L'eau et les mathématiques

Vincent Pilaud

Février 2005

Table des matières

Partie A : Les crues d'un fleuve

On s'intéresse à un réseau de canaux permettant aux eaux d'un fleuve de traverser une ville. Lors de fortes pluies et pendant la fonte des glaces en amont, le réseau devient soudain très sollicité. Par chance, les eaux se répartissent entre les différents canaux du réseau et l'alerte fini par passer. De retour au calme, les autorités se demandent jusqu'à quel point leur réseau aurait pu assurer l'évacuation sans déborder.

A.1. Définitions

Définition 1.

Un *graphe* $\mathbb{G}$ est un couple $(\mathbb{S}, \mathbb{A})$ où $\mathbb{S}$ est l'ensemble des *sommets* de $\mathbb{G}$ et $\mathbb{A} \subset \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ l'ensemble de ses *arêtes*.

Soit $a = (s, t) \in \mathbb{A}$ une arête du graphe $\mathbb{G}$. Le sommet s (resp. t) est appelé *origine* (resp. *but*) de a et noté a_{ori} (resp. a_{but}).

Pour un sommet $s \in \mathbb{S}$, on appelle *arête issue de* s (resp. *arête arrivant à* t) toute arête $a \in \mathbb{A}$ qui a s pour origine (resp. pour but). On appelle *voisin* de s tout sommet t tel qu'il existe une arête ayant s pour origine et t pour but.

Soient $x, y \in \mathbb{S}$. On appelle *chemin de* x *à* y *dans le graphe* $\mathbb{G}$ toute séquence d'arêtes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$ telle que x soit l'origine de a_1, y soit l'origine de a_n et le but de a_i est l'origine de a_{i+1} pour tout $1 \leq i \leq n-1$. On dit que les deux sommets x et y sont *reliés* dans $\mathbb{G}$ si il existe un chemin de x à y dans le graphe $\mathbb{G}$. △

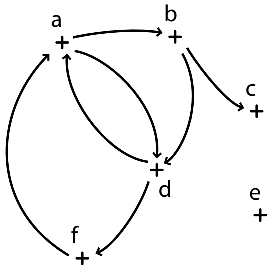
On représente un graphe par un dessin dans lequel chaque sommet est représenté par un point et chaque arête est représentée par un flèche reliant son origine à son but.

Exemple 1.

Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A})$ le graphe définit par

$$\begin{cases} \mathbb{S} = \{a, b, c, d, e, f\} \\ \mathbb{A} = \{(a,b), (a,d), (b,c), (b,d), (d,a), (d,f), (f,a)\} \end{cases}.$$

On le représente par le dessin suivant.



△

Définition 2.

Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A})$ un graphe.

Une *valuation sur le graphe* $\mathbb{G}$ est une application $v : \mathbb{A} \longmapsto \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On appellera *graphe valué* un couple $(\mathbb{G}, v)$ où $\mathbb{G}$ est un graphe et v une valuation sur le graphe $\mathbb{G}$.

Un *flot* sur le graphe $\mathbb{G}$ compatible avec la valuation v (on dit aussi flot sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$) est une application $\psi : \mathbb{A} \longmapsto \overline{\mathbb{R}_+}$ qui satisfait les conditions suivantes :

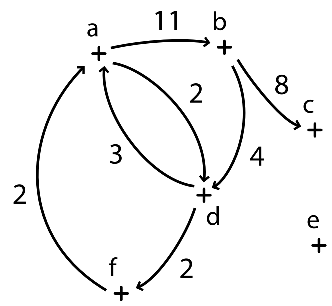
1. $\forall a \in \mathbb{A}, \psi(a) \leq v(a)$,
2. $\forall s \in \mathbb{S}$,

$$\sum_{t \in \mathbb{S},\ t \text{ voisin de } s} \psi((s,t)) - \sum_{t \in \mathbb{S},\ s \text{ voisin de } t} \psi((t,s)) = 0.$$

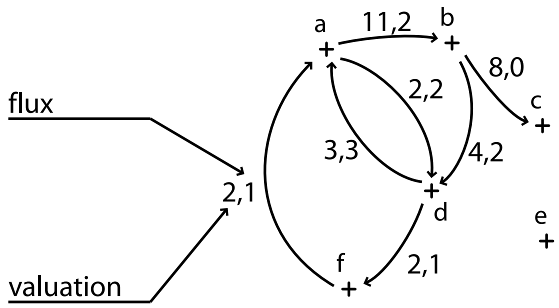
Cette deuxième condition est appelé loi de Kirshoff. △

Exemple 2.

On munit le graphe de notre exemple de la valuation v présentée sur le graphe suivant



On définit alors un flot ψ compatible avec la valuation v sur le dessin suivant



△

Définition 3.

On appelle *réseau d'eau* un graphe valué $(\mathbb{G}, v)$ tel qu'il existe une arête $a \in \mathbb{A}$ telle que $v(a) = +\infty$ et $\forall b \in \mathbb{A} \smallsetminus \{a\}, v(b) \in \mathbb{R}_+$.

Le but de cette arête est appelé *source* et noté s. L'origine est appelée *puit* et notée p.

