Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
28 mars 2006

Géométrie différentielle

1 Courbes tracées sur une sphère

Exercice. [Courbes à courbure constante]

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon R et Γ une courbe paramétrée de classe C^2 tracée sur $\mathcal{S}$.

1. Montrer que le rayon de courbure en tout point de Γ est inférieur ou égal à R.
2. Déterminer les courbes Γ dont le rayon de courbure en tout point est R.
3. Déterminer les courbes Γ dont le rayon de courbure est constant.

Exercice. [Un exemple de courbe tracée sur une sphère]

On considère la courbe paramétrée Γ de l'espace définie par

$$x(t) = 2\cos t - \cos(2t) \quad y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \quad z(t) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{t}{2}).$$

1. Montrer que Γ est tracée sur une sphère $\mathcal{S}$ de centre O.
2. Montrer que la tangente en tout point de Γ fait un angle constant avec l'axe vertical.
3. Étudier les courbes du plan obtenues par projection de Γ sur les plans de coordonnées.
4. Donner l'allure de Γ sur la sphère.

Exercice. [Loxodromies de la sphère]

Déterminer les courbes tracées sur la sphère et faisant un angle constant avec les cercles méridiens.

2 Géométrie hyperbolique

Exercice. [Action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré]

On appelle demi-plan de Poincaré la partie $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

On note $SL_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$. À une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{R})$, on associe la transformation de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

qui envoie $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans lui même.

1. Montrer que l'on obtient ainsi un morphisme de groupes de $SL_2(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des transformations de Möbius.

2. Montrer que l'image de ce morphisme est engendrée par les transformations de Möbius du type $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$) et $z \mapsto -1/z$.

3. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan $\mathbb{H}$.

4. Montrer qu'une transformation de Möbius envoie un cercle ou une droite du plan sur un cercle ou une droite.

5. Montrer que tout cercle centré sur l'axe réel peut-être envoyé par une transformation de Möbius sur l'axe imaginaire.

Exercice. [Géodésiques de la distance hyperbolique]

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ une courbe de classe C^1 par morceaux tracée dans le demi-plan $\mathbb{H}$. On appelle longueur hyperbolique de γ la quantité :

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt.$$

On appelle distance hyperbolique entre deux points $x, y \in \mathbb{H}$ la quantité $d_{hyp}(x,y) = \inf \ell_{hyp}(\gamma)$ (où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chemins C^1 par morceaux reliant x et y).

1. Montrer que d_{hyp} est une distance sur $\mathbb{H}$.
2. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement sur $\mathbb{H}$ pour d_{hyp}.
3. Soient a et b deux points de l'axe imaginaire. Montrer que la distance hyperbolique est réalisée par le segment qui joint a et b.
4. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que la distance entre deux points a et b quelconques de $\mathbb{H}$ est réalisée :

(i) par le segment qui joint a et b si ils ont la même partie réelle,

(ii) le cercle centré sur l'axe réel et passant par a et b sinon.