Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

8 novembre 2005

Algèbre linéaire

1 Déterminants

Exercice. [Van Der Monde]

1. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots, a_n & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. Calculer

$$W_p(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \ldots & a_n^{p-1} \\ a_1^{p+1} & a_2^{p+1} & \ldots & a_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

3. Soient $a_0 < \ldots < a_n \in \mathbb{R}$ et $k_0 < \ldots < k_n \in \mathbb{N}$. Montrer que le déterminant de la matrice $A = [a_i^{k_j}]_{i,j \in \{0,\ldots,n\}}$ est strictement positif.

Exercice. [Polynôme et déterminant]

Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & X & X^2 & \ldots & X^n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \ldots & (n+1)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Exercice. [Inégalité sur le déterminant]

Soit $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Discuter les cas d'égalité.

Exercice. [Tchébytchev]

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel θ, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Montrer que ces polynômes vérifient la relation de récurrence $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ et en déduire le degré et le coefficient dominant de T_n, puis que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta_0, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos\theta_0 & \cos\theta_1 & \ldots & \cos\theta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n\theta_0) & \cos(n\theta_1) & \ldots & \cos(n\theta_n) \end{bmatrix}$$

Exercice. [Calculs de déterminants]

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha & \ldots & \alpha \\ \beta & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \beta & \ldots & \beta & \gamma_n \end{bmatrix}.$$

2. Soient $(\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ et $(\beta_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ deux familles telles que $\alpha_i + \beta_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$[\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}.$$

3. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & N \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ N & \ldots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \ldots & 0 & c & a \end{bmatrix}.$$

Exercice. [Diagonale dominante]

1. Soit $A = [a_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Montrer que A est inversible et que

$$|\det A| \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right).$$

2. Soit $A = [a_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \in \{1,\dots,n\},\ a_{ij} \leq 0.$$

Montrer que A est inversible et que

$$|\det A| \geq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij}.$$

Exercice. [Déterminant et pgcd (resp. ppcm)]

1. On pose $D_n = [i \wedge j]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$. Déterminer $\det D_n$.

2. On définit deux matrices $L_n = [l_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ et $U_n = [u_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ par

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j|i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{ij} = \begin{cases} \varphi(i) \text{ si } i|j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler. Montrer que $D_n = L_n U_n$ est la décomposition LU de D_n et retrouver ainsi la question précédente.

3. On définit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0, 1, -1\}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n possède un facteur carré, et $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$ si $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers distincts.

a. Montrer que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (ie. $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). On pourra montrer aussi que cette égalité caractérise la fonction de Möbius.

b. Soit $(G, +)$ un groupe abélien et $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow A$. On pose

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

En utilisant la première question, montrer que

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) g(d).$$

c. On pose $D_n(f) = [f(i \wedge j)]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ et on définit deux matrices $L_n = [l_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ et $U_n = [u_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ par

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j|i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{ij} = \begin{cases} \sum_{d|i} \mu(d) f\left(\frac{i}{d}\right) \text{ si } i|j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Montrer que $D_n(f) = L_n U_n$ est la décomposition LU de $D_n(f)$ et en déduire le déterminant de $D_n(f)$.

d. En déduire le déterminant de $[i \vee j]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$

Exercice. [Déterminant et matrices nilpotentes]

Soient A et B deux matrices carrées de taille n sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que A et B commutent et que B est nilpotente. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Exercice. [Déterminant et matrices par bloc]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A-B)\det(A+B) \quad \text{et} \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \geq 0.$$

2. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

Montrer que le résultat est faux quand on ne suppose plus que A et C commutent.

Exercice. [Résultant]

Soients $P = \sum_{i=0}^{p} p_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{q} q_i X^i$ deux polynômes à coefficients dans un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. On appelle résultant de P et Q le déterminant $\operatorname{Res}(P,Q)$ de la matrice

$$\Delta_{P,Q} = \begin{bmatrix}
p_0 & & & & q_0 & & \\
p_1 & \ddots & & & q_1 & \ddots & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & q_0 \\
p_p & \ddots & \ddots & p_0 & \vdots & \ddots & q_1 \\
 & \ddots & \ddots & p_1 & q_q & \ddots & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & & & p_p & & & q_q
\end{bmatrix},$$

où les places libres sont remplies par des 0.

