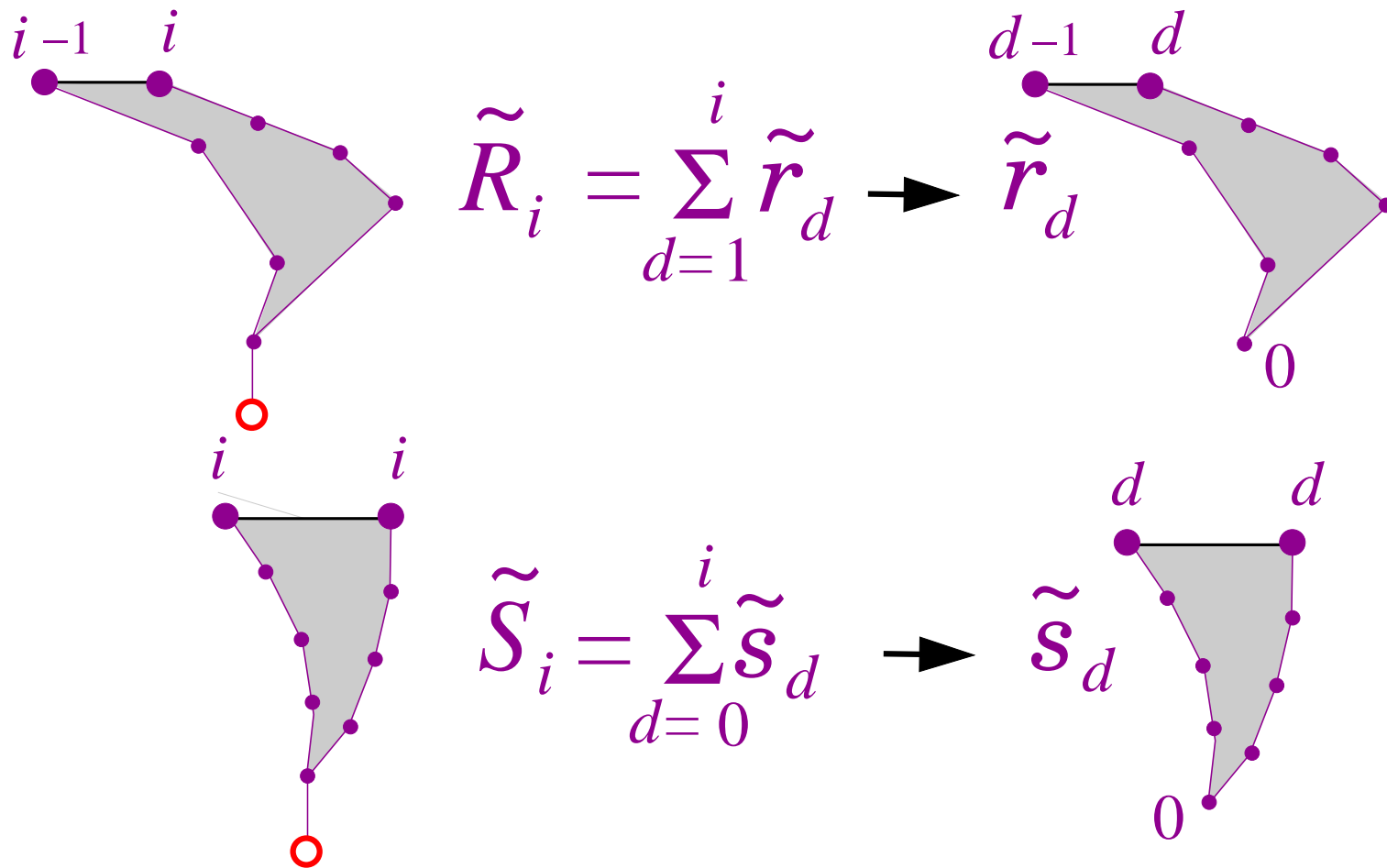




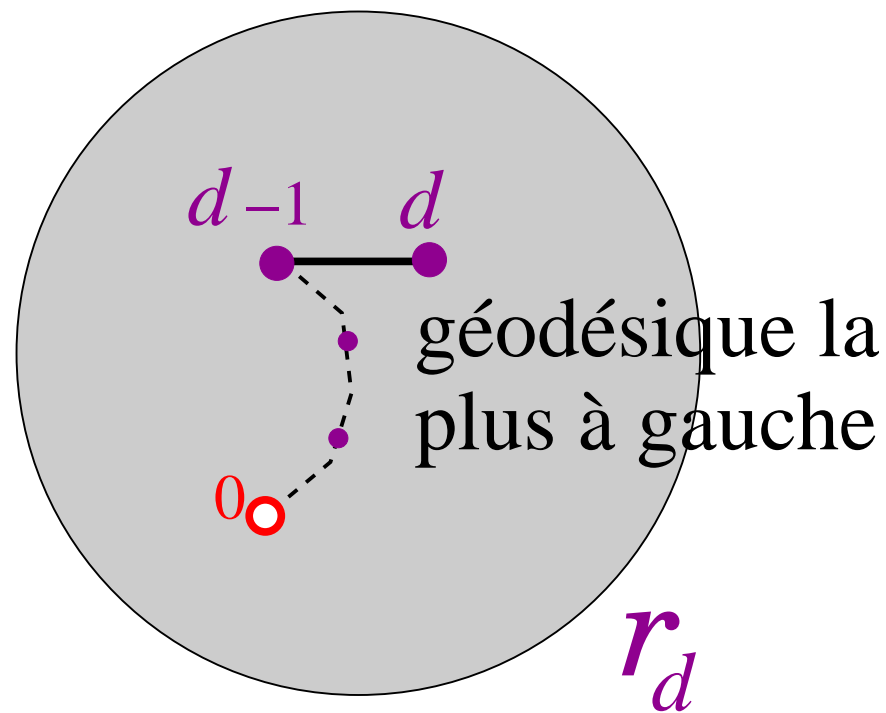
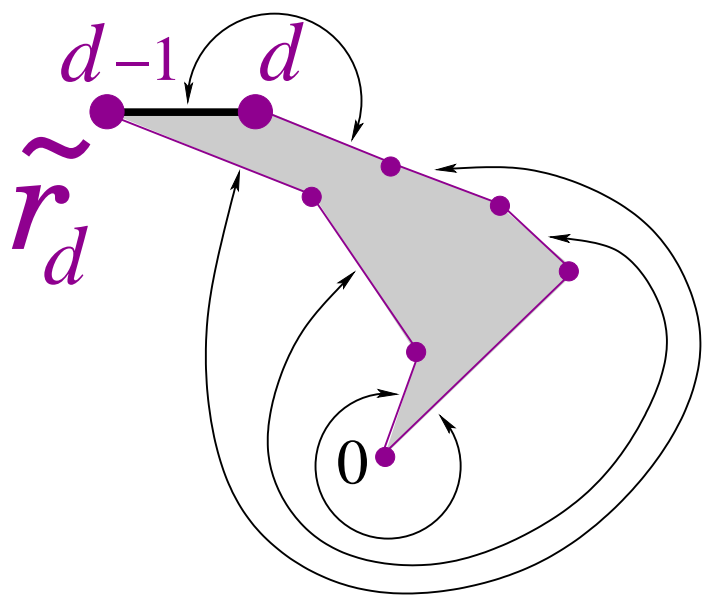
$$\tilde{Z}_{d,d}^+(n) = \sum_{d'=0}^d f_{n;d'}$$

et en particulier $\tilde{Z}_{0,0}^+(n) = F_n$

il reste à montrer que $\tilde{R}_i = R_i$ et $\tilde{S}_i = S_i$



montrer $\tilde{R}_i = R_i \Leftrightarrow$ montrer $\tilde{r}_d = r_d$



conséquence

résultat classique de la théorie des fractions continues:
→ les coefficients S_i et R_i s'expriment en termes des coefficients F_n du développement en série correspondant à l'aide de **déterminants de Hankel**:

$$R_i = \frac{H_i H_{i-2}}{H_{i-1}^2}, \quad H_i = \det_{0 \leq m, n \leq i} F_{m+n}$$

$$S_i = \frac{\tilde{H}_i}{H_i} - \frac{\tilde{H}_{i-1}}{H_{i-1}}, \quad \tilde{H}_i = \det_{0 \leq m, n \leq i} F_{m+n+\delta_{n,i}}$$

avec les conventions $H_{-1} = 1$ et $\tilde{H}_{-1} = 0$

stratégie:

