Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
17 janvier 2006

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice. [Calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$]

1. On propose trois méthodes pour calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

a. On pose

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire I.

b. On définit l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Donner un équivalent de I_n en $+\infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

En déduire I.

c. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\left(\int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^A re^{-r^2} dr d\theta \leq \left(\int_0^A e^{-t^2} dt\right)^2.$$

En déduire I.

2. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice. [Méthode de Laplace]

Le but de cette méthode est de fournir un équivalent en $+\infty$ d'intégrales de la forme

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{xh(t)} dt.$$

1. Soient $\alpha > -1, \beta > 0, \gamma > 0$ et $l \in]0, +\infty]$. Montrer que

$$\int_0^l t^\alpha e^{-\gamma x t^\beta} dt \sim_{x \to \infty} \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) (\gamma x)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

2. On considère deux fonctions $g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

(i) $\int_{\mathbb{R}^+} |g(t)| e^{h(t)} dt$ est une intégrale convergente,

(ii) $\exists \delta_0 > 0, \forall \delta \in]0, \delta_0[, \forall t \geq \delta, h(t) \leq h(\delta)$,

(iii) au voisinage de 0^+, $g(t) \sim At^\alpha$ (avec $A \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > -1$) et $h(t) = B - \gamma t^\beta + o(t^\beta)$ (avec $B \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ et $\beta > 0$).

Le but de ce qui suit est de montrer que sous ces hypothèses,

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{xh(t)} dt \sim_{x \to \infty} \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{Bx} (\gamma x)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

a. Montrer que l'on peut supposer que $A = 1$ et $B = 0$. On note

$$\Psi(x) = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(\gamma x)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

b. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in]0, \delta_0[, \exists x_1 > 0, \forall x \geq x_1$,

$$(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\Psi(x) \leq \int_0^\delta g(t)exh(t)dt \leq (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\Psi(x).$$

c. Montrer que $\exists x_2 > 0, \forall x \geq x_2$,

$$\int_\delta^{+\infty} |g(t)|e^{xh(t)}dt \leq \varepsilon\Psi(x).$$

d. En déduire l'équivalent recherché.

3. On considère deux fonctions $g, h :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 et telles que
(i) $\int_a^b |g(t)|e^{h(t)}dt$ est une intégrale convergente,
(ii) h admet un unique maximum en $c \in]a, b[$ avec $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$.

Montrer que

$$\int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt \sim g(c)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{xh(c)}\sqrt{\frac{2}{-xh''(c)}}.$$

4. Exemple : donner un équivalent en $+\infty$ de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha t}x^t dt.$$

Exercice. [La fonction gamma]

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

1. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$.
3. Montrer que Γ est de classe C^∞ et calculer ses dérivées successives.
4. En utilisant la méthode de Laplace présentée précédemment, montrer que

$$\Gamma(x+1) \sim_{x\to\infty} \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x},$$

et en déduire la formule de Stirling.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(on montrera que $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^n dt$ et on se ramenera par changement de variable à $I_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ que l'on calculera par récurrence).

Exercice. [$\int \frac{\sin t}{t}dt$]

1. Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$$

est semi-convergente.

2. On propose plusieurs méthodes pour évaluer cette intégrale :

MÉTHODE 1 - Transformée de Laplace
On définit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(i) Donner le domaine de définition de F.

(ii) Montrer que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

(iii) Montrer que pour tout $0 < U < V$,

$$\left| \int_U^V e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{U}$$

et en déduire que F est continue en 0.

(iv) Conclure.

MÉTHODE 2 - Lemme de Riemann-Lebesgue

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) *Lemme de Riemann-Lebesgue* : Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ intégrable. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)dt \int_a^b f(t)dt.$$

(iii) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) Conclure

MÉTHODE 3 - Équations différentielles
On définit

$$\Phi(x) = \int_{+\infty}^{x} \frac{\sin(x-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

(i) Calculer $\Phi''(x) + \Phi(x)$ et $\Psi''(x) + \Psi(x)$.

(ii) En déduire que $\Phi = \Psi$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(iii) Montrer que pour tout $0 < U < V$,

$$\left| \int_U^V \frac{\sin t}{x+t} dt \right| \leq \frac{3}{U}$$

et en déduire que Φ est continue en 0.

(iv) Conclure.

Méthode 4 - Fubini

(i) En utilisant le théorème de Fubini sur $[0,+\infty[\times[0,A]$ pour la fonction $(x,y)\mapsto \sin y e^{-xy}$, montrer que
$$\int_0^A \frac{\sin y}{y}dy = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}+O\left(\frac{1}{A}\right).$$

(ii) Conclure

Exercice. [Calculs d'intégrales]

1. En considérant l'application
$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+t^2},$$
calculer les intégrales
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

2. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-t^2}dt.$$

3. Calculer
$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$$
.

4. Calculer
$$I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha-1}dt$$
en fonction de la fonction Γ.