

**ORDRES DE GRANDEUR**  
 Claude Loverdo - Antoine Eloi - Vincent Pilaud

## PARTIE A : DILUTION D'UN VERRE D'EAU

Cette expérience de pensée imaginée par Lord Kelvin a pour but de saisir l'immensité du nombre d'Avogadro, noté  $\mathcal{N}_A$  et dont la valeur est  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Imaginons que l'on remplisse un verre d'eau et que l'on puisse marquer les molécules qu'il contient de façon à pouvoir les discerner de n'importe quelles autres molécules d'eau dans la nature. On vide alors ce verre dans la mer. On laisse ensuite le temps aux océans de brasser ce mélange et on reprend un verre d'eau. Combien de molécules marquées retrouvera-t-on dans notre prélèvement ?

On prendra pour volume du verre  $180 \text{ cm}^3$  et  $2 \times 10^{18} \text{ m}^3$  pour celui des océans. Initialement, le verre d'eau contient  $N_0$  molécules d'eau :

$$N_0 = n_0 \times \mathcal{N}_A$$

en notant  $n_0$  le nombre de moles de molécules d'eau dans le verre.

Or, 
$$n_0 = \frac{m_0}{\mathcal{M}}$$

avec  $m_0$  la masse d'eau et  $\mathcal{M}$  la masse molaire de l'eau ( $\mathcal{M} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

Et 
$$m_0 = \rho \times V_0$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $V_0$  le volume du verre.

D'où 
$$N_0 = \frac{\rho V_0}{\mathcal{M}} \mathcal{N}_A$$

Ces molécules sont lâchées dans l'océan, bien mélangées aux eaux. On obtient finalement, en notant  $d$  le nombre de molécules marquées par unité de volume :

$$d = \frac{\frac{\rho V_0 \mathcal{N}_A}{\mathcal{M}}}{V_0 + V_{\text{océan}}} \approx \frac{\rho V_0 \mathcal{N}_A}{\mathcal{M} V_{\text{océan}}}$$

Alors en prélevant à nouveau un volume  $V_0$  d'eau, on récupère  $N$  molécules marquées :

$$N = d \times V_0 \approx \frac{\rho V_0^2 \mathcal{N}_A}{\mathcal{M} V_{\text{océan}}}$$

*Application numérique :*

$$N = \frac{10^6 \times (180 \times 10^{-6})^2 \times 6,02 \times 10^{23}}{18 \times 2 \times 10^{18}} \approx 540 \text{ molécules}$$

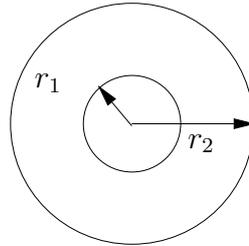
Comparez « visuellement » le volume d'un verre d'eau et celui de tous les océans, et rendez-vous compte de l'énormité du nombre d'Avogadro...

## PARTIE B : VACUITÉ DE LA MATIÈRE

À l'aide d'ordres de grandeur simples, il est possible de se rendre compte de l'extraordinaire vacuité d'un atome.

Sachant que la taille standard d'un atome est  $10^{-10}$  m ( $= 1\text{Å}$ ), et que celle d'un noyau est de  $10^{-14}$  m ( $= 10$  fm), quelle est la proportion de vide d'un atome ?

Adoptons la vision suivante d'un atome, où  $r_1$  est le rayon du noyau de volume  $V_1$  et  $r_2$  celui du nuage électronique de volume  $V_2$ .



$$V_{\text{matière}} = V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad r_1 \approx 10^{-14} \text{ m}$$
$$V_{\text{vide}} = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3) \quad r_2 \approx 10^{-10} \text{ m}$$

D'où

$$\boxed{\frac{V_{\text{vide}}}{V_{\text{matière}}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1}$$

*Application numérique :*

$$\frac{V_{\text{vide}}}{V_{\text{matière}}} = \left(\frac{10^{-10}}{10^{-14}}\right)^3 - 1 = 10^{12} - 1 \approx 10^{12}$$

Il y a mille milliards de fois plus de vide que de matière dans un atome : la matière est donc essentiellement pleine... de vide!

## PARTIE C : SUITE DE FIBONACCI

La suite de Fibonacci a été introduite à propos d'une histoire de lapins : le premier mois, on acquiert un couple de lapins. Ensuite, chaque couple met un mois à devenir adulte, puis donne naissance à un couple de lapins tous les mois.

On peut trouver l'évolution des lapins sur les premiers mois :

mois	1	2	3	4	5	6	7	8	...
couples de jeunes lapins	1	0	1	1	2	3	5	8	...
couples de lapins adultes	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$F_n$ =total	1	1	2	3	5	8	13	21	...