- ① choisir une expression sympathique pour F_n
- ② calculer les déterminants de Hankel H_i et \tilde{H}_i
- ③ en déduire la forme explicite de R_i et S_i
(et finalement de r_d et t_d)

① une expression sympathique pour F_n

considérons

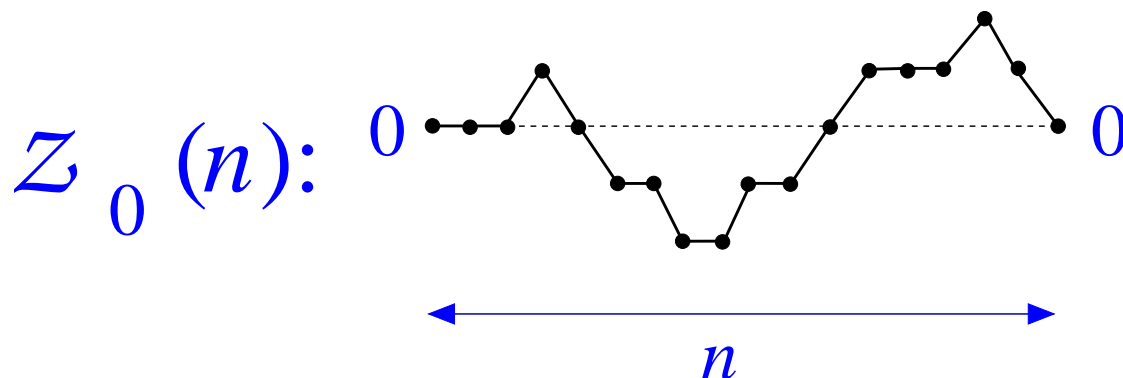
$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i, \quad S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$$

considérons

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i, \quad S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$$

et introduisons la f.g. des chemins avec **poids uniformes**

$$\zeta_0(n) = \sum_{\text{chemins dans } Z_0(n)} \prod R \prod S$$

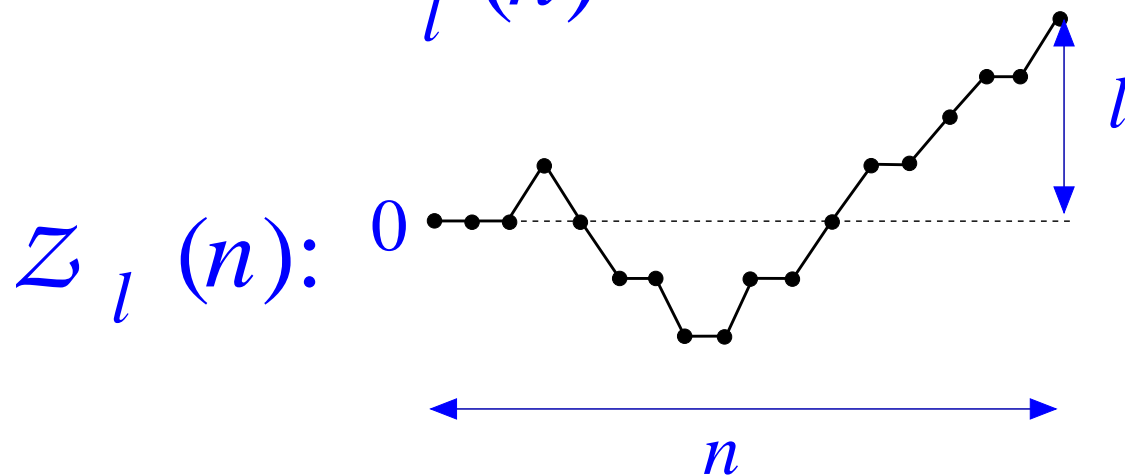


considérons

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i, \quad S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$$

et introduisons la f.g. des chemins avec **poids uniformes**

$$\zeta_l(n) = \sum_{\text{chemins dans } Z_l(n)} \prod R \prod S$$



R et S sont déterminés par les relations

$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

R et S sont déterminés par les relations

$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

et F_n a l'expression sympathique suivante:

$$F_n = \sum_{q \geq 0} A_q \zeta_0^+(n+q)$$

$$\text{où } A_q = R \left(\delta_{q,0} - \sum_{k=q+2}^{\infty} g_k \zeta_0(k-q-2) \right)$$

→ F_n est une combinaison linéaire de f.g. de chemins de longueurs croissantes $n, n+1, \dots, n+q_{\max}$ où $q_{\max} = k_{\max} - 2$

R et S sont déterminés par les relations

$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

et F_n a l'expression sympathique suivante:

$$F_n = \sum_{q \geq 0} A_q \zeta_0^+(n+q)$$

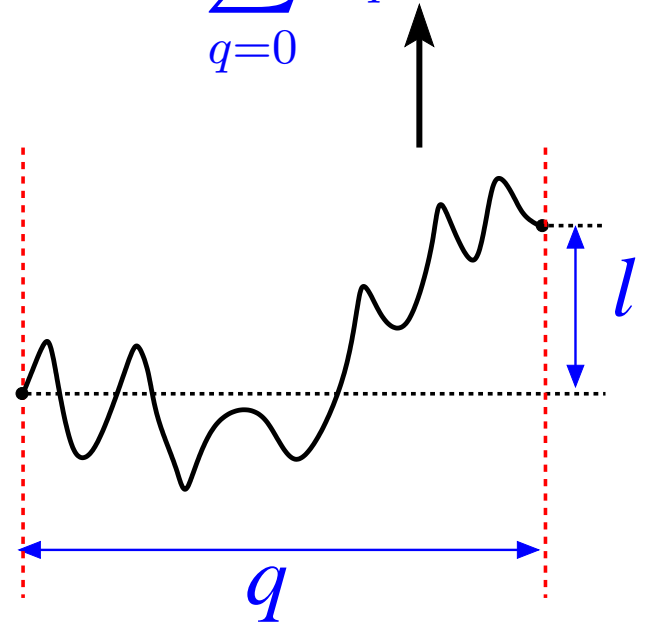
◇ exemple: triangulations

$$R = 1 + 2g_3RS \quad S = g_3(S^2 + 2R)$$

$$F_n = \zeta_0^+(n)(1 + g_3RS) - \zeta_0^+(n+1)g_3R$$

② après qqs manipulations simples de lignes et colonnes

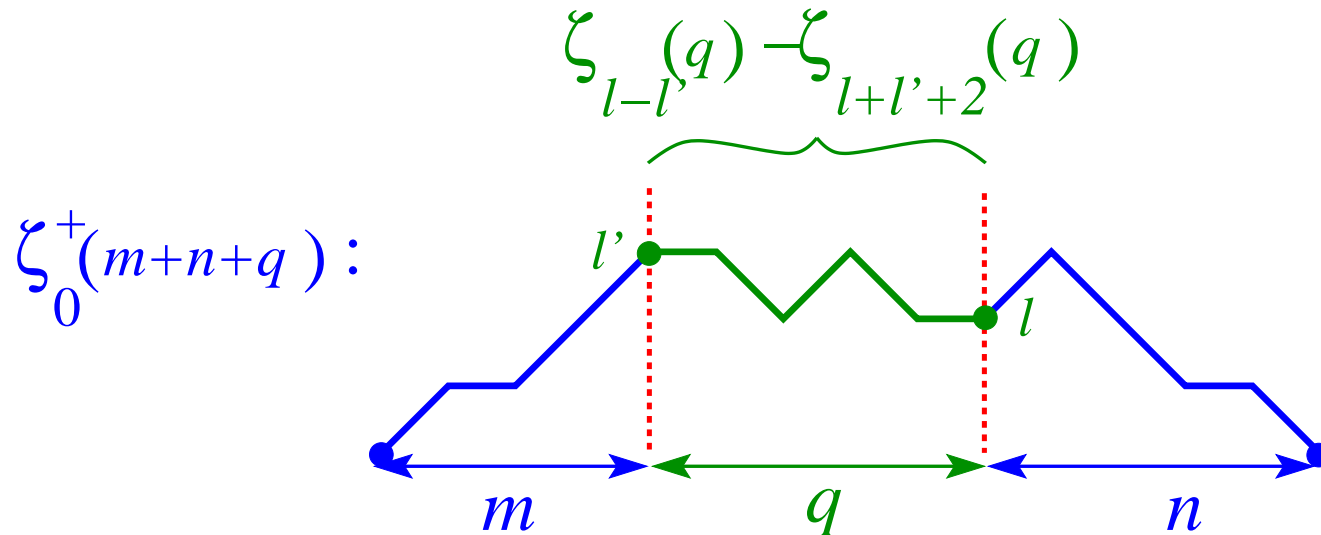
$$H_i = R^{\frac{i(i+1)}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'} - B_{l+l'+2}), \quad B_l = R^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \zeta_l(q) = B_{-l}$$