On notera $(\mathbb{G}, v, s, p)$ un réseau d'eau.

Soit $(\mathbb{G}, v, s, p)$ un réseau d'eau. On appelle flot maximal sur ($\mathbb{G}$,v,s,p) tout flot Ψ sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$ tel que

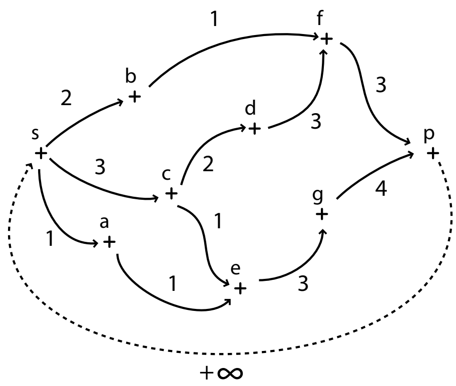
$$\Psi((p,s)) = \max_{\psi \text{ flot sur } (\mathbb{G},v)} \{\psi((p,s))\}.$$

On appelle *débit maximal* la valeur

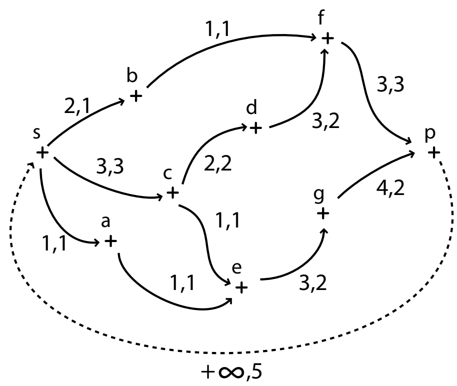
$$F_{\max} = \max_{\psi \text{ flot sur } (\mathbb{G},v)} \{\psi((p,s))\}.$$

△

Exemple 3.



Réseau d'eau



Flot maximal

Le débit maximal de ce réseau d'eau est 5.

△

Définition 4.

Soit ψ un flot sur un graphe valué $(\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A}), v)$.
On appelle *graphe des écarts du flot* ψ le graphe valué $(\tilde{\mathbb{G}} = (\tilde{\mathbb{S}}, \tilde{\mathbb{A}}), \tilde{v})$ défini par

$$\tilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S},$$

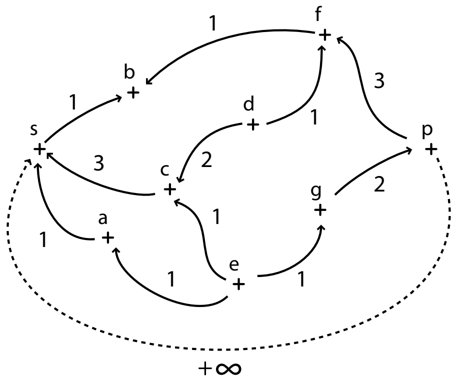
$$\tilde{\mathbb{A}} = \{a \in \mathbb{A} \mid \psi(a) < v(a)\} \cup \{(o,b) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \mid (b,o) \in \mathbb{A} \text{ et } \psi(b,o) = v(b,o)\},$$

$$\tilde{v}((o,b)) = \begin{cases} v((o,b)) - \psi((o,b)) & \text{si } (o,b) \in \mathbb{A} \text{ et } \psi((o,b)) < v((o,b)) \\ v((b,o)) & \text{si } (b,o) \in \mathbb{A} \text{ et } \psi((b,o)) = v((b,o)) \end{cases}.$$

Si $(\mathbb{G}, v, s, p)$ est un réseau d'eau, on appelle *chemin améliorant* tout chemin du graphe des écarts de ψ reliant s à p.

Exemple 4.

Le graphe des écarts du flot précédent est le graphe suivant.



A.2. Algorithme de recherche de flot

On cherche un flot maximal sur un réseau d'eau $(\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A}), v, s, p)$. Pour cela on fait tourner l'algorithme suivant.

Recherche_flot_maximal $(\mathbb{G}, v, s, p) =$

1. Initialisation : Soit ψ le flot nul sur $(\mathbb{G}, v)$ (i.e. le flot défini par $\psi_0(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{A}$) et $(\tilde{\mathbb{G}}_0, \tilde{v}_0)$ le graphe des écarts de ψ.
2. Mise à jour : Tant qu'il existe un chemin $a_1, \ldots, a_k$ de s à p dans le graphe $\tilde{\mathbb{G}}_n$, soient

$$m = \max\{\tilde{v}(a_1), \ldots, \tilde{v}(a_k)\},$$

ψ_{n+1} le flot défini par

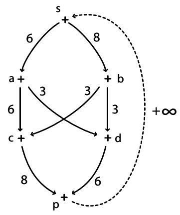
$$\psi_{n+1}((o,b)) = \begin{cases} \psi_n((o,b)) + m & \text{si } (o,b) \in \{a_1, \ldots, a_k, (p,s)\} \\ \psi_n((o,b)) - m & \text{si } (b,o) \in \{a_1, \ldots, a_k\} \\ \psi_n((o,b)) & \text{sinon} \end{cases}$$

et $(\tilde{\mathbb{G}}_{n+1}, \tilde{v}_{n+1})$ le graphe des écarts de ψ_{n+1}.

