Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
4 octobre 2005

Algèbre générale (i) : Groupes

1 Généralités

Exercice. [Partie stable d'un groupe fini]
Soit G un groupe fini et A une partie non vide de G stable par la loi de G. Montrer que A est un sous-groupe de G.

Exercice. [Ordres d'un produit et produit des ordres]
Soit G un groupe commutatif et a et b deux éléments de G d'ordres respectifs m et n.

1. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors ab est d'ordre mn. Montrer que ce résultat est faux si m et n ne sont pas premiers entre eux ou si le groupe G n'est pas commutatif.

2. Montrer qu'il existe un élément d'ordre $\mathrm{ppcm}(m, n)$.

3. Montrer que si G est fini, il existe un élément z de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

4. En déduire que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Exercice. [Sous-groupes particuliers de $(\mathbb{C}^*, \times)$]
Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ qui sont

(i) finis,
(ii) compacts,
(iii) fermés dans $\mathbb{C}^*$,
(iv) ouverts dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice. [Groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini]
Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

2 Groupes classiques

2.1 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice. [Groupes monogènes]

1. Soit G un groupe monogène (ie. engendré par un seul élément). Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

2. Montrer que tout sous-groupe de G est monogène.

Exercice. [Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$]
Montrer que pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.

Exercice. [Indicatrice d'Euler]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $s \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{s}$ son image dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) s est premier avec n,

(ii) $\bar{s} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$,

(iii) $\bar{s}$ générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On définit la fonction indicatrice d'Euler $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ par $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des nombres entiers strictement positifs,

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Montrer que si a est premier avec n, alors $a^{\varphi(n)} = a \mod n$ (petit théorème de Fermat).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

(on pourra utiliser l'exercice précédent).

2.2 Groupe des permutations

Exercice. [Générateurs de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$]

1. Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations est engendré par les systèmes suivants :

(a) les transpositions,

(b) les transpositions de la forme $(i, i+1)$,

(c) les transpositions de la forme $(1, i)$,

(d) les deux permutations $(1, 2)$ et $(1, 2, \ldots, n)$.

2. En déduire des systèmes générateurs du groupe $\mathfrak{A}_n$ des permutations paires.

3. Montrer qu'un système générateur de $\mathfrak{S}_n$ ne contenant que des transpositions contient au moins $n - 1$ éléments.

Exercice. [Ordre d'un élément de $\mathfrak{S}_n$]

Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice. [Signature]

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme non triavial de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. On note ε ce morphisme et on l'appelle signature.

2. En déduire que le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

Exercice. [Stabilisateur d'un cycle]

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle d'ordre n. Déterminer les éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec σ.

2.3 Groupes finis de petits ordres

Exercice. [Groupes d'ordre premier]

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quels sont les sous-groupes de G ?

Exercice. [Groupes d'éléments nilpotents]

Soit G un groupe dont tous les éléments sont nilpotents (ie. $\forall x \in G, x^2 = e$, où e désigne l'élément neutre de G).

1. Montrer que G est commutatif.

2. Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice. [Groupes d'ordre 4]

Déterminer les classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 4.

Exercice. [Groupes d'ordre 6]

1. Déterminer les classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 6.

2. On note $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe de Klein. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(V_4)$ des automorphismes de V_4 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice. [Groupes d'ordre $2p$]

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre $2p$.

1. On suppose que G est commutatif. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

2. On suppose que G n'est pas commutatif. Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.

Exercice. [Groupes d'ordre 8]

1. Déterminer les classes d'isomorphisme de groupes commutatifs d'ordre 8.

2. Soit G un groupe non commutatif à 8 éléments.

(a) Montrer que le centre $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ yx = xy\}$ de G est d'ordre 2 (on pourra éventuellement admettre provisoirement cette question et en voir une preuve plus générale par les actions de groupe sur les p-groupes).

(b) Montrer que G contient un sous-groupe cyclique H d'ordre 4.

(c) Montrer que H est distingué dans G (on pourra voir plus généralement qu'un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G quelconque est distingué dans G).

(d) Soit $x \in G \setminus H$. Montrer que $\langle H, x\rangle = G$.

(e) On suppose que $G \setminus H$ contient un élément d'ordre 2. Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_8.

(f) On suppose que $G \setminus H$ ne contient aucun élément d'ordre 2. Montrer que G ne contient qu'un seul élément d'ordre 2 que l'on note -1. Soit i un générateur de H, j un élément de $G \setminus H$ et $k = ij$. Dresser la table de G et vérifier que G est isomorphe au groupe des quaternions.