② après qqs manipulations simples de lignes et colonnes

$$H_i = R^{\frac{i(i+1)}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'} - B_{l+l'+2}), \quad B_l = R^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \zeta_l(q) = B_{-l}$$

$$F_{m+n} = \sum_q A_q \zeta_0^+(m+n+q)$$



② après qqs manipulations simples de lignes et colonnes

$$H_i = R^{\frac{i(i+1)}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'} - B_{l+l'+2}), \quad B_l = R^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \zeta_l(q) = B_{-l}$$

$$\tilde{H}_i = (i+1)SH_i + R^{\frac{i^2+i+1}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'-\delta_{l',i}} - B_{l+l'+\delta_{l',i}+2})$$

② après qqs manipulations simples de lignes et colonnes

$$H_i = R^{\frac{i(i+1)}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'} - B_{l+l'+2}), \quad B_l = R^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \zeta_l(q) = B_{-l}$$

si on pose $p = q_{\max} = k_{\max} - 2$, on a $B_n = 0$ pour $|n| > p$

si $\mathbf{x} = (x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2, \dots, x_p, 1/x_p)$ sont les solutions de

$$\sum_{n=-p}^p B_n x^n = 0$$

② après qqs manipulations simples de lignes et colonnes

$$H_i = R^{\frac{i(i+1)}{2}} \det_{0 \leq l, l' \leq i} (B_{l-l'} - B_{l+l'+2}), \quad B_l = R^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \zeta_l(q) = B_{-l}$$

si on pose $p = q_{\max} = k_{\max} - 2$, on a $B_n = 0$ pour $|n| > p$

si $\mathbf{x} = (x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2, \dots, x_p, 1/x_p)$ sont les solutions de

$$\sum_{n=-p}^p B_n x^n = 0$$

$$\rightarrow \det_{0 \leq l, l' \leq i} (e_{p+l-l'}(\mathbf{x}) - e_{p+l+l'+2}(\mathbf{x}))$$

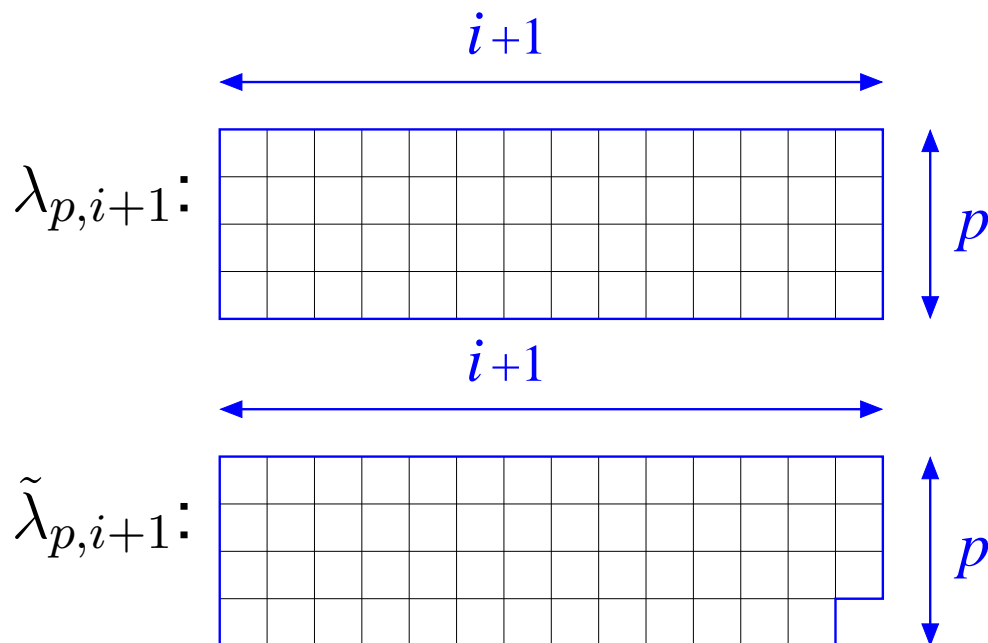
en termes des fonctions symétriques élémentaires $e_j(\mathbf{x})$

on reconnaît alors des fonctions de Schur symplectiques

$$H_i = (-1)^{p(i+1)} B_p^{i+1} R^{\frac{i(i+1)}{2}} \text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x})$$

$$\tilde{H}_i - (i+1)S H_i = (-1)^{p(i+1)+1} B_p^{i+1} R^{\frac{i^2+i+1}{2}} \text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i+1}, \mathbf{x})$$

pour les partitions



on reconnaît alors des fonctions de Schur symplectiques

$$H_i = (-1)^{p(i+1)} B_p^{i+1} R^{\frac{i(i+1)}{2}} \text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x})$$

$$\tilde{H}_i - (i+1)S H_i = (-1)^{p(i+1)+1} B_p^{i+1} R^{\frac{i^2+i+1}{2}} \text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i+1}, \mathbf{x})$$

③

$$R_i = R \frac{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x}) \text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i-1}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i}, \mathbf{x})^2}$$

$$S_i = S - \sqrt{R} \left(\frac{\text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i+1}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x})} - \frac{\text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i}, \mathbf{x})} \right)$$

formules finales

les fonctions de Schur symplectiques s'expriment à l'aide de déterminants de **taille fixe p**

$$R_i = R \frac{\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+1+n} - x_m^{-i-1-n}) \det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i-1+n} - x_m^{-i+1-n})}{\left(\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+n} - x_m^{-i-n}) \right)^2}$$

$$S_i = S - \sqrt{R} \left(\frac{\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+1+n-\delta_{n,1}} - x_m^{-i-1-n+\delta_{n,1}})}{\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+1+n} - x_m^{-i-1-n})} - \frac{\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+n-\delta_{n,1}} - x_m^{-i-n+\delta_{n,1}})}{\det_{1 \leq m, n \leq p} (x_m^{i+n} - x_m^{-i-n})} \right)$$

triangulations et dimères durs

$$F_n = A_0 \zeta_0^+(n) + A_1 \zeta_0^+(n+1)$$

$$A_0 = 1 + g_3 R S, \quad A_1 = -g_3 R$$

$$B_0 = A_0 + S A_1 = 1, \quad B_1 = R^{\frac{1}{2}} A_1 = -g_3 R^{\frac{3}{2}}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{g_3 R^{\frac{3}{2}}}$$

