Des serpents dans les groupes de Coxeter

Matthieu Josuat-Vergès

Université de Vienne

Journées ALEA
11 Mars 2011

Introduction

Définition

Soit $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ une permutation, on appelle *descente* un $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.

Cette statistique a été très largement étudiée en combinatoire analytique (séries génératrices, asymptotique...), algébrique (algèbres de descentes...), etc.

Définition

On appelle *permutation signée* une permutation σ de $\{-n, \ldots, n\}$ telle que $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ pour tout i. On la représente par la liste $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$. Exemple : -1,4,2,-3.

Quels résultats sur les permutations peuvent être étendus aux permutations signées ?

Plan

- Nombres Eulériens et variables aléatoires, le cas des permutations signées.
- Une généralisation des permutations alternantes : les serpents dans les groupes de Coxeter.

Plan

- Nombres Eulériens et variables aléatoires, le cas des permutations signées.
- Une généralisation des permutations alternantes : les serpents dans les groupes de Coxeter.

Nombres Eulériens et variables aléatoires

Définition

Si $0 \leq k \leq n-1$, le nombre Eulérien $E_{n,k}$ est le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ avec k descentes.

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 4 & 1 & & \\
1 & 11 & 11 & 1 & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

Nombres Eulériens et variables aléatoires

Définition

Si $0 \leq k \leq n-1$, le nombre Eulérien $E_{n,k}$ est le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ avec k descentes.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 4 & 1 & & \\
1 & 11 & 11 & 1 & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

Proposition ([Laplace...] puis [Foata, Stanley])

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $[0,1]$. Alors la probabilité que $X_1 + \cdots + X_n \in [k, k+1]$ est

$$\frac{E_{n,k}}{n!}.$$

Remarque

$\frac{E_{n,k}}{n!}$ est la probabilité qu'il y ait k descentes dans la suite $X_1, \ldots, X_n$.

C'est donc aussi le volume de l'ensemble :

$$\mathcal{E}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; \mathrm{des}(x_1, \ldots, x_n) = k \right\}.$$

Démonstration.

La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^n$, elle est invariante par l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$ (permutation des coordonnées). On peut choisir indépendamment l'ensemble $\{X_1, \ldots, X_n\}$ puis une permutation qu'on lui applique. $\square$

La question de Foata est alors de trouver une bijection préservant le volume entre

$$\mathcal{E}_{n,k} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; \mathrm{des}(x_1, \dots, x_n) = k \right\}$$

et

$$\mathcal{G}_{n,k} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; k \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k+1 \right\}.$$

La question de Foata est alors de trouver une bijection préservant le volume entre

$$\mathcal{E}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; \operatorname{des}(x_1, \ldots, x_n) = k \right\}$$

et

$$\mathcal{G}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; k \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k+1 \right\}.$$

La réponse de Stanley est, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}_{n,k}$, de définir $z_1 = x_1$, et pour $2 \leq i \leq n$:

$$z_i = \begin{cases} x_i - x_{i-1} & \text{si } x_i > x_{i-1} \\ x_i - x_{i-1} + 1 & \text{si } x_i \leq x_{i-1}. \end{cases}$$

Bijection inverse : $x_i = z_1 + \cdots + z_i \mod 1$.
C'est une bijection $\mathcal{E}_{n,k} \to \mathcal{G}_{n,k}$.

Une remarque

La loi de $\lfloor X_1 + \cdots + X_n \rfloor$ est :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{n,k}}{n!} \delta_k .$$

Par le théorème central limite, on a la convergence :

$$\frac{P_n - \mu_n}{\sigma_n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

i.e. la distribution des descentes est asymptotiquement normale.

Un analogue sur les permutations signées

Définition

Soit $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ une permutation signée. On définit

$$\mathrm{fdes}(\sigma) = \mathrm{des}(-\sigma_n, \ldots, -\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

C'est le nombre de « flag-descentes » [Adin, Brenti, Roichman].

Exemple

$\mathrm{fdes}(3, -1, -2, 4) = \mathrm{des}(-4, 2, 1, -3, 3, -1, -2, 4) = 4.$

On a aussi

$$\mathrm{fdes}(\sigma) = \chi[\sigma_1 < 0] + 2.\,\mathrm{des}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

et

$$\lceil \mathrm{fdes}(\sigma)/2 \rceil = \mathrm{des}_B(\sigma) = \mathrm{des}(0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

(c'est le nombre de « descentes de type B » au sens des groupes de Coxeter).

Définition

Soit $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ une permutation signée. On définit

$$\mathrm{fdes}(\sigma) = \mathrm{des}(-\sigma_n, \ldots, -\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Pour $0 \leq k \leq 2n-1$, soit $F_{n,k}$ le nombre de permutations signées sur n éléments avec k flag-descentes.

