Distribution des lettres grecques dans les tableaux escaliers

S. Dasse-Hartaut[1] P. Hitczenko[2]

[1]Liafa
Université Paris Diderot

[2]Drexel University

Dans le cadre de l'ANR Gamma et d'un stage au LIPN avec Frederique Bassino

Définition, règles

Un tableau escalier de taille n est un tableau de n lignes t.q. la i-ème ligne est de longueur $(n-i+1)$. On remplit certaines cases du tableau avec des α, β, γ et δ, et la diagonale est remplie.

	β			α		γ
		α			γ	
				δ		
	δ		α			
		δ				
	β					
γ						

Figure: Tableau escalier de taille 7

Question

Que sait-on sur la distribution du nombre de α, β, γ et δ ?

Question

Que sait-on sur la distribution du nombre de α, β, γ et δ ?

Théorème

Si X_n est le nombre de α (ou β, γ,δ) dans le tableau (ou sa diagonale), alors

$$\frac{X_n - E_n(X_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_n)}} \xrightarrow{d} N(O,1),$$

où $\xrightarrow{d}$ est la convergence en distribution et $N(O,1)$ est la gaussienne normale centrée.
De plus, on connait E_nX_n et $\mathrm{var}(X_n)$.

Lignes indexées

Définitions

Une ligne indexée par la lettre x est une ligne dont la première lettre grecque en partant de la gauche est un x. On note $L_n(T)$(ou L_n) le nombre de lignes du tableau T de taille n qui sont indexées par α ou par γ.

Lignes indexées

Définitions

Une ligne indexée par la lettre x est une ligne dont la première lettre grecque en partant de la gauche est un x. On note $L_n(T)$(ou L_n) le nombre de lignes du tableau T de taille n qui sont indexées par α ou par γ.

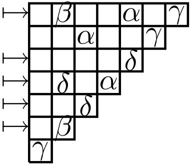
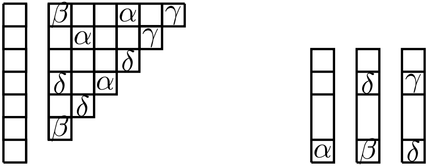


Figure: Lignes indexées par β/δ ; $L_7(T) = 2$

Extensions



- Il y a $4 + 2(\sum_{k=1}^{L_{n-1}} \binom{L_{n-1}}{k} 4 \times 2^{k-1}) = 4 \times 3^{L_{n-1}}$ extensions.
- $L_n \in [0, L_{n-1} + 1]$
- On note $d = L_{n-1} - L_n$, avec α/γ dans la colonne supplémentaire $2^{d+2}\binom{L}{d+1}$ et sans $2^{d+1}\binom{L}{d}$, soit $2^{d+1}(2\binom{L}{d+1} + \binom{L}{d})$.

Changement de mesure

Soit un tableau T de taille $(n-1)$.
$P_n(T) = \frac{4.3^{L_{n-1}}}{|T_n|}$ et $P_{n-1}(T) = \frac{1}{|T_{n-1}|}$, d'où

$$P_n(T) = 4.3^{L_{n-1}} \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} P_{n-1}(T)$$

Pour une variable aléatoire X_{n-1} sur T_{n-1}, on a alors

$$\begin{aligned} E_n(X_{n-1}) &= E_{n-1} 4 \cdot 3^{L_{n-1}} \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} X_{n-1} \\ &= 4 \cdot \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} E_{n-1} 3^{L_{n-1}} X_{n-1} \end{aligned}$$

Premiers calculs

$$\begin{aligned}E(z^{L_n}|L_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{L_{n-1}+1} z^k \frac{2^{L-k+1}}{4\times 3^L}(2\binom{L+1}{L+1-k} - \binom{L}{L-k}) \\ &= \frac{1+z}{2}\left(\frac{2+z}{3}\right)^{L_{n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_n(z^{L_n}) &= E_n(E(z^{L_n}|L_{n-1})) \\ &= \frac{z+1}{2n}E_{n-1}(z+2)^L \\ &= \frac{(n-2+\frac{z+1}{2})!}{(\frac{z-1}{2})!}\frac{1}{n!}(n+\frac{z-1}{2})\end{aligned}$$

On retient que

$$E_n(z^{L_n}) = \frac{z+1}{2n}E_{n-1}(z+2)^{L_{n-1}}$$

Cardinal $|T_n|$

$$
\begin{aligned}
|T_n| &= \sum_{T \in T_{n-1}} 4 \times 3^{L_{n-1}(T)} \\
&= |T_{n-1}| E_{n-1}(4 \times 3^{L_{n-1}}) \\
&= 4|T_{n-1}| \frac{(n-3+\frac{3+1}{2})!}{(\frac{3-1}{2})!} \frac{1}{(n-1)!} (n + \frac{3-3}{2}) \\
&= 4|T_{n-1}| \frac{(n-1)!}{1!} \frac{1}{(n-1)!} \cdot n
\end{aligned}
$$