en posant $y = x^2$

$$y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1}{g_3^2 R^3}$$

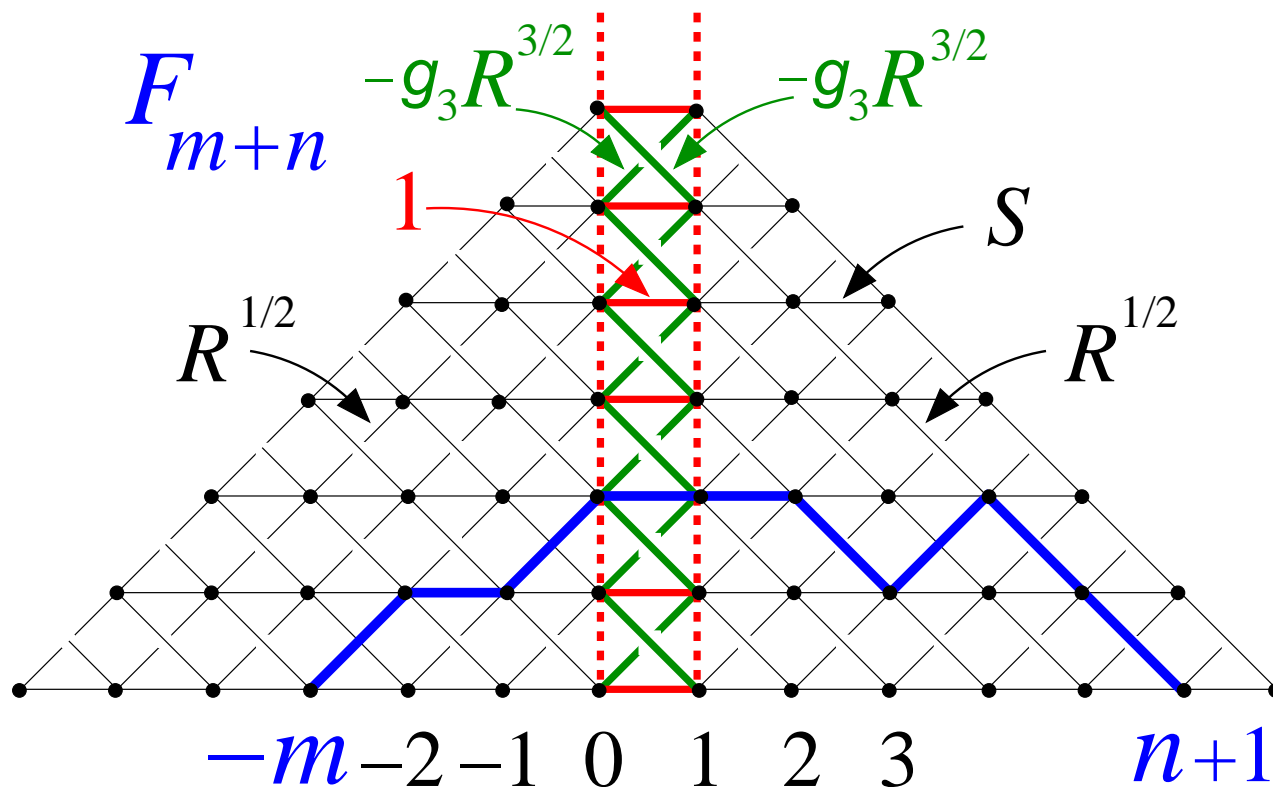
$$R_i = R \frac{(1-y^i)(1-y^{i+2})}{(1-y^{i+1})^2}, \quad S_i = S - g_3 R^2 y^i \frac{(1-y)(1-y^2)}{(1-y^{i+1})(1-y^{i+2})}$$

triangulations et dimères durs

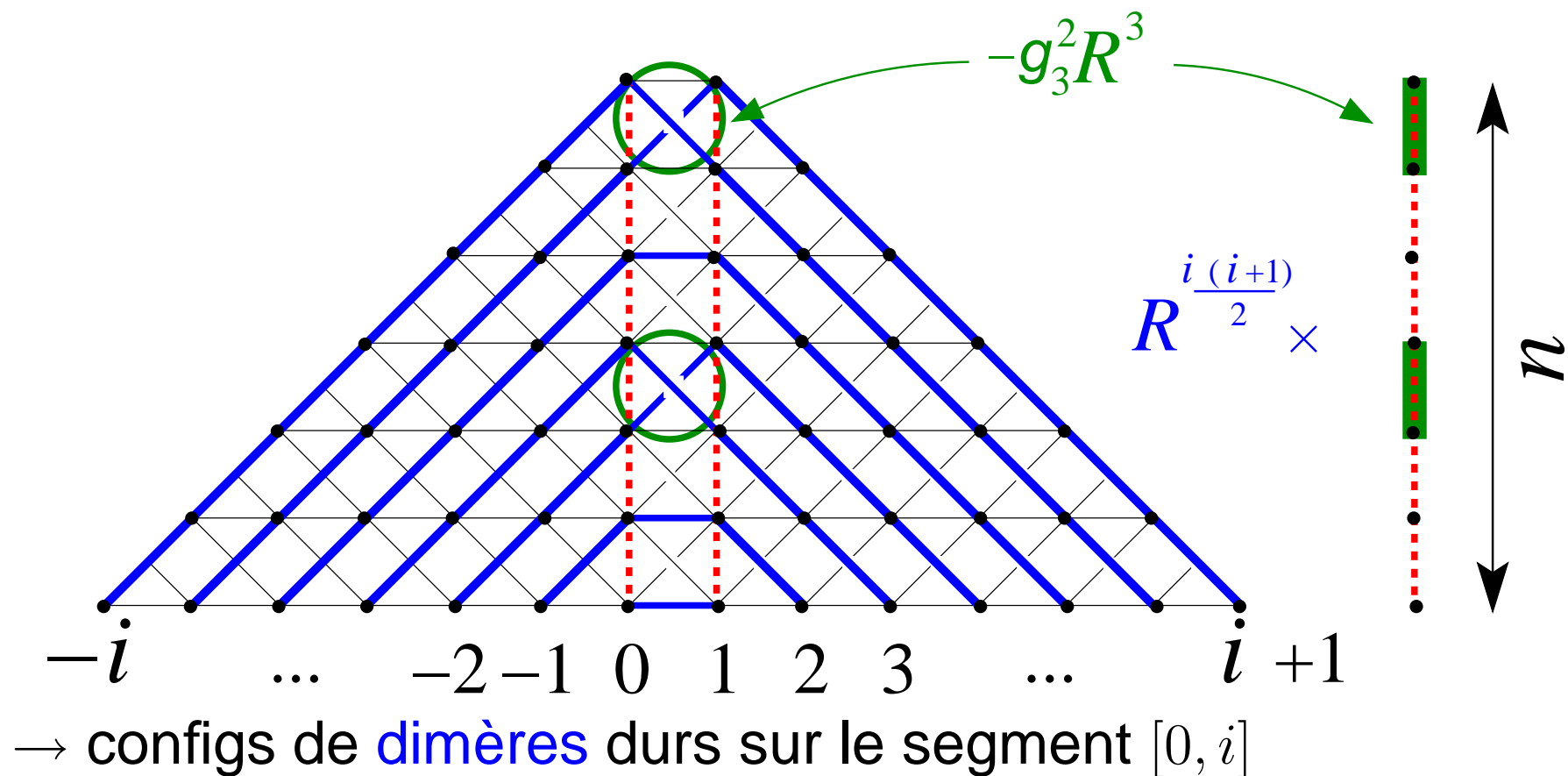
$$F_n = A_0 \zeta_0^+(n) + A_1 \zeta_0^+(n+1)$$

$$A_0 = 1 + g_3 R S, \quad A_1 = -g_3 R$$

$$B_0 = A_0 + S A_1 = 1, \quad B_1 = R^{\frac{1}{2}} A_1 = -g_3 R^{\frac{3}{2}}$$