Théorème

Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[-1, 1]$. Pour $0 \leq k \leq 2n-1$, la probabilité pour que $Y_1 + \cdots + Y_n \in [-n+k, -n+k+1]$ est

$$\frac{F_{n,k}}{2^n n!}.$$

Cette fois il faut trouver une bijection entre

$$\mathcal{F}_{n,k} = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in [-1,1]^n \;\middle|\; \mathrm{fdes}(y_1, \ldots, y_n) = k \right\}$$

et

$$\mathcal{H}_{n,k} = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in [-1,1]^n \;\middle|\; -n+k \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \leq -n+k+1 \right\}.$$

Réponse : on peut prendre $z_n = y_n$ et pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$z_i = \begin{cases} y_i - y_{i+1} + 1 & \text{si } y_i < y_{i+1}, \\ y_i - y_{i+1} - 1 & \text{si } y_i \geq y_{i+1}. \end{cases}$$

Bijection inverse : $y_i = z_i + \cdots + z_n + (n-i) \mod 2$.

Réponse : on peut prendre $z_n = y_n$ et pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$z_i = \begin{cases} y_i - y_{i+1} + 1 & \text{si } y_i < y_{i+1}, \\ y_i - y_{i+1} - 1 & \text{si } y_i \geq y_{i+1}. \end{cases}$$

Bijection inverse : $y_i = z_i + \cdots + z_n + (n-i) \mod 2$.
On a :

$$z_1 + \cdots + z_n = (n-1) - 2.\operatorname{des}(y_1, \ldots, y_n) + y_1$$

donc

$$\begin{aligned} \lfloor z_1 + \cdots + z_n \rfloor &= n - 1 - 2.\operatorname{des}(y_1, \ldots, y_n) - \chi[y_1 < 0] \\ &= n - 1 - \operatorname{fdes}(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Ainsi c'est une bijection $\mathcal{F}_{n,k} \to \mathcal{H}_{n,2n-1-k}$. On a aussi une bijection $\mathcal{H}_{n,2n-1-k} \to \mathcal{H}_{n,k}$.

Plan

- Nombres Eulériens et variables aléatoires, le cas des permutations signées.
- Une généralisation des permutations alternantes : les serpents dans les groupes de Coxeter.

Plan

- Nombres Eulériens et variables aléatoires, le cas des permutations signées.
- Une généralisation des permutations alternantes : les serpents dans les groupes de Coxeter.

Un autre problème

Définition

Soit $J \subset \{1, \ldots, n-1\}$, on note $\mathcal{D}_J \subset \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations dont l'ensemble de descente est J.

Théorème (? ? ?)

Pour un n donné, $\#\mathcal{D}_J$ est maximal lorsque

$$J = \{1, \ldots, n{-}1\} \cap \{1, 3, 5, \ldots\} \quad \text{ou} \quad J = \{1, \ldots, n{-}1\} \cap \{2, 4, 6, \ldots\},$$

i.e. $\mathcal{D}_J$ est l'ensemble des permutations alternantes ou anti-alternantes.

Il existe une généralisation aux *goupes de Coxeter finis* [Springer, 1971], en particulier pour les permutations signées. Les *serpents* [Arnol'd, 1994] sont des analogues des permutations alternantes pour les permutations signées.

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ admet la présentation :

$$\left\langle\ s_1, \ldots, s_{n-1}\ \middle|\ s_i^2 = 1, \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1, \quad (s_i s_j)^2 = 1 \text{ si } |j{-}i| > 2\ \right\rangle$$

Penser à $s_i = (i, i+1)$.

On note $\ell(\sigma)$ le nombre minimal de facteurs pour écrire σ comme un produit de s_i. C'est aussi le nombre d'inversions $\#\{\ (i,j) \mid i < j \text{ et } \sigma_i > \sigma_j\}$.

Proposition

i est une descente de σ équivaut à $\ell(\sigma s_i) < \ell(\sigma)$.

Le groupe des permutations signées admet une présentation similaire :

$$\mathfrak{S}_n^B = \left\langle\ s_0, \ldots, s_{n-1} \ \middle|\ s_i^2 = 1, \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1 \text{ pour } i \geq 1, \right.$$
$$\left. (s_0 s_1)^4 = 1, \qquad (s_i s_j)^2 = 1 \text{ si } |j-i| > 2\ \right\rangle$$

Penser à $s_i = (i, i+1)(-i, -i-1)$ pour $i \geq 1$ et $s_0 = (1, -1)$.