La suite de Fibonacci peut être définie en termes plus mathématiques de la manière suivante :

$$F_0 = F_1 = 1,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

A cette suite, on associe le polynôme  $P_F(X) = X^2 - X - 1$ . On sait que les racines de  $P_F$  sont  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . On en déduit que la suite de Fibonacci est de la forme

$$F_n = \mu\phi^n + \nu\psi^n,$$

avec  $\mu$  et  $\nu$  deux constantes réelles. Ces deux constantes peuvent être évaluées en résolvant le système associé aux conditions initiales

$$\begin{cases} 1 = \mu + \nu \\ 1 = \mu\phi + \nu\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \nu = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On en déduit le comportement de la suite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\frac{F_n}{\phi^n} = \mu + \nu \left( \frac{\psi}{\phi} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu,$$

donc la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se comporte comme la suite  $(\mu\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

### Remarque 1.

La méthode utilisée pour trouver l'expression du terme général de la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut paraître un peu magique. Elle est cependant tout à fait naturelle et générale.

Soit  $k$  un entier,  $P(X) = \sum_{i=0}^k p_i X^i$  un polynôme scindé à coefficients réels,  $m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$  des réels et  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par récurrence par

$$m_i = m_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \quad (\text{initialisation})$$

$$\sum_{i=0}^k p_i m_{n+i} = 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{hérédité})$$

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  les racines de  $P$  avec les multiplicités  $\mu_1, \dots, \mu_l$  (on a supposé que le polynôme  $P$  est scindé, c'est-à-dire qu'il se factorise en un produit de polynômes de degré 1, ce qui revient à supposer que  $\sum_{j=1}^l \mu_j = k$ ).

Alors pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$  et tout  $q \in \{0, \dots, \mu_j - 1\}$ , la suite de terme général  $a^{(q,j)}(n) = n^q (\alpha_j)^n$  satisfait la condition d'hérédité.

En effet, montrons-le par récurrence sur  $q$ .

– si  $q = 0$ ,  $\alpha_j$  étant une racine de  $P$ , il suffit d'écrire :

$$\sum_{i=0}^k p_k a_{n+i}^{(0,j)} = \sum_{i=0}^k p_k (\alpha_j)^{n+i} = (\alpha_j)^n \sum_{i=0}^k p_k (\alpha_j)^i = (\alpha_j)^n P(\alpha_j) = 0$$

– Soit  $r \leq \mu - 1$ . Supposons que la suite de terme général  $a^{(q,j)}(n)$  vérifie la propriété d'hérédité pour tout  $q \leq r - 1$  et montrons que la suite de terme général  $a^{(r,j)}(n)$  vérifie encore la propriété d'hérédité.

Comme  $r \leq \mu - 1$ ,  $\alpha_j$  est une racine du polynôme  $P^{(r)}(X) = \frac{d^r P(X)}{dX^r}$ . Mais

$$P^{(r)}(X) = \sum_{i=r}^k p_i i(i-1)\dots(i-r+1)X^{i-r}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k p_k a_{n+i}^{(r,j)} &= \sum_{i=0}^k p_k (n+i)^r (\alpha_j)^{n+i} = \sum_{i=0}^k p_k \sum_{s=0}^r C_r^s i^s n^{r-s} (\alpha_j)^{n+i} \\ &= \sum_{s=0}^r C_r^s n^{r-s} (\alpha_j)^n \sum_{i=0}^k p_k i^s (\alpha_j)^i = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour toute famille  $(\lambda_{(q,j)})_{1 \leq j \leq l \text{ et } 0 \leq q \leq \mu_j - 1}$ , la suite de terme général

$$\sum_{1 \leq j \leq l \text{ et } 0 \leq q \leq \mu_j - 1} \lambda_{(q,j)} a_n^{(q,j)}$$

satisfait le condition d'hérédité. La condition d'initialisation nous donne alors les contraintes sur la famille  $(\lambda_{(q,j)})_{1 \leq j \leq l \text{ et } 0 \leq q \leq \mu_j - 1}$  pour retrouver la suite  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . △

## PARTIE D : COMPARAISONS ASYMPTOTIQUES

Comparons les suites définies de la manière suivante

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

$$P_n = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

On peut calculer la somme

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2},$$

et on en déduit une comparaison asymptotique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{P_n} = 0.$$

### Remarque 2.

On pourra montrer en exercice que pour tout réel  $r \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{n!} = 0.$$

△

## PARTIE E : SAUT À LA PERCHE

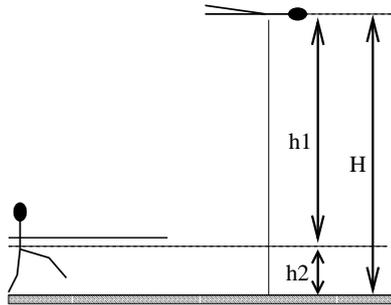
Quelle est à peu près la taille maximale d'un saut à la perche ?