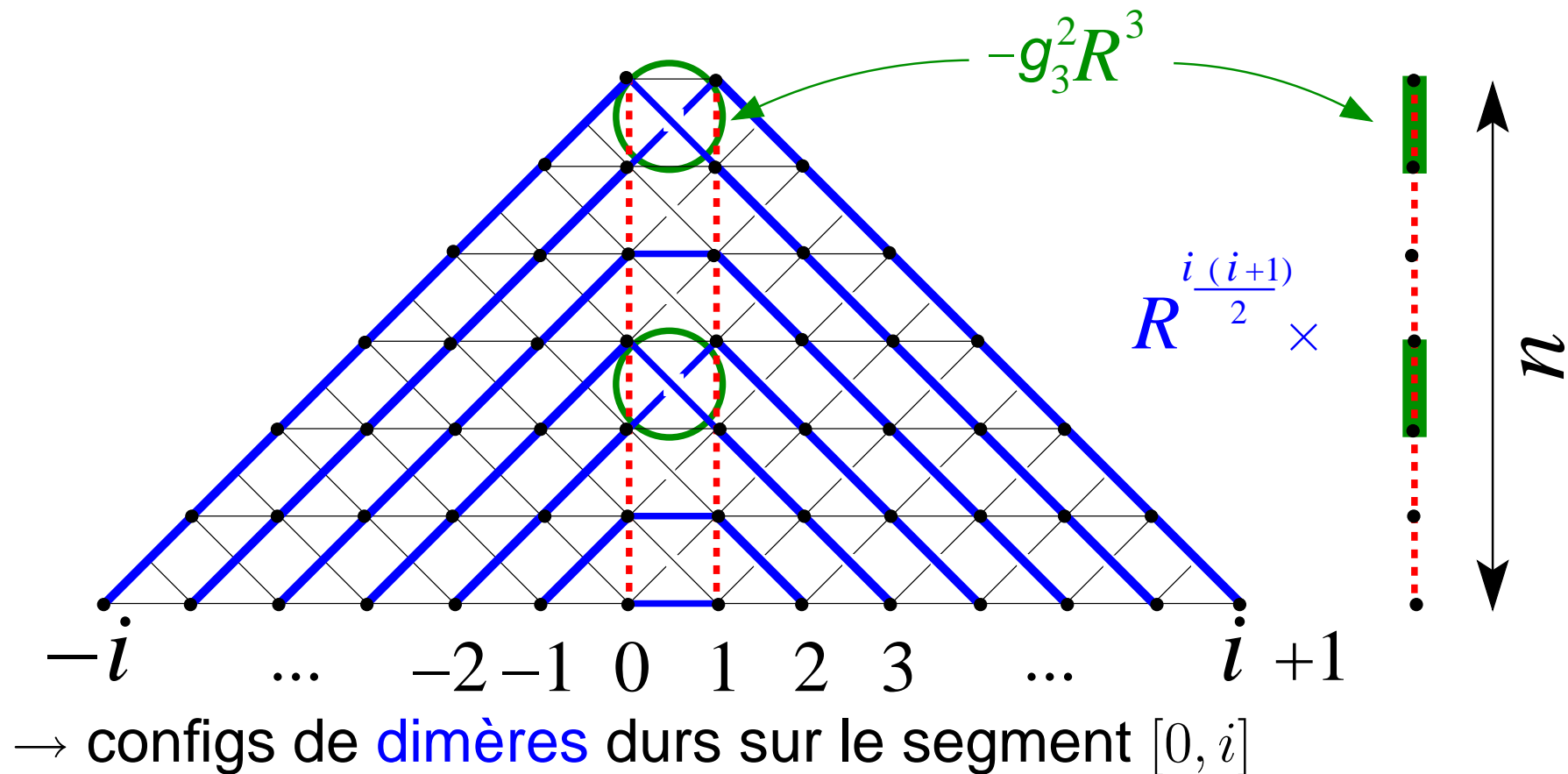


grâce au lemme LGV: $\det \rightarrow$ configs de chemins évitants



$$H_i \propto Z_{\text{dimères durs sur } [0, i]} = \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -g_3^2 R^3 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

grâce au lemme LGV: $\det \rightarrow$ configs de chemins évitants

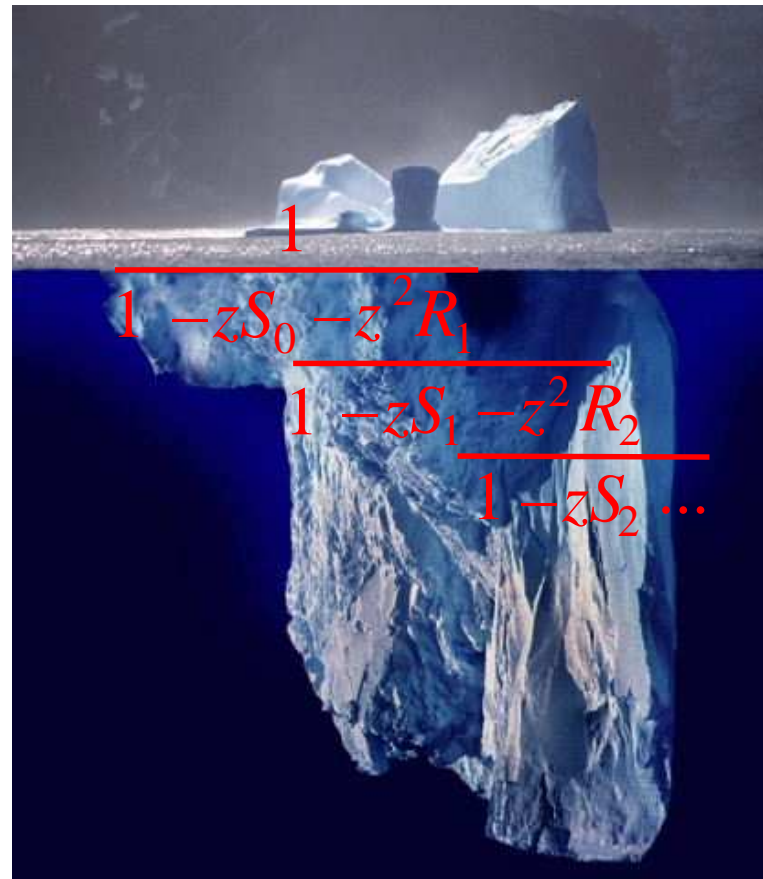


$$H_i \propto Z_{\text{dimères durs sur } [0, i]} = \frac{x^{i+2} - x^{-i-2}}{(x + x^{-1})^{i+1} (x - x^{-1})} \quad g_3^2 R^3 = \frac{1}{(x + x^{-1})^2}$$

conclusion

- les fonctions à deux points dépendant des distances R_i et S_i sont cachées dans le développement en fraction continue de la résolvante

$$F(z) =$$



conclusion

- les fonctions à deux points dépendant des distances R_i et S_i sont cachées dans le développement en fraction continue de la résolvante
- conduit à des expressions explicites pour R_i et S_i comme (bi-)rapports de fonctions de Schur symplectiques

$$R_i = R \frac{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x}) \text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i-1}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i}, \mathbf{x})^2}$$

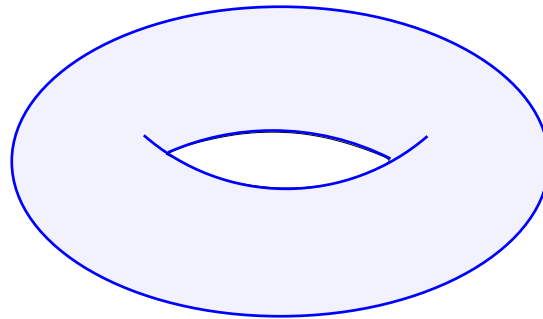
$$S_i = S - \sqrt{R} \left(\frac{\text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i+1}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i+1}, \mathbf{x})} - \frac{\text{sp}_{2p}(\tilde{\lambda}_{p,i}, \mathbf{x})}{\text{sp}_{2p}(\lambda_{p,i}, \mathbf{x})} \right)$$

conclusion

- les fonctions à deux points dépendant des distances R_i et S_i sont cachées dans le développement en fraction continue de la résolvante
- conduit à des expressions explicites pour R_i et S_i comme (bi-)rapports de fonctions de Schur symplectiques
- que dire du cas des degrés non bornés ?

conclusion

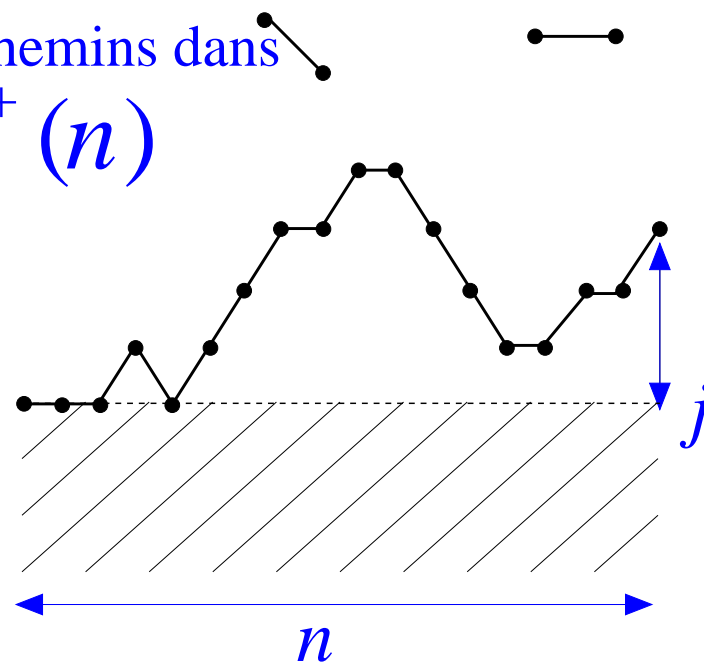
- les fonctions à deux points dépendant des distances R_i et S_i sont cachées dans le développement en fraction continue de la résolvante
- conduit à des expressions explicites pour R_i et S_i comme (bi-)rapports de fonctions de Schur symplectiques
- que dire du cas des degrés non bornés ?
- que dire du genre supérieur ?