En général, on appelle groupe de Coxeter un groupe avec une présentation de la forme

$$\left\langle\ s_1, \ldots, s_n \ \middle|\ (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \right\rangle,$$

où $(m_{i,j})$ est une matrice telle que $m_{i,i} = 1$ et $m_{i,j} = m_{j,i}$.

On peut coder les $m_{i,j}$ par un « graphe de Coxeter », les sommets sont les s_i, et si $m_{i,j} \geq 3$ on relie s_i et s_j par une arête avec étiquette $m_{i,j}$.

Alors un théorème de classification dit que les groupes de Coxeter irréductibles finis sont donnés par les graphes :

$$s_1 \overset{3}{\text{———}} s_2 \overset{3}{\text{———}} s_3 \overset{3}{\text{———}} \quad \cdots \quad \overset{3}{\text{———}} s_{n-1}$$
(permutations, $\mathfrak{S}_n$)

$$s_0 \overset{4}{\text{———}} s_1 \overset{3}{\text{———}} s_2 \overset{3}{\text{———}} \quad \cdots \quad \overset{3}{\text{———}} s_{n-1}$$
(permutations signées)

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
s'_0 \arrow[dr, "3"] & & & & \\
& s_2 \arrow[r, "3"] & s_3 \arrow[r, "3"] & \cdots \arrow[r, "3"] & s_{n-1} \\
s_1 \arrow[ur, "3"] & & & &
\end{tikzcd}$$
(permutations signées avec nombre pair de $-$ parmi $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$)

$$s_1 \overset{m}{\text{———}} s_2$$
(groupe dihédral du m-gone, $m \geq 5$)

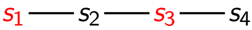
(plus quelques autres groupes *exceptionnels*.)

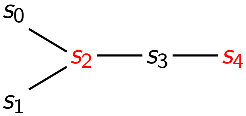
Etant donné des générateurs $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et $J \subset S$ on peut définir une classe de descente $\mathcal{D}_J = \{\ \sigma \mid \ell(\sigma s_i) < \ell(\sigma) \Leftrightarrow i \in J\ \}$

Théorème (Springer)

$\#\mathcal{D}_J$ est maximal lorsque chaque arête du graphe de Coxeter est incidente à exactement un élément de J.

Exemple





On peut définir les *serpents* d'un groupe de Coxeter comme étant la plus grosse classe de descente, cf [Arnold] pour les groupes de permutations signées (il y a deux choix possibles).

Cette définition uniforme des serpents correspond à celle d'Arnold pour les groupes de permutations signées. Dans $\mathfrak{S}_n$, on retrouve les permutations alternantes.

Définition

Une permutation signée $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ est un serpent (de type B) si $0 < \sigma(1) > \sigma(2) < \ldots$

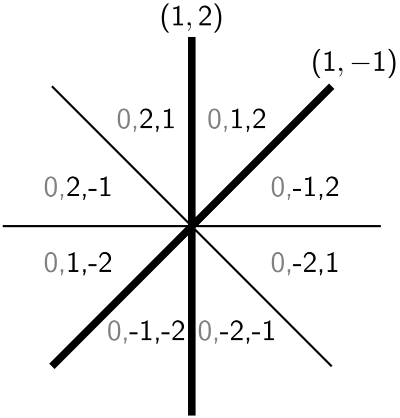
Supposons qu'il y a un nombre pair de signe $-$ parmi $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$, c'est un serpent de type D si $-\sigma(2) < \sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots$ On peut aussi définir (abstraitement) les serpents pour les groupes *exceptionnels*.

Idée de la preuve

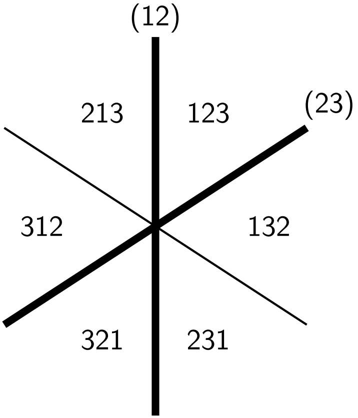
Springer a montré ce résultat directement en termes de groupe. Une autre façon de faire est d'utiliser le point de vue géometrique comme Arnold (les générateurs sont des réflexions orthogonales par rapport à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$).

On peut alors construire explicitement des inclusions entre les classes de descentes, de sorte que la plus grande est celle comme annoncée dans le théorème.

Exemple



$(1,2)$
$(1,-1)$
0,2,1
0,1,2
0,2,-1
0,-1,2
0,1,-2
0,-2,1
0,-1,-2
0,-2,-1



(12)
(23)
213
123
312
132
321
231