Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

24 janvier 2006

Séries entières

Exercice. [Questions de cours]

(i) Montrer que le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \text{limsup}_{n\to\infty}|a_p|^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Quel est le rayon de convergence d'une somme (resp. d'un produit) de séries entières. Donner des exemples de séries entières pour lesquelles l'inégalité précédente est stricte. Montrer en revanche que pour une somme, il y a égalité si les deux séries sont imbriquées (ie. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = 0$) et si leurs rayons de convergence sont égaux.

(iii) Montrer qu'une série entière est de classe C^∞ sur son disque de convergence et exprimer ses dérivées successives.

(iv) Énoncer et démontrer le principe des zéros isolés.

(v) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa somme sur son disque de convergence. Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule de Cauchy

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt.$$

(vi) Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral (resp. la formule de Taylor-Lagrange).

(vii) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$. Discuter la convergence sur le cercle d'incertitude.

Exercice. [Calculer avec des séries entières]

Donner le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes

$$\sum \frac{x^n}{2n+1} \qquad \sum (n^2 - 3in + 2)z^n \qquad \sum \frac{x^n}{n(2n+1)}$$

$$\sum \frac{(n+i)z^n}{(n+2)(n+4)n!} \qquad \sum \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Exercice.

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la série $\sum b_n$ diverge. On note A_n et B_n les sommes partielles d'ordre n des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

1. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad \left(\text{resp. } \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = l\right).$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\sum_0^{+\infty} a_n x^n}{\sum_0^{+\infty} b_n x^n} = l.$$

2. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_0 + \ldots + A_{n-1}}{n} = l.$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_0^{+\infty} a_n x^n = l.$$

3. Application : montrer que

$$\sum_0^{+\infty} x^{n^2} \sim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Exercice. [Théorème de Liouville]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini. On note f la somme de cette série.

1. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

2. Plus généralement, on suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs et tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme.

3. Montrer que le résultat n'est plus vrai si on ne s'intéresse qu'aux valeurs de la fonction sur l'axe réel.

Exercice. [Équation et série entière]

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p)$ de l'équation $\sum_1^p u_i n_i = n$. En interprétant S_n comme le coefficient d'une série entière bien choisie, donner un équivalent de S_n.

Exercice. [Théorème d'Abel]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 et telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité. Pour un angle $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on définit le domaine

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_0}} f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n.$$

Exercice. [Théorème Taubérien faible]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S.$$

1. Exhiber une telle série entière qui vérifie en plus $\sum a_n$ diverge.
2. Montrer que si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

Exercice. [Théorème Taubérien fort]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose que

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0.$$

Le but de ce qui suit est de montrer que $\sum a_n$ converge vers 0.

On note Φ l'ensemble des fonctions $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

(i) pour tout $x \in [0,1[$, $\sum a_n \phi(x^n)$ converge,

(ii) $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum a_n \phi(x^n) = 0$.

1. Montrer qu'une fonction polynôme Q nulle en 0 est un élément de Φ. Montrer l'existence et déterminer

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) \sum x^n Q(x^n).$$

2. On considère la fonction $g = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q tels que

(i) $P(0) = Q(0) = 0$ et $P(1) = Q(1) = 1$,

(ii) $P \leq g \leq Q$ sur $[0,1]$,

(iii) $\int_0^1 R(t)dt < \varepsilon$ où $R(t) = \frac{Q(t)-P(t)}{t(1-t)}$.

En déduire que $g \in \Phi$.

3. En déduire le théorème anoncé (Hardy-Littlewod).

Exercice. [Quelques objets combinatoires]

On considère la fonction

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

1. Montrer qu'elle est définie et développable en série entière sur le disque de rayon $\frac{1}{4}$. Calculer les coefficients de son développement en série entière.

2. Montrer que cette fonction vérifie $C(z) = 1 + zC(z)^2$ et en déduire que ses coefficients vérifient

$$c_0 = 1 \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \sum_{l+k=n} c_l c_k.$$

3. Montrer que le nombre d'arbres binaires à n noeuds est donné par le n-ième nombre de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Donner d'autres objets combinatoires dont la suite énumérative est donnée par la suite des nombres de Catalan.