en envoyant $d \rightarrow \infty$, on retrouve des poids uniformes:

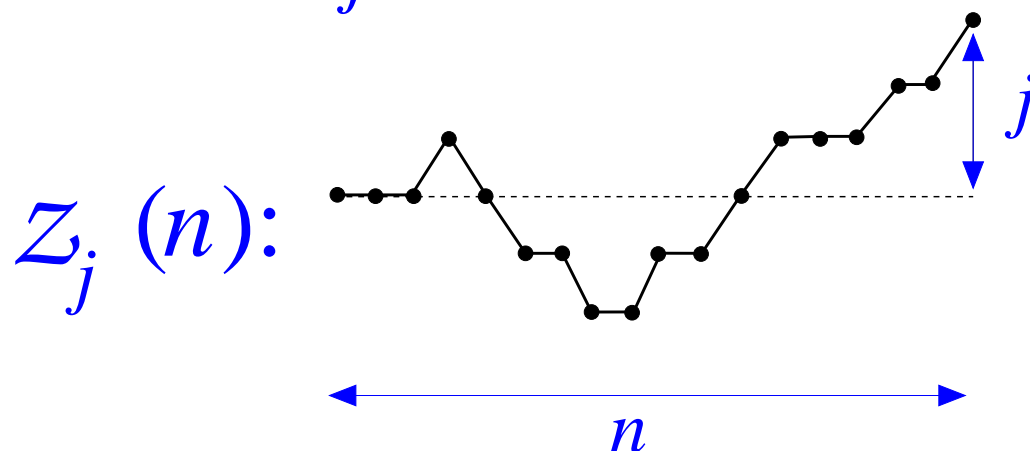
$$Z_{d,d+j}^+(n) \rightarrow \zeta_j^+(n) = \sum_{\text{chemins dans } Z_j^+(n)} \prod R \prod S$$

$Z_j^+(n)$:

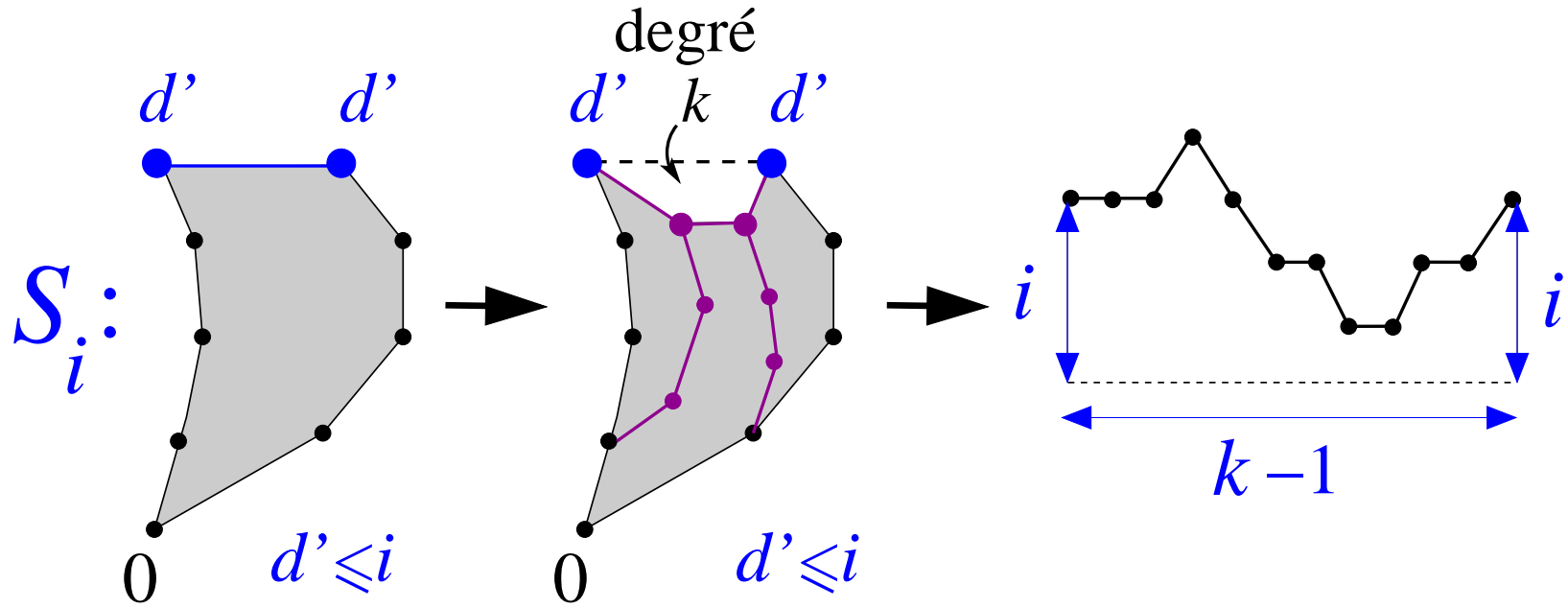


en envoyant $d \rightarrow \infty$, on retrouve des poids uniformes:

$$Z_{d,d+j}(n) \rightarrow \zeta_j(n) = \sum_{\text{chemins dans } Z_j(n)} \prod R \prod S$$