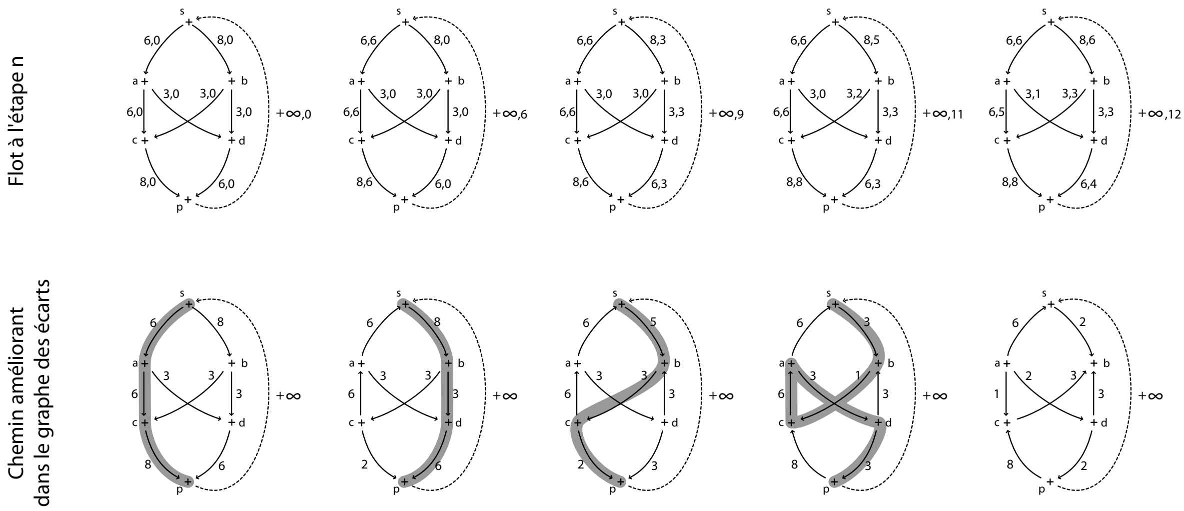
3. Résultat : Quand il n'existe plus de chemin de s à p dans le graphe $\tilde{\mathbb{G}}_n$, renvoyer le flot ψ_n.

Exemple 5.

On montre le fonctionnement de l'algorithme sur un exemple de réseau d'eau.



Réseau d'eau



L'algorithme semble trouver un flot maximal sur le graphe valué. △

A.3. Preuves de l'algorithme

Le but de cette partie est de montrer la correction de l'algorithme, c'est-à-dire de prouver que notre algorithme termine et renvoie bien un flot maximal.

Proposition 1.

A chaque étape, l'algorithme de recherche de flot maximal calcule un flot sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$. △

Preuve.

On le montre par récurrence sur le nombre d'étapes déjà effectuées :

- A l'étape 0 : le flot nul est bien un flot sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'algorithme ait bien calculé un flot à l'étape n et montrons que c'est encore le cas à l'étape $n+1$.

  Soit $a_1, \ldots, a_k$ de s à p le chemin améliorant dans le graphe $\tilde{\mathbb{G}}_n$, et

  $$m = \max\{\tilde{v}(a_1), \ldots, \tilde{v}(a_k)\}.$$

  On a alors

  $$\psi_{n+1}((o,b)) = \begin{cases} \psi_n((o,b)) + m & \text{si } (o,b) \in \{a_1, \ldots, a_k, (p,s)\} \\ \psi_n((o,b)) - m & \text{si } (b,o) \in \{a_1, \ldots, a_k\} \\ \psi_n((o,b)) & \text{sinon} \end{cases}$$

  Dans la preuve, on note $a_{k+1} = (p, s)$.

  Il faut vérifier les deux conditions que doit vérifier un flux :

1. Compatibilité avec la valuation :
   l'hypothèse de récurrence assure que $\forall a \in \mathbb{A}, \psi_n(a) \leq v(a)$. Par conséquent,
   – si $(o,b) \in \{a_1, \ldots, a_k, (p,s)\}$, alors

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}((o,b)) &= \psi_n((o,b)) + m \leq \psi_n((o,b)) + \tilde{v}((o,b)) \\ &= \psi_n((o,b)) + [v((o,b)) - \psi_n((o,b))] = v((o,b)),\end{aligned}$$

   – si $(b,o) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, alors $\psi_{n+1}((o,b)) = \psi_n((o,b)) - m \leq v((o,b))$,
   – sinon, $\psi_{n+1}((o,b)) = \psi_n((o,b)) \leq v((o,b))$.
2. Loi de Kirshoff :
   $\forall u \in \mathbb{S}$, on a par hypothèse de récurrence

$$S_n(u) = \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u} \psi_n((u,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_n((t,u)) = 0.$$

