

Continuité des racines d'un polynôme

Vincent Pilaud

2006

1 Introduction

Soient a, b, c trois applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que pour tout $t \in [0, 1]$, $b(t)^2 - 4a(t)c(t) \geq 0$ et $a(t) \neq 0$. Considérons le polynôme $P_t(X) = a(t)X^2 + b(t)X + c(t)$ dont on note

$$f(t) = \frac{-b(t) + \sqrt{b(t)^2 - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{-b(t) - \sqrt{b(t)^2 - 4a(t)c(t)}}{2a(t)}$$

les racines. Ces deux fonctions racines sont continues par continuité des coefficients a, b et c de P . Dans ce texte, nous proposons une généralisation de ce résultat : nous montrons (§ 4) que l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n associe l'ensemble de ses racines est continue (nous discutons de la topologie des ensembles de départ et d'arrivée au § 3). Pour cela, nous avons besoin d'une caractérisation classique et utile des applications propres (§ 2). Nous présentons ensuite un résultat sur la sélection des racines d'une famille à un paramètre de polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ (§ 5). Nous proposons enfin une application de ces résultats à la topologie des matrices (§ 6).

2 Applications propres

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue entre ces deux espaces. On dit que l'application f est

- *fermée* lorsque l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F ,
- *propre* lorsque l'image réciproque par f d'un compact de F est un compact de E .

Les applications propres sont caractérisées par la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit f une application continue entre deux espaces métriques. Il y a équivalence entre*

- (i) *f est propre,*
- (ii) *f est fermée et l'image réciproque d'un singleton est compacte.*

Commençons par montrer l'implication (i) \Rightarrow (ii). Un singleton étant compact, son image réciproque par une application propre est compacte. Il suffit donc de montrer qu'une application propre est fermée. Considérons donc un fermé A de E et montrons que $B = f(A) \subset F$ est fermé. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de B qui converge vers un élément y de F et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. L'ensemble $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ étant compact et l'application f étant propre, l'ensemble $f^{-1}(\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\})$ est compact. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . Comme A est fermé, $x \in A$. On en déduit que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)}) = f(x) \in B$. Donc B est bien fermé.

Montrons maintenant la réciproque. Considérons un compact K de F et montrons que $L = f^{-1}(K)$ est compact. Pour cela, considérons une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés dont toute intersection finie est non vide et montrons que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est non vide. Pour toute partie finie J de I , on note $G_J = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$. Ces ensembles sont fermés comme intersections de fermés, et f étant fermée, leurs images sont aussi des fermés. De plus, toute intersection finie de ces images est non vide car pour toutes parties finies J_1, \dots, J_p de i ,

$$\bigcap_{l=1}^p G_{J_l} = G_{\bigcup_{l=1}^p J_l} \neq \emptyset \quad \text{donc} \quad \emptyset \neq f\left(\bigcap_{l=1}^p G_{J_l}\right) \subset \bigcap_{l=1}^p f(G_{J_l}).$$

On a donc une famille $\{f(G_J) \mid J \subset I, J \text{ finie}\}$ de fermés dans un compact K dont toute intersection finie est non vide. Par conséquent, $\bigcap_{J \subset I, J \text{ finie}} f(G_J) \neq \emptyset$. Soit y dans cet ensemble et $M = f^{-1}(\{y\})$. M est compact par hypothèse et pour toute partie finie J de I , $y \in f(M \cap G_J)$ donc $M \cap G_J \neq \emptyset$, ie. $M \cap \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$. Comme M est compact, on obtient donc $M \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, et donc en particulier, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est non vide, ce qui termine la preuve.

Voici maintenant un résultat utilisant le caractère propre d'une application qui nous servira pour la suite :

Proposition 2. Soit E, F et G trois espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ continue, surjective et propre et $g : F \rightarrow G$. Alors $g \circ f$ est continue si et seulement si $g \circ f$ l'est.

La composée de deux applications continues est continue, donc le sens direct est trivial. Réciproquement, supposons que $g \circ f$ est continue et montrons que g l'est aussi. Soit A un fermé de G . La surjectivité de f assure que $g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$. Mais $g \circ f$ est continue, donc $(g \circ f)^{-1}(A)$ est fermé, et f est fermée (car propre, par la proposition précédente), donc $g^{-1}(A)$ est fermé, ce qui prouve le résultat.

3 Topologie des espaces de départ et d'arrivée

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'ensemble des polynômes unitaires de degrés n à coefficients complexes que l'on identifie avec l'espace vectoriel \mathbb{C}^n via l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow F_n \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto X^n - u_1 X^{n-1} + u_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la topologie que l'on met sur l'ensemble des polynômes est celle de leurs coefficients. Par ailleurs, on a choisi les polynômes unitaires et on se place dans le corps des complexes pour être assuré de l'existence de n racines (éventuellement confondues) de chacun de ces polynômes.