Le saut à la perche c'est de la conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur. Dans un modèle assez grossier nous allons négliger les frottements et le travail des forces intérieures du perchiste.

Juste avant le saut, le perchiste court à une vitesse  $v \simeq 10m.s^{-1}$ .  $E_c = \frac{mv^2}{2}$  L'énergie potentielle de pesanteur à la hauteur  $h_1$  est  $E_p = mgh_1$ . Au maximum de hauteur,  $v \simeq 0$ . Donc  $E_p = E_c$ , c'est-à-dire  $mgh_1 = \frac{mv^2}{2}$ . D'où  $h_1 = \frac{v^2}{2g}$ .

Mais le centre de gravité du perchiste pendant la course est à  $h_2 \simeq 1m$ , alors qu'au passage de la barre il est couché.

$$\text{Donc } h_{total} = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + h_2 \simeq \frac{10^2}{10 \cdot 2} + 1 = 6m$$



Or le record mondial est détenu par Sergey Bubka avec 6m14 en plein air en 1994, et 6m15 en intérieur en 1993.

## PARTIE F : TAILLE MAXIMALE D'UN ANIMAL SUR TERRE

Ce paragraphe est très largement inspiré de l'article : “une physique de (et à ?) l'échelle humaine”, J-M Lévy-Leblond, Bulletin de l'Union des Physiciens, octobre 1997

### F.1. POURQUOI IL NE FAUT PAS ÊTRE TROP GRAND

Quand on tombe d'un arbre on peut se faire très mal, et même se casser un bras. On peut donc supposer que si les animaux ne sont pas trop grands, c'est pour éviter qu'ils ne se cassent en tombant. On peut alors très simplement comparer deux énergies : l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie de cohésion d'un corps. On peut penser en simplifiant qu'il faut juste que l'énergie potentielle de pesanteur soit plus petite que l'énergie perdue quand on casse un corps en deux.

### F.2. ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR

D'une part vous savez que  $E_p = lgm$  avec  $l$  la hauteur de l'animal,  $m$  la masse de l'animal.  $g$  est l'accélération de la pesanteur (environ  $10m.s^{-2}$ ). C'est un ordre de grandeur. Il y a sans doute un facteur numérique,  $\frac{1}{2}$  par exemple pour exprimer que le centre de gravité est plus proche de la mi-hauteur de l'animal. D'autre part la masse d'un animal est relié à son volume, et donc à  $l^3$ . On a donc (à un facteur numérique près)  $E_p = \rho gl^4$  avec  $\rho$  la masse volumique de l'animal. Comme la plupart des animaux sont constitués aux  $\frac{3}{4}$  d'eau, on peut estimer que  $\rho = \rho_{eau} = 1000kg.m^{-3}$ .

### F.3. COHÉSION DU CORPS

Un corps est constitué d'atomes. les atomes ont un noyau chargé positivement et des électrons chargés négativement. Les liaisons chimiques sont dues au partage d'électrons entre plusieurs atomes. Donc on peut penser que l'énergie de cohésion entre deux atomes est proportionnelle à l'énergie électrostatique entre deux charges  $E_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$  avec  $q$  la charge élémentaire ( $1,6 \cdot 10^{-19} C$ ),  $\epsilon_0$  une constante fondamentale appelée la permittivité du vide (environ  $9 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot s^2$ ),  $a$  la distance entre deux atomes (environ 0,1 nm, c'est-à-dire  $10^{-10}$  m). Quand on casse un corps en deux, on casse les liaisons sur une surface de l'ordre de  $l^2$ . Le nombre de liaisons cassées  $N$  est tel que  $N = \frac{\text{aire}_{\text{totale}}}{\text{aire}_{\text{atome}}} = \frac{l^2}{a^2}$ . et donc au final  $E_{\text{casse}} = NE_1 = \frac{q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ .

### F.4. CONCLUSION ET DISCUSSION

Pour que l'animal puisse survivre à une chute, il faut que  $E_p < E_{\text{casse}}$ , c'est-à-dire  $\rho g l^4 < \frac{q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ , ce qui se simplifie en :  $l^2 < \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 g \rho_{\text{eau}}}$ , ce qui donne numériquement une hauteur maximale d'environ 15 cm. C'est très proche de la réalité, malgré l'imprécision des approximations faites. Les seuls animaux sur Terre qui soient vraiment plus grands sont les animaux marins comme la baleine. Mais pour eux il y a une autre force à prendre en compte : la poussée d'Archimède.