On en déduit que $|T_n| = 4^n \cdot n!$

Distribution de L_n

$$E_n(X_{n-1}) = 4 \cdot \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} E_{n-1} 3^{L_{n-1}} X_{n-1}$$

$$E_n(z^{L_n}) = \Pi_{k=1}^{n} \frac{z + 2k - 1}{2k}$$

Distribution de L_n

$$E_n(X_{n-1}) = 4 \cdot \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} E_{n-1} 3^{L_{n-1}} X_{n-1}$$

$$E_n(z^{L_n}) = \Pi_{k=1}^{n} \frac{z+2k-1}{2k}$$

Or

$$\frac{z+2k-1}{2k} = \frac{z}{2k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

Distribution de L_n

$$E_n(X_{n-1}) = 4 \cdot \frac{|T_{n-1}|}{|T_n|} E_{n-1} 3^{L_{n-1}} X_{n-1}$$

$$E_n(z^{L_n}) = \Pi_{k=1}^{n} \frac{z+2k-1}{2k}$$

Or

$$\frac{z+2k-1}{2k} = \frac{z}{2k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

Formule produit $\rightarrow$ somme de v.a. i.i.d. (moyenne et variance connues)

Nombre de α

Proposition

L'espérance du nombre de α dans un tableau de taille n vaut $\frac{n}{2} - \frac{h_n}{4}$

On note $A_n(T)$ le nombre de α dans un tableau de taille n.
Alors $A_n = \sum_{i=1}^{n}(I_k + J_k)$

$$E_n(A_n) = \sum_{k=1}^{n} E_n(I_k) + \sum_{i=1}^{n} E_n(J_k)$$

Pour calculer $E_n(J_k)$, on regarde $E_n(J_k z^{L_n})$

Calcul de $E_n(J_k z^{L_n})$

- Lorsque $n > k$

$$\begin{aligned} E_n(J_k z^{L_n}) &= E_n(E(J_k z^{L_n} | L)) \\ &= \frac{z+1}{2} \cdots \frac{z+2(n-k)-1}{2} \\ &\quad \times \frac{k!}{n!} E_k(I_{J_k}(z+2(n-k))^{L_k}) \end{aligned}$$

- Lorsque $n = k$ (si J_k est réalisé, $L_k = L_{k-1} + 1$).

$$\begin{aligned} E_k(J_k z^{L_k}) &= \frac{z}{4k} \frac{z+1}{2} \cdots \frac{z+1+2(k-3)}{2} \\ &\quad \times \frac{z+2(k-1)-1}{2(k-1)!} \end{aligned}$$

Espérance de J_k

En utilisant les résultats précédents, et avec $z = 1$, on obtient :

$$E_n(J_k 1^{L_n}) = \frac{2(n-k)+1}{4n}$$

Espérance de I_k

On calcule de même l'espérance de I_k, et on trouve

$$E_n(I_k) \quad = \quad \frac{1+2(n-k)}{4n} \frac{k-1}{n-k+1}$$

Espérance de A_n

Lorsque l'on somme sur k pour les deux cas (α dans la case du bas ou β/δ), on obtient donc

$$\begin{aligned} E_n(A_n) &= \sum_{i=1}^{n} E_n(I_k) + \sum_{i=1}^{n} E_n(J_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1+2(n-k)}{4} \frac{1}{n-k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4} - \frac{1}{4(n-k+1)} \\ &= \frac{n}{2} - \frac{h_n}{4} \end{aligned}$$

Nombre de α dans un tableau de taille n

- On a l'espérance
- Formule produit pour L_n $\rightarrow$ somme de v.a. i.i.d. (moyenne et variance connues)
- De même pour le nombre de lignes indexées par α

Bijection de T_n dans T_n

$\alpha \leftrightarrow \beta$, $\gamma \leftrightarrow \delta$

	β			α		γ
		α			γ	
				δ		
	δ		α			
		δ				
	β					
γ						

						δ
α			γ		α	
	β			γ		
			β			
β		γ				
	δ					
δ						

Les distributions de α, β, γ et δ sont les mêmes.

Conclusion

- Bijection T.E.$\leftrightarrow$ permutations colorées
- Preuve combinatoire de $E_n(J_k)$?
- Faire de même avec les q

	β			α	q	γ
q		α			γ	
q	q	q	q	δ		
q	δ		α			
q	q	δ				
	β					
γ						

Figure: Tableau escalier de taille 7