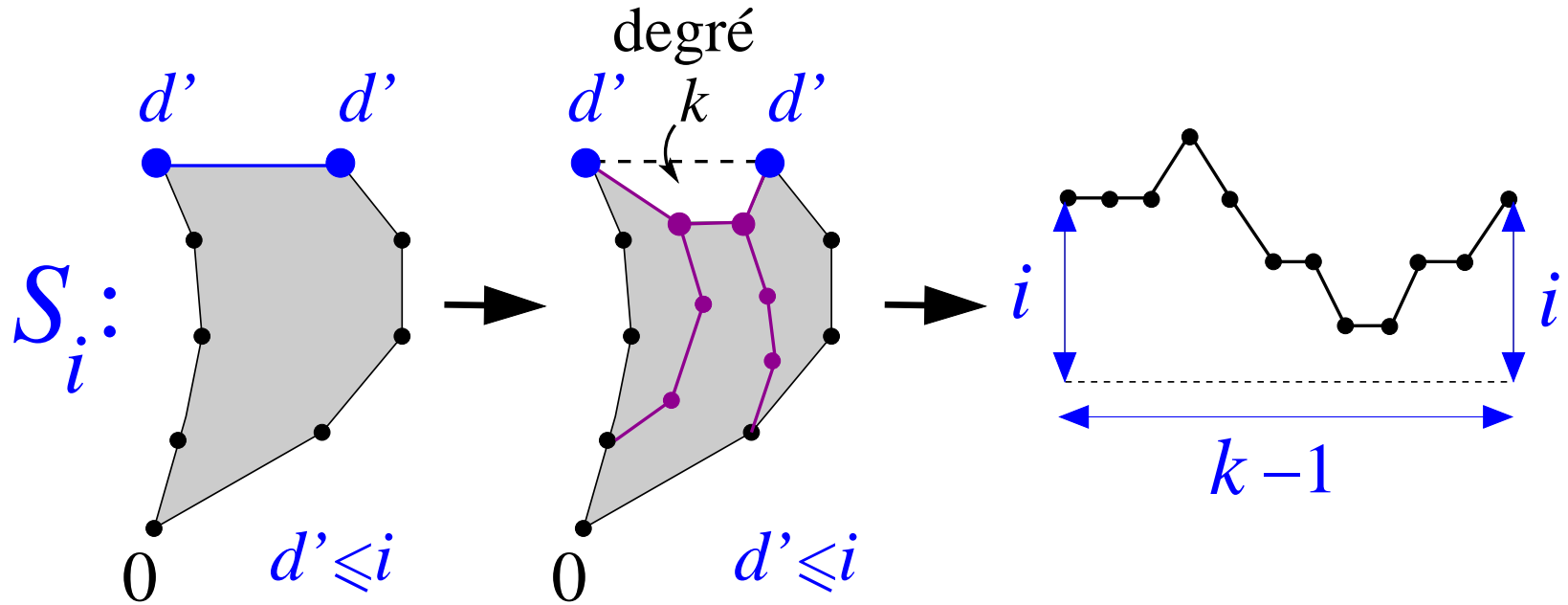


relations de récurrence



$$S_i = \sum_{k \geq 1} g_k Z_{i,i}(k-1)$$

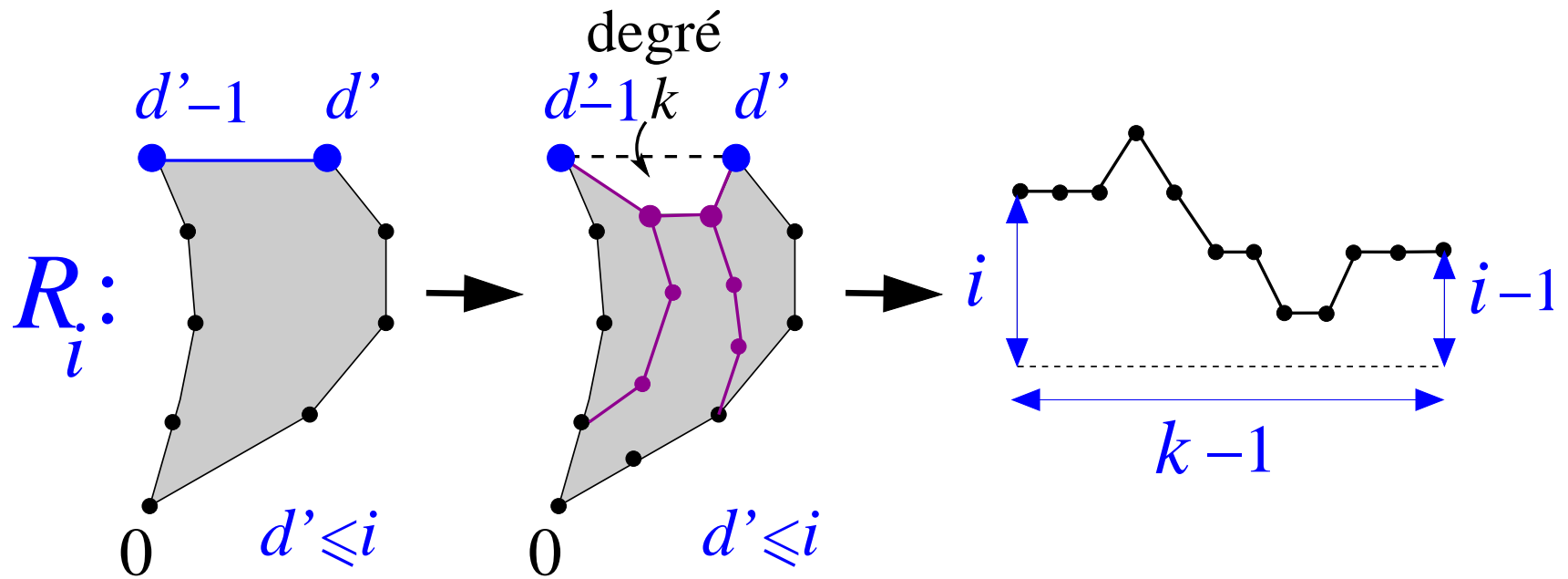
relations de récurrence



$$S_i = \sum_{k \geq 1} g_k Z_{i,i}(k-1)$$

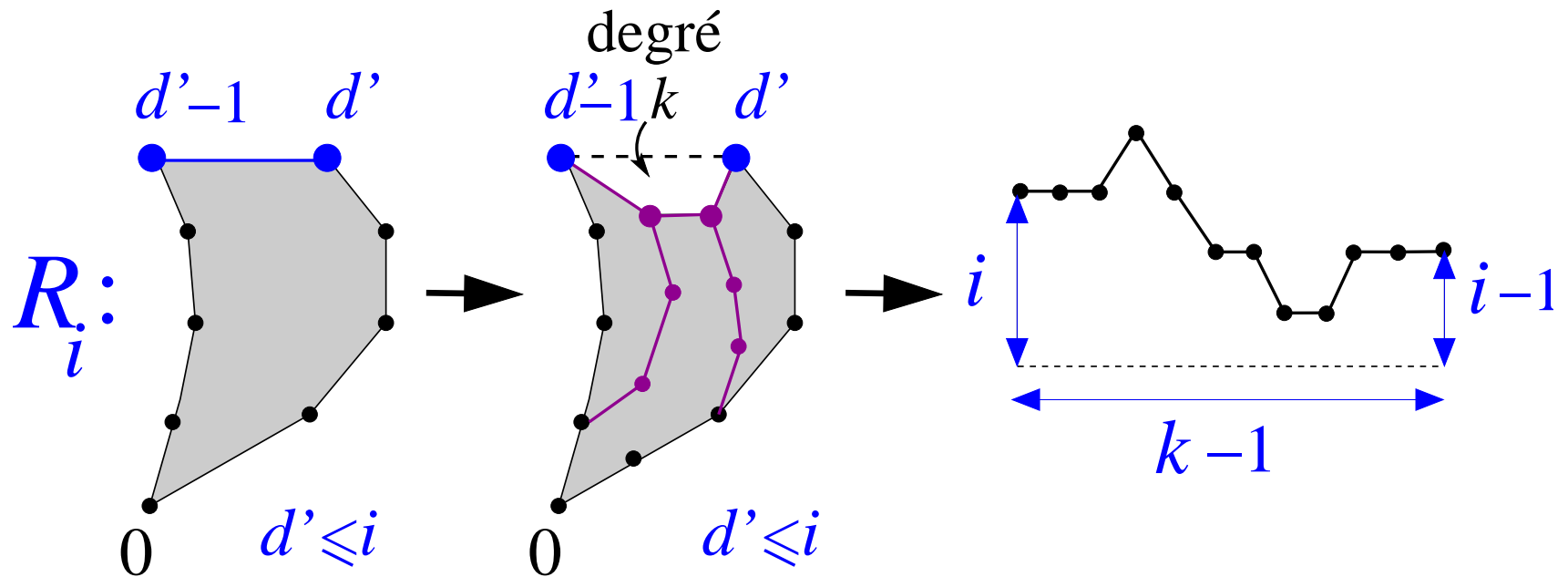
$$\rightarrow S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

relations de récurrence



$$R_i = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k Z_{i,i-1}(k-1)$$

relations de récurrence



$$R_i = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k Z_{i,i-1}(k-1)$$

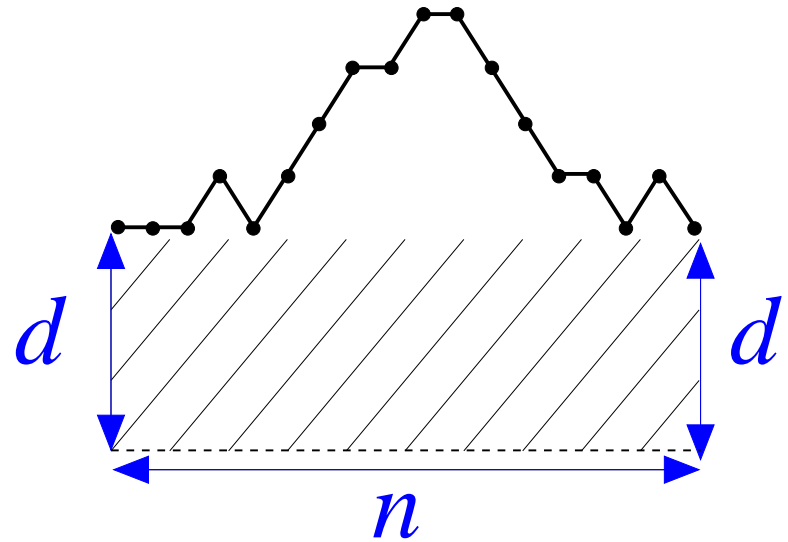
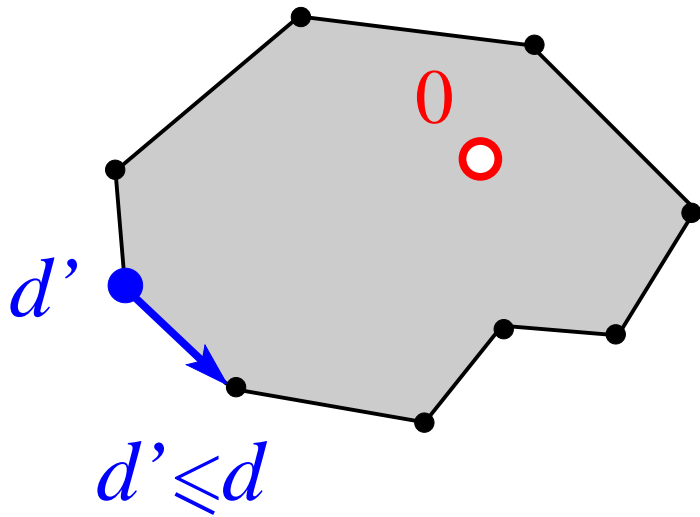
$$\rightarrow R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1)$$