Discutons maintenant de l'espace d'arrivée de l'application qui nous intéresse. On a essentiellement deux choix :

1. Étant donné un polynôme P , on peut considérer l'ensemble de ses racines comme une partie finie non vide de \mathbb{C} . Soient A et B deux parties finies non vides de \mathbb{C} . Pour tout $\varepsilon > 0$, on appelle ε -voisinage de A l'ensemble $V_\varepsilon(A) = A + B(0, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{C} \mid \exists v \in A, |u - v| \leq \varepsilon\}$. La distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset V_\varepsilon(B) \text{ et } B \subset V_\varepsilon(A)\}.$$

On note S l'ensemble des parties finies non vides de \mathbb{C} que l'on munit de la distance de Hausdorff $d : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. L'inconvénient de la distance de Hausdorff pour le problème qui nous intéresse est qu'elle ne permet pas de compter les multiplicités. Ainsi, les polynômes $P = (X - 1)(X - \varepsilon)(X + \varepsilon)$ et $Q = X(X - 1 - \varepsilon)(X - 1 + \varepsilon)$ seront envoyés sur deux ensembles A et B à distance faible (fig. 1). C'est une motivation pour l'introduction de la métrique suivante.

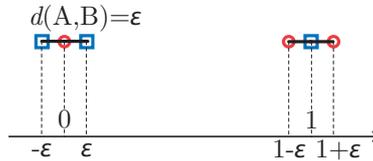


FIG. 1 – Distance de Hausdorff

2. Soient $A = (a_1, \dots, a_n)$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ deux éléments de \mathbb{C}^n . La pseudo-distance de permutation entre A et B est définie par

$$\delta(A, B) = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i - b_{\sigma(i)}|.$$

C'est une pseudo-distance sur \mathbb{C}^n (toutes les permutations d'un même n -uplet sont à distance nulle) qui passe au quotient sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n et donne une métrique correspondant à la topologie quotient de l'espace hermitien \mathbb{C}^n par le groupe symétrique \mathfrak{S}_n (ie. la topologie la plus fine qui laisse continue la projection canonique). Cette topologie permet de distinguer les triplets $A = (1, -\varepsilon, \varepsilon)$ et $B = (0, 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (fig. 2).

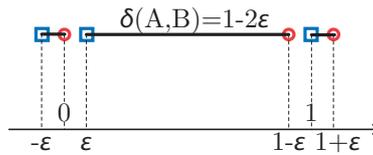


FIG. 2 – Distance de permutation

Dans ce qui suit, on va utiliser la seconde solution parce qu'elle nous semble mieux adaptée au problème de la continuité des racines des polynômes dans la mesure où l'on veut distinguer les multiplicités des racines.

4 Continuité des racines

Maintenant que la topologie des espaces de départ et d'arrivée de notre application est bien définie, nous pouvons annoncer et démontrer notre théorème :

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $\Phi : F_n \rightarrow \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$, qui à un polynôme associe la classe de ses racines est continue.*

Pour prouver ce théorème, on utilise le résultat de la proposition 2. On note

$$\sigma_p^n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_p},$$

la p -ième polynôme symétrique élémentaire à n variables et on considère l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & F_n \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & X^n - \sigma_1^n(z_1, \dots, z_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n^n(z_1, \dots, z_n). \end{array}$$

On vérifie que cette application est

1. continue : elle est polynomiale,
2. surjective : c'est le théorème de D'Alembert,
3. propre : les espaces \mathbb{C}^n et F_n étant de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées. L'application étant continue, il suffit de montrer que l'image réciproque d'un borné est borné : il s'agit donc de localiser les racines des polynômes en fonction de leurs coefficients. Soit K une partie bornée de F_n et $M = \sup_{P \in K} \|P\|_\infty$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme $P = X^n - u_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n u_n$ de K . Alors $|z| \leq M + 1$. En effet,
 - soit $|z| \leq 1$, et alors $|z| \leq M + 1$,
 - soit $|z| > 1$, alors $|z|^n \leq |u_1| |z|^{n-1} + \dots + |u_n| \leq M(|z|^{n-1} + \dots + 1) = M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \leq M \frac{|z|^n}{|z| - 1}$, d'où l'on déduit $|z| - 1 \leq M$, ie. $|z| \leq M + 1$.

Le théorème découle donc immédiatement de la proposition 2 et du fait que l'application $\Phi \circ \Psi$ est continue (c'est la projection canonique de \mathbb{C}^n sur $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$, qui est continue par définition de la topologie quotient sur $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$).

