Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
3 janvier 2006

Intégrale de Riemann

1 Fonctions réglées

Exercice. [Propriétés élémentaires des fonctions réglées]

On dit d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'elle est réglée si elle est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers. Montrer que

(i) une fonction réglée sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$,

(ii) une fonction continue sur $[a, b]$ est réglée sur $[a, b]$,

(iii) une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si toutes ses discontinuités sont de première espèce (ie. $\ell(x_0^+) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, $\ell(x_0^-) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ et $f(x_0)$ existent mais sont différentes),

(iv) une fonction monotone sur $[a, b]$ est réglée sur $[a, b]$,

(v) l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable. Donner un exemple de fonction réglée discontinue sur un ensemble dénombrable.

Exercice. [Fonction à variation bornée]

Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On note $\mathrm{sub}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. Pour $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ une telle subdivision, on note

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

On dit que f est à variation bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $\mathrm{Var}_\sigma(f) \le M$. On pose alors

$$\bigvee_a^b f = \sup_{\sigma\in\mathrm{sub}([a,b])} \mathrm{Var}_\sigma(f).$$

1. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée et $[c, d] \subset [a, b]$. Montrer que $f_{|[c,d]}$ est à variation bornée. On note $\bigvee_c^d f = \bigvee_c^d f_{|[c,d]}$. Montrer la relation de Chasles : pour tout $a \le c < d < e \le b$,

$$\bigvee_c^d f + \bigvee_d^e f = \bigvee_c^e f.$$

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que f est à variation bornée si et seulement si il existe deux fonctions croissantes $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f = g - h$. Montrer qu'une fonction à variation bornée est réglée.

2 Calcul intégral

Exercice. [Intégrales de Wallis]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

Donner une expression explicite de W_n en fonction de la parité de n. Donner un équivalent de W_n. Démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice. [$\lim_{n\to\infty} \|.\|_n = \|.\|_\infty$]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \|f\|_\infty.$$

Exercice. [Mesure de Stiljes]
1. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ intégrable. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\|f\|_g = \int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

2. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{g,n} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n g(t) dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \|f\|_\infty.$$

Exercice. [Lemme de Riemann-Lebesgue]
Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ intégrable.
1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \int_a^b f(t)dt.$$

2. En déduire le lemme de Riemann-Lebesgue : si f est intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

3. Retrouver ce résultat sans utiliser la première question lorsque f est supposée de classe C^1 sur $[a,b]$.