1. En considérant l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longleftarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UP + VQ \end{array}$$

montrer que

$$\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1.$$

2. On note $P = p_p \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ et $Q = q_q \prod_{i=1}^{q}(X - \mu_i)$. On considère la matrice de Van Der Monde $W_{P,Q} = V(\mu_1, \ldots, \mu_q, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)^t$. En calculant de deux manières différentes le déterminant du produit $W_{P,Q}\Delta_{P,Q}$, montrer que

$$\operatorname{Res}(P,Q) = p_p^q . q_q^p \prod_{\substack{i \in \{1,\ldots,p\} \\ j \in \{1,\ldots,q\}}} (\lambda_i - \mu_j).$$

Retrouver ainsi le résultat précédent.

Exercice. [Polygones]

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone à n sommets dont les a_k sont les affixes des milieux des côtés.

2 Réduction des endomorphismes

Exercice. [Polynômes caractéristiques de l'inverse et de la comatrice]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} et de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice. [Puissance d'une matrice diagonalisable]
1. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B = A^p$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
2. On ne suppose plus A inversible. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la propriété reste vraie.

Exercice. [Restriction des scalaires]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sont-elles semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
Quelles hypothèses doit-on faire sur une extension $k \subset K$ pour généraliser telle quel cette démonstration. Noter que ce résultat se généralise à toute extension de corps par l'étude des invariants de similitude.

Exercice. [$A^3 + A = 0$]
Soit A une matrice carrée de taille 3 non nulle telle que $A^3 + A = 0$. Montrer qu'elle est semblable à la matrice
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice. [Matrice nilpotente et trace nulle]
1. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Trace}(A^k) = 0 \Leftrightarrow A \text{ nilpotente}.$$

Exercice. [Diagonalisation d'une matrice par blocs]
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que la matrice
$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & A \end{bmatrix}$$
soit diagonalisable.

Exercice. [Trace modulo p]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A)\ [p]$.

3 Exercices de synthèse

Exercice. [Matrices élémentaires] On note δ_{ij} le symbole de Kronecker du couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. On appelle matrices élémentaires les matrices

(i) base canonique : pour $(k, l) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$, $E_{kl} = [\delta_{ik}.\delta_{jl}]_{i,j} \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{C})$,
(ii) transvection : pour $k \neq l \in \{1, \dots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{kl}(\lambda) = I_r + \lambda E_{kl} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{C})$,
(iii) dilatation : pour $k \in \{1, \dots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_k(\lambda) = I_r + (\lambda - 1)E_{kk} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{C})$,
(iv) permutation : pour $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $P_\sigma = [\delta_{i\sigma(j)}]_{i,j} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{C})$.

Donner le déterminant, les polynômes caractéristiques et minimaux, les valeurs propres, les espaces propres et caractéristiques des matrices élémentaires. Sont-elles diagonalisables ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices de transvection (resp. dilatation, resp. permutation) soient semblables.

Exercice. [Un produit étrange]

Soient $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $A \otimes B = [a_{ij}B] \in \mathcal{M}_{np\times mq}(\mathbb{K})$

1. Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & A \times M \end{array}$$

admet $A \otimes I_n$ pour matrice dans la base canonique ordonnée judicieusement. Exprimer de même $M \mapsto M \times A$.

2. Montrer que si A et $\tilde{A}$ sont carrées de même dimension n et B et $\tilde{B}$ sont carrées de même dimension p, alors

$$(A \otimes B) \times (\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = (A \times \tilde{A}) \otimes (B \times \tilde{B}).$$

3. Montrer que pour toutes matrices A et B,

$$\mathrm{rg}(A \otimes B) = \mathrm{rg}(A) \times \mathrm{rg}(B).$$

4. Montrer que pour toutes matrices carrées A et B de tailles respectives n et p,

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^p \times (\det B)^n.$$

5. Soient A et B deux matrices diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres et fonction de ceux de A et de B.

Exercice. [Matrice antidiagonale]

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Quel est le déterminant de $A(a_1, \ldots, a_n)$?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A(a_1, \ldots, a_n)$ soit diagonalisable.
3. Que peut-on dire si on se place sur $\mathbb{R}$?
4. Étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P \mapsto X^n P(\frac{1}{X})$.

Exercice. [Matrice circulante]

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et

$$C(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $C(a_1, \ldots, a_n)$ est diagonalisable et expliciter ses éléments propres.
2. Calculer le déterminant de $C(a_1, \ldots, a_n)$.