5 Sélection continue des racines

On s'intéresse maintenant au problème de sélection continue d'une racine dans une famille de polynômes. Revenons à l'exemple de l'introduction pour présenter le problème : on considère une famille de polynômes $P_t(X) = a(t)X^2 + b(t)X + c(t)$ indexée continuellement par le paramètre $t \in \mathbb{R}$. La question est de savoir si, étant donnée une racine f_0 de P_0 , il est possible de suivre cette racine de manière continue au cours du temps, ie. de choisir à chaque instant $t \in \mathbb{R}$ une racine $f(t)$ de P_t de sorte que f soit continue sur \mathbb{R} (avec $f(0) = f_0$).

Notons avant tout qu'il n'est pas possible de réaliser une telle sélection lorsque le paramètre est complexe au lieu d'être réel : il est bien connu qu'il n'existe par exemple pas de détermination continue de la racine carrée complexe, donc on ne peut pas suivre continuellement une racine de la famille de polynômes $\{X^2 - z \mid z \in \mathbb{C}\}$. Pourtant, la sélection devient possible lorsque le paramètre est réel : ceci découle du résultat plus général suivant.

Théorème 2. *Soient S l'ensemble des parties finies de \mathbb{C} muni de la distance de Hausdorff, $a < b$ deux réels, $F : [a, b] \rightarrow S$ une application continue et $z_0 \in F(a)$. Alors il existe une sélection continue de F prenant la valeur z_0 en a , ie. une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \in F(t)$ et $f(a) = z_0$.*

La preuve se fait essentiellement en deux étapes. La première consiste à prouver le lemme fondamental suivant.

Lemme 1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sélection de F , prenant la valeur z_0 en a et ε -oscillante, ie. une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

- pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \in F(t)$,
- $f(a) = z_0$,
- pour tout $t \in [a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que $f([t - \eta, t + \eta]) \subset B(f(t), \varepsilon)$.

Commençons par montrer ce lemme. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction F étant continue sur le compact $[a, b]$, donc uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t, s \in [a, b]$, $|t - s| \leq \eta \Rightarrow d(F(t), F(s)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $0 \leq i \leq p = \lfloor \frac{b-a}{\eta} \rfloor$, on pose $a_i = a + i\eta$ et on définit ainsi une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p < a_{p+1} = b$ de $[a, b]$ de pas η . On définit alors la fonction f par récurrence sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ de la façon suivante :

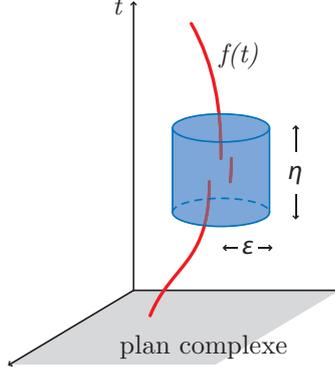


FIG. 3 – Une fonction ε -oscillante de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

(i) on pose $f(a_0) = z_0$,

(ii) supposons que $f(a_i)$ soit déjà construit. Alors pour tout $t \in]a_i, a_{i+1}[$, on a $|t - a_i| \leq \eta$, donc $d(F(t), F(a_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
On a donc $F(a_i) \subset V_{\frac{\varepsilon}{3}}(F(t))$, donc il existe $z_t \in F(t)$ tel que $f(a_i) \in B(z_t, \frac{\varepsilon}{3})$. On pose alors $f(t) = z_t$.

Montrons que la fonction ainsi construite convient. Par construction, c'est une sélection de F qui prend la valeur z_0 en a . Il faut montrer qu'elle est ε -oscillante. Soit $t \in [a, b]$ et $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $a_i \leq t < a_{i+1}$. On a alors,

- pour tout $s \in [a_{i-1}, a_i[$, $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(a_{i-1})| + |f(a_{i-1}) - f(s)| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$,
- pour tout $s \in [a_i, a_{i+1}[$, $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(s)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$,
- pour tout $s \in]a_{i+1}, a_{i+2}[$, $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(s)| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $s \in [t - \eta, t + \eta]$, $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$, ie. que f est ε -oscillante, ce qui termine la preuve du lemme.

Démontrons maintenant le théorème. On note $\Delta = \{a\} \cup ([a, b] \cap \mathbb{Q})$ qui est dense dans $[a, b]$ et dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n une sélection $\frac{1}{n}$ -oscillante de F telle que $f_n(a) = z_0$ (fournie par le lemme précédent). Pour chaque $t \in [a, b]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeur dans $F(t)$ qui est fini, donc elle admet une sous-suite stationnaire $(f_{\Psi_i(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$. Le procédé diagonal d'extraction assure l'existence d'une extraction $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $t \in \Delta$, $(f_{\Psi(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur $z_t \in F(t)$. On définit alors sur Δ la fonction f par $f(t) = z_t$, et le but de ce qui suit est de montrer que l'on peut prolonger f sur $[a, b]$ par densité en une fonction continue qui sera une sélection continue de F .