   Par conséquent,
   – si $\exists u' \in \mathbb{S}$ et $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ tel que $(u,u') = a_j$, alors on sait que $\exists u'' \in \mathbb{S}$ tel que $(u'',u) = a_{(j-1 \mod (k+1))}$. On a alors quatre cas :
     (a) si $a_j \in \mathbb{A}$ et $a_{j-1} \in \mathbb{A}$, alors

$$\begin{aligned}S_{n+1}(u) &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u,\ t\neq u'} \psi_{n+1}((u,t)) + \psi_{n+1}(a_j) \\ &\quad - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t,\ t\neq u''} \psi_{n+1}((t,u)) - \psi_{n+1}(a_{j-1}) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u,\ t\neq u'} \psi_n((u,t)) + [\psi_n(a_j) + m] \\ &\quad - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t,\ t\neq u''} \psi_n((t,u)) - [\psi_n(a_{j-1}) + m] \\ &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u} \psi_n((u,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_n((t,u)) = 0,\end{aligned}$$

     (b) si $a_j \in \mathbb{A}$ et $a_{j-1} \notin \mathbb{A}$, alors

$$\begin{aligned}S_{n+1}(u) &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u,\ t\neq u',\ t\neq u''} \psi_{n+1}((u,t)) + \psi_{n+1}(a_j) + \psi_{n+1}(a_{j-1}) \\ &\quad - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_{n+1}((t,u)) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u,\ t\neq u',\ t\neq u''} \psi_n((u,t)) + [\psi_n(a_j) + m] + [\psi_n(a_{j-1}) - m] \\ &\quad - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_n((t,u)) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u} \psi_n((u,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_n((t,u)) = 0,\end{aligned}$$

     (c) si $a_j \notin \mathbb{A}$ et $a_{j-1} \in \mathbb{A}$, même calcul,
     (d) si $a_j \notin \mathbb{A}$ et $a_{j-1} \notin \mathbb{A}$, même calcul.
   – sinon,

$$S_{n+1}(u) = \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } u} \psi_n((u,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ u \text{ voisin de } t} \psi_n((t,u)) = 0.$$

△

Proposition 2.

L'application $\Theta : n \longmapsto \psi_n((p,s))$ est strictement croissante. $\triangle$

Preuve.

On applique la loi de Kirshoff en s :

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}((p,s)) &= \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } s} \psi_{n+1}((s,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ s \text{ voisin de } t,\ t\neq p} \psi_{n+1}((t,s)) \\
&\geq \sum_{t\in\mathbb{S},\ t \text{ voisin de } s} \psi_{n}((s,t)) - \sum_{t\in\mathbb{S},\ s \text{ voisin de } t,\ t\neq p} \psi_{n}((t,s)) + m \\
&= \psi_n((p,s)) + m \\
&> \psi_n((p,s))
\end{aligned}$$

$\triangle$

Proposition 3.

L'algorithme de recherche de flot maximal termine. $\triangle$

Preuve.

Supposons que l'algorithme ne termine pas. Il construit alors une infinité de flots dont les débits sont strictement croissants. Par conséquent, il existe un entier N tel que le débit du flot ψ_N ait dépassé le débit maximum $F_{\max}$ du graphe valué, ce qui est absurde. $\triangle$

Proposition 4.

L'algorithme de recherche de flot maximal renvoie un flot sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$. $\triangle$

Preuve.

L'algorithme termine et renvoie le dernier flot calculé, qui est bien un flot sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$. $\triangle$

Théorème 1.

Le flot renvoyé par l'algorithme est maximal. $\triangle$

Pour prouver ce théorème, on va avoir besoin d'introduire la notion de coupe.

Définition 5.

Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A})$ un graphe. Soit $\mathbb{R} \subset \mathbb{S}$. On appelle *frontière de* $\mathbb{R}$ l'ensemble

$$\partial\mathbb{R} = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists r \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}, a = (r,t) \text{ ou } a = (t,r)\}.$$

On note

$$\partial_+\mathbb{R} = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists r \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}, a = (r,t)\}.$$
$$\partial_-\mathbb{R} = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists r \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}, a = (t,r)\}.$$

$\triangle$

Lemme 1.

Soit ψ un flot sur un graphe valué $(\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A}), v)$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{S}$. Alors

$$\sum_{a\in\partial_+\mathbb{R}} \psi(a) - \sum_{a\in\partial_-\mathbb{R}} \psi(a) = 0.$$

$\triangle$

Preuve.

Il suffit d'appliquer les lois de Kirshoff en chaque point de $\mathbb{R}$ et de sommer ces lois :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{t \in \mathbb{S},\, t \text{ voisin de } r} \psi((r,t)) - \sum_{t \in \mathbb{S},\, r \text{ voisin de } t} \psi((t,r)) = 0$$

Par conséquent,

$$S_{\mathbb{R}} = \sum_{r \in \mathbb{R}} \left[\sum_{t \in \mathbb{S},\, t \text{ voisin de } r} \psi((r,t)) - \sum_{t \in \mathbb{S},\, r \text{ voisin de } t} \psi((t,r)) \right] = 0$$

Mais on a

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= \sum_{r \in \mathbb{R}} \left[\sum_{t \in \mathbb{S},\, t \text{ voisin de } r,\, t \notin \partial_+ \mathbb{R}} \psi((r,t)) - \sum_{t \in \mathbb{S},\, r \text{ voisin de } t,\, t \notin \partial_- \mathbb{R}} \psi((t,r)) \right] \\ &+ \sum_{a \in \partial_+ \mathbb{R}} \psi(a) - \sum_{a \in \partial_- \mathbb{R}} \psi_(a) \\ &= \sum_{a \in \partial_+ \mathbb{R}} \psi(a) - \sum_{a \in \partial_- \mathbb{R}} \psi_(a) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

△

Définition 6.