expression pour F_n

$$F_n = f_{n;0} = \sum_{d'=0}^d f_{n;d'} - \sum_{d'=1}^d f_{n;d'}$$

expression pour F_n

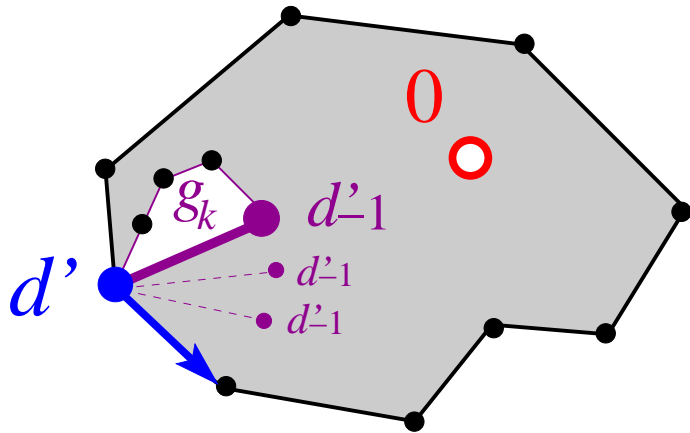
$$F_n = f_{n;0} = \sum_{d'=0}^d f_{n;d'} - \sum_{d'=1}^d f_{n;d'}$$



$$Z_{d,d}^+(n)$$

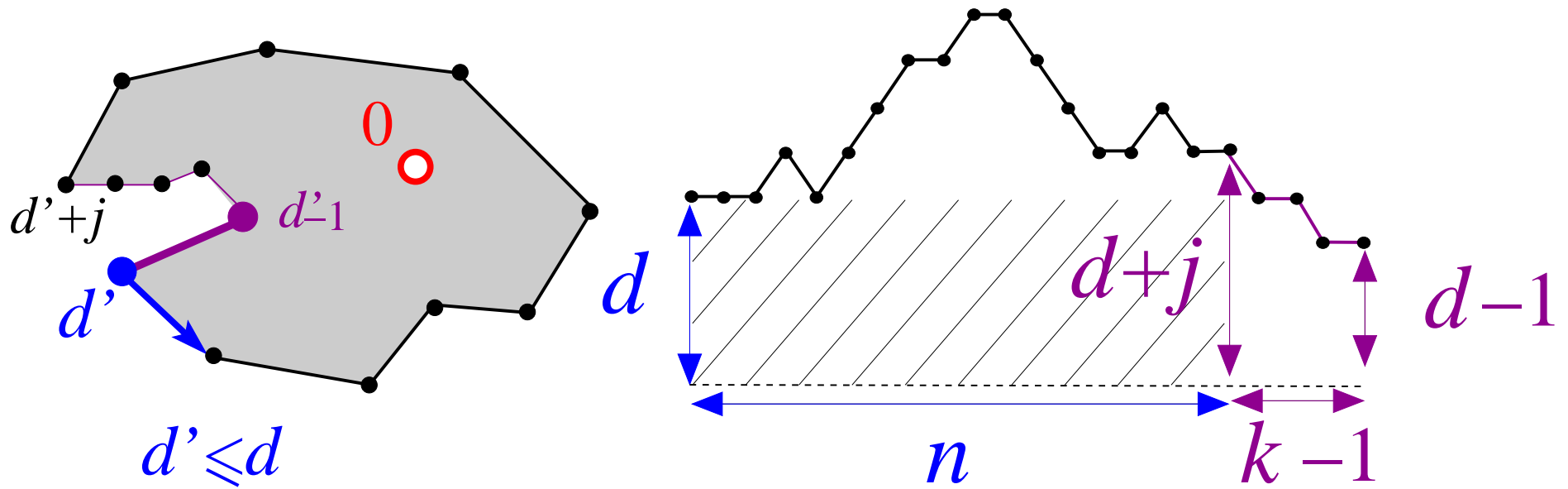
expression pour F_n

$$F_n = f_{n;0} = \sum_{d'=0}^d f_{n;d'} - \sum_{d'=1}^d f_{n;d'}$$



expression pour F_n

$$F_n = f_{n;0} = \sum_{d'=0}^d f_{n;d'} - \sum_{d'=1}^d f_{n;d'}$$



$$\sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} Z_{d,d+j}^+(n) Z_{d+j,d-1}(k-1)$$

$$F_n = Z_{d,d}^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} Z_{d,d+j}^+(n) Z_{d+j,d-1}(k-1)$$

valable pour tout $d \geq 0$ (\rightarrow quantité conservée)

$$F_n = Z_{d,d}^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} Z_{d,d+j}^+(n) Z_{d+j,d-1}(k-1)$$

en envoyant $d \rightarrow \infty$:

$$F_n = \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$

en termes de chemins pondérés par R et S

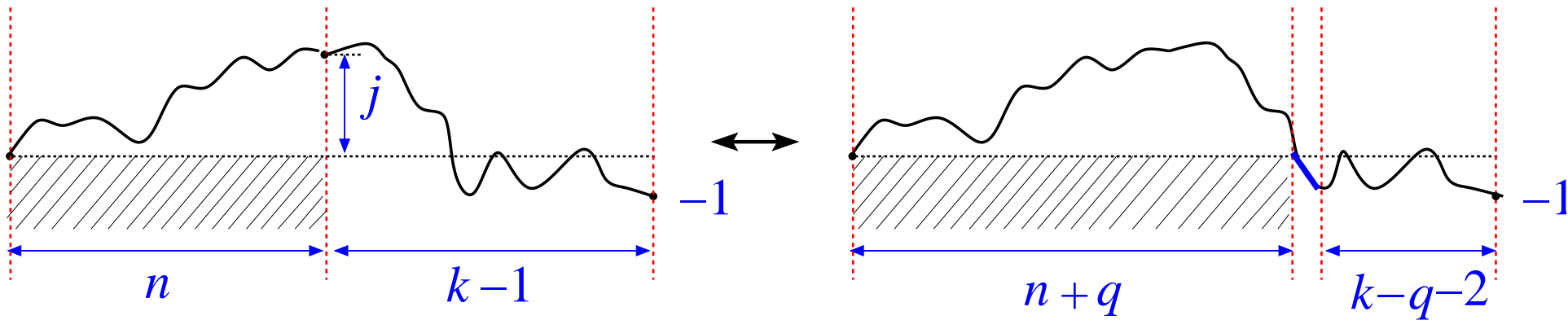
$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

$$F_n = \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$

$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

$$F_n = \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$

$$F_n = R \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 2} g_k \sum_{j \geq 0} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$



$$R = 1 + \sum_{k \geq 2} g_k \zeta_{-1}(k-1) \quad S = \sum_{k \geq 1} g_k \zeta_0(k-1)$$

$$F_n = \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 3} g_k \sum_{j \geq 1} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$

$$F_n = R \zeta_0^+(n) - \sum_{k \geq 2} g_k \sum_{j \geq 0} \zeta_j^+(n) \zeta_{-j-1}(k-1)$$

et finalement

$$F_n = R \zeta_0^+(n) - R \sum_{q \geq 0} \sum_{k \geq q+2} g_k \zeta_0(k-q-2) \zeta_0^+(n+q)$$