Soit $(\mathbb{G}, v, s, p)$ un réseau d'eau. On appelle *coupe* du réseau d'eau tout sous-ensemble $\mathbb{R} \in \mathbb{S}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $s \in \mathbb{R}$
2. $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s = r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}, r_k = r \in \mathbb{R}$ tels que $(r_j, r_{j+1}) \in \mathbb{A}, \forall j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

△

Lemme 2.

Soit $(\mathbb{G}, v, s, p)$ un réseau d'eau. Il existe une coupe $\mathbb{R}$ qui contient p si et seulement si il existe un chemin de s à p.

△

Preuve.

On montre les deux implications

$\Rightarrow$) Si $\mathbb{R}$ est une coupe qui contient p, $\exists s = r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}, r_k = p \in \mathbb{R}$ tels que $(r_j, r_{j+1}) \in \mathbb{A}, \forall j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Par conséquent, $(s, r_1), (r_1, r_2), \ldots, (r_{k-1}, p)$ est un chemin de s à p.

$\Leftarrow$) Si $(s, r_1), (r_1, r_2), \ldots, (r_{k-1}, p)$ est un chemin de s à p, l'ensemble $\mathbb{R} = \{s, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, p\}$ est une coupe qui contient p.

△

On peut maintenant montrer le théorème.

Démonstration 1. (du théorème)

Soient $(\mathbb{G}, v, s, p)$ un réseau d'eau et Ψ un flux sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$. Soit $\tilde{\mathbb{G}}$ le graphe des écarts de Ψ.

Nous allons montrer que s'il n'existe pas de chemin dans $\tilde{\mathbb{G}}$, alors le flux Ψ est maximal.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit Λ un flux sur le graphe valué $(\mathbb{G}, v)$ tel que $\Lambda((p,s)) > \Psi((p,s))$. On définit une suite de sous-ensembles $(\mathbb{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{R}_1 = \{s\}$$

$$\mathbb{R}_{n+1} = \mathbb{R}_n \cup \{r_n\}$$

où r_n est un sommet de $\mathbb{S}$ tel qu'il existe un sommet $r \in \mathbb{R}_n$ tel que $\Lambda((r, r_n)) > \Psi((r, r_n))$.

Ceci est toujours possible car

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{a\in\partial_+\mathbb{R}_n} \psi(a) - \sum_{a\in\partial_-\mathbb{R}_n} \psi_(a) \\ &= \sum_{a\in\partial_+\mathbb{R}_n} \Lambda(a) - \sum_{a\in\partial_-\mathbb{R}_n} \Lambda_(a) \end{aligned}$$

On a donc construit une suite de coupes $(\mathbb{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du réseau d'eau $(\mathbb{G}, v, s, p)$ dont les cardinaux sont croissants. Il existe un entier N tel que $p \in \mathbb{R}_N$, donc il existe un chemin de s à p dans $\tilde{\mathbb{G}}$, ce qui contredit l'hypothèse.

△

A.4. Quelques exercices

Exercice 1.

Proposer un algorithme de recherche de chemin entre deux points x et y d'un graphe. △

Exercice 2.

On considère un réseau informatique qui présente les contraintes suivantes : le débit d'informations dans chaque cable et dans chaque noeud est limité (la condition sur les noeuds provient du fait que chaque noeud d'un réseau informatique est un rooteur qui a une capacité limitée).

Comment pourrait-on adapter notre modèle pour trouver le flux maximum à travers le réseau ?

△

Partie B : Les cristaux de neige

On veut étudier la forme des cristaux de neige. Nous donnons un modèle de cristaux qui fait intervenir la notion de fractale : une fractale est une figure tel que tout voisinage d'un point de la figure contient l'image de la figure par une homothétie.

B.1. Le flocon de Von Koch

B.1.a. Préliminaire

Calculs d'aire

Soit ABC un triangle de cotés de longueur $AB = x$, $AC = x$ et $BC = y$.

Question 1. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{y\sqrt{4x^2 - y^2}}{4}$$

Question 2. En déduire l'aire d'un triangle équilatéral de côté x.

Calculs de sommes de suites arithmétiques et géométriques

Question 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \mu + x_n \end{array} \right.$$

Montrer (par récurrence) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{(n+1)(2x_0 + n\mu)}{2} = (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2}$$

Question 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \mu x_n \end{array} \right.$$

Montrer (par récurrence) que :

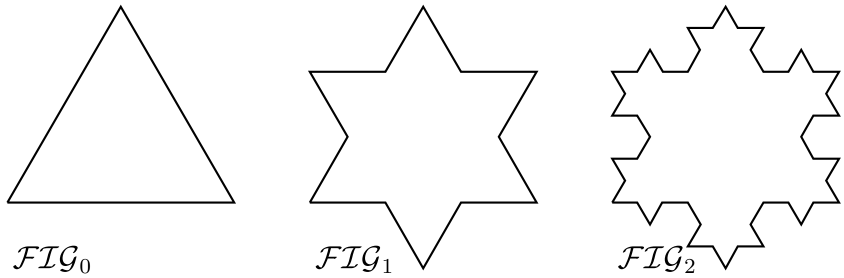
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \frac{1 - \mu^{n+1}}{1 - \mu}$$

B.1.b. Description du problème

On se donne un triangle équilatéral de côté x.

A la première étape, on divise en trois chaque côté du triangle, et on supprime le tiers central que l'on remplace par deux cotés de même longueur tournés vers l'extérieur (cf dessin !).

A chaque étape, on remplace le tiers central de chaque segment par deux côtés de même longueur tournés vers l'extérieur (on appelle $\mathcal{FIG}_n$ la figure obtenue après la n-ième étape).



$\mathcal{FIG}_0$ $\mathcal{FIG}_1$ $\mathcal{FIG}_2$

B.1.c. Calcul du périmètre et de l'aire

Question 5. On appelle $\mathcal{P}_n$ le périmètre de $\mathcal{FIG}_n$, c_n le nombre de côtés et l_n la longueur de ces côtés.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 4^n.3 \; et \; l_n = \frac{x}{3^n}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = (\frac{4}{3})^n 3x$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \infty$$

Question 6. On appelle $\mathcal{A}_n$ l'aire de $\mathcal{FIG}_n$, k_n le nombre de petits triangles rajoutés à l'étape n et a_n l'aire de ces petits triangles.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, k_n = 4^{n-1}.3 \; et \; a_n = \frac{\mathcal{A}_0}{9^n}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0[1 + \sum_{k=1}^{n}(\frac{4^{k-1}.3}{9^k})] = \frac{x^2\sqrt{3}}{20}[8 - 3(\frac{4}{9})^n)]$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2x^2\sqrt{3}}{5}$$

B.2.a. Définition

« Les fractales possèdent une curieuse propriété mathématique : elles présentent essentiellement la même structure à toutes les échelles. »

Field, Michael et Golubitsky, Martin, La symétrie du chaos, InterÉditions, 1993, p. 160.

Définition 7.

On appelle fractale une partie F de l'espace telle que pour tout point $x \in F$, pour tout rayon $r \in \mathbb{R}$, il existe une partie F' de $F \cap B(x,r)$ qui soit l'image de F par une homothétie ($B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r, c'est-à-dire l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y| \leq r\}$).

B.2.b. La notion de dimension

La dimension fractale d'un objet fractale est la mesure de la façon dont l'objet occupe l'espace. Nous n'allons pas la définir rigoureusement, mais nous allons donner des exemples pour comprendre le concept.

Exemple 6.

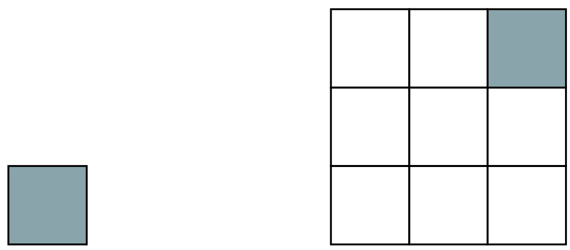
Nous connaissons la dimension fractale de certains objets simples :

1. Un segment est de dimension 1 : si on passe de l'échelle 1 à l'échelle k, on obtient k segments identiques au premier.

Échelle 1 : 1 segment — Échelle 3 : 3 segments

On peut écrire $(variation\ d'\acute{e}chelle)^{dimension} = \frac{nombre\ d'objets\ obtenus}{nombre\ d'objets\ au\ d\acute{e}part}$.

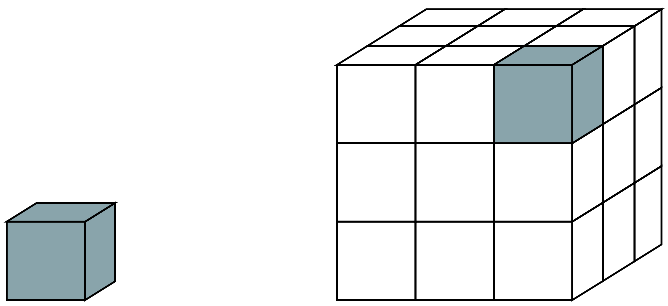
2. Un carré est de dimension 2 : si on passe de l'échelle 1 à l'échelle k, on obtient k^2 carrés identiques au premier.



Échelle 1 : 1 carré — Échelle 3 : 9 carrés

Ici encore on peut écrire $(variation\ d'\acute{e}chelle)^{dimension} = \frac{nombre\ d'objets\ obtenus}{nombre\ d'objets\ au\ d\acute{e}part}$.

3. Un cube est de dimension 3 : si on passe de l'échelle 1 à l'échelle k, on obtient k^3 cubes identiques au premier.

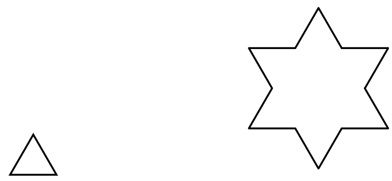


Échelle 1 : 1 cube — Échelle 3 : 27 cubes

Ici encore on peut écrire $(variation\ d'\acute{e}chelle)^{dimension} = \frac{nombre\ d'objets\ obtenus}{nombre\ d'objets\ au\ d\acute{e}part}$.

B.2.c. Calcul de dimensions

De la même faon que précédement, on peut calculer les dimensions de certaines fractales. On calcule ici celle du flocon de Von Koch présenté plus haut.



Échelle 1 : 3 segments   Échelle 3 : 12 segments

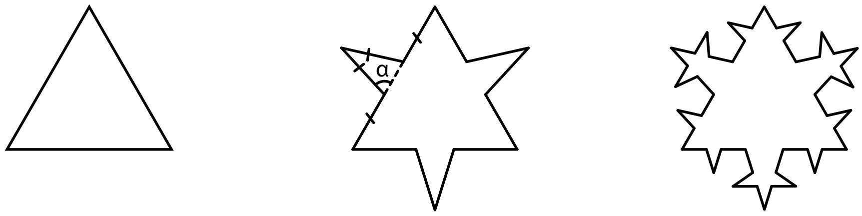
On doit avoir la relation $(variation\ d'échelle)^{dimension} = \frac{nombre\ d'objets\ obtenus}{nombre\ d'objets\ au\ départ}$.
Par conséquent, la dimension d vérifie

$$3^d = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{d'où} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

B.3. Quelques exercices

Exercice 3.

On appelle α-flocon de Von Koch un flocon définit par la figure suivante.

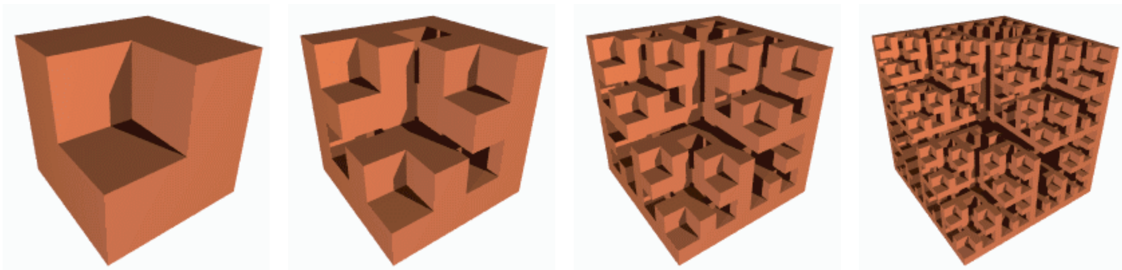


Étape 1   Étape 2   Étape 3

Quelle est sa dimension ?

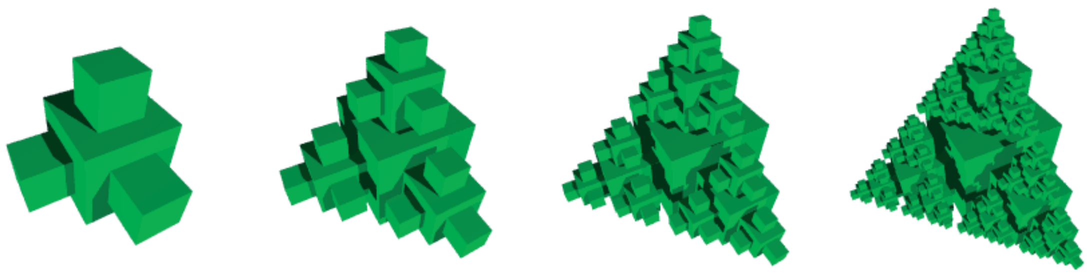
Exercice 4.

Étudier le fractale suivant :



Exercice 5.

Étudier le fractale suivant :



Partie C : Correction des exercices

C.1. Réseaux d'eau

Exercice 6.

On pourra par exemple proposer un algorithme construisant à l'étape i l'ensemble des sommets accessibles depuis le sommet de départ en au plus i arètes. Plus précisément, pour trouver un chemin entre s et t, on note

$$\mathbb{S}_0 = \{s_0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_{i+1} = \mathbb{S}_i \cup \partial\mathbb{S}_i.$$

En retenant pour chaque sommet u l'un des sommets v qui a obligé l'insertion de u (i.e. si $u \in \mathbb{S}_{i+1} \setminus \mathbb{S}_i$, un sommet $v \in \mathbb{S}_i$ tel que $(u, v) \in \mathbb{A}$), on peut reconstruire un chemin de s à t dès que $t \in \mathbb{S}_k$.

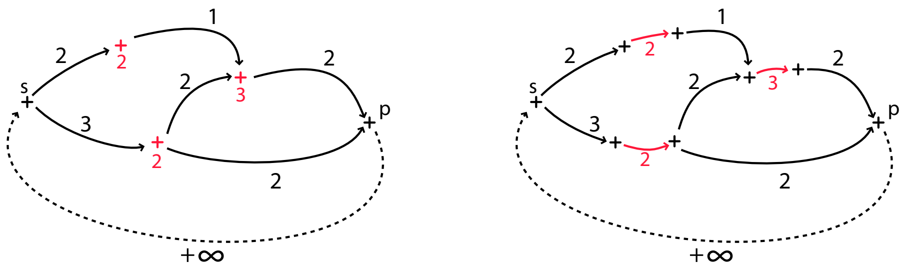
Exercice 7.

Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{S}, \mathbb{A})$ un graphe munit d'une valuation sur les arètes $v : \mathbb{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ modélisant la limitation de débit dans les cables, et d'une valuation sur les sommets $w : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ modélisant la limitation de débit dans les noeuds. On construit alors le graphe valué $(\tilde{\mathbb{G}} = (\tilde{\mathbb{S}}, \tilde{\mathbb{A}}), \tilde{v})$ de la manière suivante :

- $\tilde{\mathbb{S}} = \{s \mid s \in \mathbb{S}\} \cup \{\bar{s} \mid s \in \mathbb{S}\}$,
- $\tilde{A} = \mathbb{A} \cup \{s, \bar{s} \mid s \in \mathbb{S}\}$,
- $\tilde{v}(a) = v(a)$ si $a \in \mathbb{A}$ et $\tilde{v}((s, \bar{s})) = w(s)$ si $s \in \mathbb{S}$.

On a alors une modélisation du graphe de départ avec un graphe valué classique.

Exemple 7.



C.2. Problème du flocon de Von Koch

Question 1. On calcule la longueur de la hauteur issue de A par le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{x^2 - (\frac{y}{2})^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - y^2}}{2}$$

On en déduit la formule :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AH.BC}{2} = \frac{y\sqrt{4x^2 - y^2}}{4}$$

Question 2. On a donc pour un triangle équilatéral $(x = y)$:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{x\sqrt{4x^2 - x^2}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Question 3. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\mu + x_0 \ et \ \sum_{k=0}^{n} x_k = (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2}$$

1. Le résultat est clairement vrai pour $n = 0$,
2. Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons qu'alors il est vrai au rang $n+1$:

$$x_{n+1} = \mu + x_n = \mu + n.\mu + x_0 = (n+1)\mu + x_0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x_k &= \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \\ &= (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2} + (n+1)\mu + x_0 \\ &= (n+2)x_0 + \frac{(n+1)(n+2)\mu}{2}\end{aligned}$$

Remarque 1.

On peut bien sûr obtenir le résultat sans refaire la récurrence si on connaît déjà $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Il suffit de dire que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\mu + x_0$ et d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} k\mu + x_0 = (n+1)x_0 + \mu \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)x_0 + \mu\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 4. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \mu^n x_0 \ et \ \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}$$

1. Le résultat est clairement vrai pour $n = 0$,
2. Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons qu'alors il est vrai au rang $n+1$:

$$x_{n+1} = \mu x_n = \mu.\mu^n x_0 = \mu^{n+1} x_0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x_k &= \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \\ &= x_0 \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu} + \mu^{n+1} x_0 \\ &= x_0 \frac{1-\mu^{n+1} + (1-\mu)\mu^{n+1}}{1-\mu} \\ &= x_0 \frac{1-\mu^{n+2}}{1-\mu}\end{aligned}$$

Question 5. On montre le résultat par récurrence :

- Le résultat est vrai pour $n = 0$ car il y a bien trois côtés, qui sont tous les trois de longueur x.

– Supposons le résultat vrai au rang n et montrons qu'alors il est vrai au rang $n+1$: à l'étape $n+1$, chaque côté est divisé en trois, donc $l_{n+1} = \frac{l_n}{3} = \frac{x}{3^{n+1}}$, et on remplace un côté par quatre segments, donc $c_{n+1} = 4c_n = 4^{n+1}.3$.

On en déduit immédiatement que :

$$\mathcal{P}_n = l_n.c_n = 4^n.3.\frac{x}{3^n} = (\frac{4}{3})^n 3x$$

et donc, puisque $\frac{4}{3} > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \infty$$

Question 6. On ajoute autant de carrés à l'étape n qu'on a de côtés à l'étape $n-1$, donc $k_n = c_{n-1} = 4^{n-1}.3$.

L'aire est proportionnelle au carré du triangle ajouté, donc à $l_n^2 = \frac{x^2}{9^n}$, et pour $n=1$, $a_n = \frac{\mathcal{A}_0}{9}$, donc on a bien le résultat. On en déduit en faisant la somme que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} k_j.a_j = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} 4^{j-1}.3.\frac{\mathcal{A}_0}{9^j} = \mathcal{A}_0[1 + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{4}{9})^j] \\ &= \mathcal{A}_0[1 + \frac{1}{3}\frac{1-(\frac{4}{9})^n}{1-\frac{4}{9}}] = \frac{x^2\sqrt{3}}{20}[8 - 3(\frac{4}{9})^n)]\end{aligned}$$

et donc, puisque $\frac{4}{9} < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2x^2\sqrt{3}}{5}$$

Les exercices 3, 4 et 5 sont laissés à la fantaisie du lecteur.