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un module d' ε -uniforme continuité pour f . Pour cela, considérons $t \in [a, b]$ et notons $F(t) = \{u_1, \dots, u_p\}$. On pose $r = \min_{i \neq j} |u_i - u_j|$ la distance minimale entre deux éléments de $F(t)$, $\rho = \min(\frac{r}{3}, \frac{\varepsilon}{2})$, et $N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \Psi(n) > \frac{2}{\rho}\}$. On note $D_i = B(u_i, \rho)$. Les D_i sont des disques centrés sur les éléments de $F(t)$ de rayon ρ , à distance supérieure à ρ les unes des autres, et leur union forme un ρ -voisinage de $F(t)$ (fig. 4).

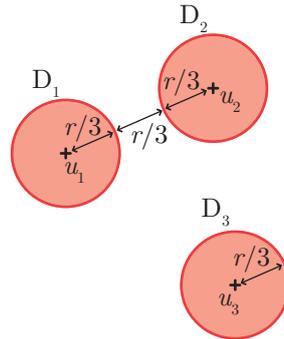


FIG. 4 – Les disques D_i

La continuité de F pour la distance de Hausdorff assure donc l'existence de $\eta_t > 0$ tel que $F(]t - \eta_t, t + \eta_t[) \subset \bigcup_{i=1}^p D_i$. Les disques D_i étant disjoints, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_t =]t - \eta_t, t + \eta_t[= \bigsqcup_{i=1}^p (V_t \cap f_{\Psi(n)}^{-1}(D_i))$. Or pour tout $i \leq p$ et tout $n \geq N$, les ensembles $V_t \cap f_{\Psi(n)}^{-1}(D_i)$ sont ouverts. En effet, si $y \in V_t \cap f_{\Psi(n)}^{-1}(D_i)$, et z est suffisamment proche de y , alors $z \in V_t$, et $f_{\Psi(n)}(z)$ est dans le même disque D_i que $f_{\Psi(n)}(y)$ (puisque le saut entre deux boules est plus grand que ρ et que la fonction $f_{\Psi(n)}$ est $\frac{1}{\Psi(n)}$ -oscillante, avec $\frac{1}{\Psi(n)} < \frac{\rho}{2}$). Par connexité de V_t , pour tout $n \geq N$, il existe donc $i_n \in \{1, \dots, p\}$ tel que $f_{\Psi(n)}(V_t) \subset D_{i_n}$.

Utilisons maintenant la densité de Δ . Le voisinage V_t étant ouvert, il existe $s \in V_t \cap \Delta$. L'extraction Ψ a été choisie en particulier de sorte que la suite $(f_{\Psi(n)}(s))_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $f_{\Psi(n)}(s) = f_{\psi(M)}(s)$. On en déduit que pour tout $n \geq \max(N, M)$, $f_{\Psi(n)}(V_t) \subset D_{i_{\max(N, M)}}$.

Ainsi, pour tous $u, v \in V_t \cap \Delta$, $f(u)$ et $f(v)$ sont situés dans le même disque $D_{i_{\max(N, M)}}$, donc $|f(u) - f(v)| \leq 2\rho \leq \varepsilon$. Or $\bigcup_{t \in [a, b]} V_t$ est un recouvrement ouvert de $[a, b]$, pour lequel il existe un *nombre de Lebesgue*, ie. un réel $\eta > 0$ tel que toute boule de rayon η est contenu dans l'un des V_t . Ce nombre η est le module d' ε -uniforme continuité recherché. On en déduit que f est uniformément continue sur Δ . On note \tilde{f} son prolongement par densité à $[a, b]$.

Montrons que la fonction \tilde{f} ainsi construite satisfait nos conditions :

- (i) on a clairement $\tilde{f}(a) = f(a) = z_0$.
- (ii) \tilde{f} est continue par construction.
- (iii) pour tout $t \in [a, b]$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Δ telle que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$. On a alors $f(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$ et $F(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(t)$, d'où $f(t) \in F(t)$, par définition de la distance de Hausdorff. La fonction f est donc bien une sélection de F .

6 Topologie des matrices

Pour terminer, nous présentons quelques résultats sur la topologie des matrices diagonalisables. On note $M_n(\mathbb{C})$ (resp. $M_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes (resp. réels). La proposition suivante est bien connue :

Proposition 3. *L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$*

La preuve consiste juste à choisir une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque, à la trigonaliser et à perturber légèrement ses coefficients diagonaux pour les rendre tous distincts. On obtient ainsi une matrice diagonalisable arbitrairement proche de A .

On s'intéresse maintenant au cas des matrices réelles :

Proposition 4. *Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.*

Comme précédemment, en perturbant légèrement les éléments diagonaux d'une matrice triangulée, on obtient une matrice diagonalisable arbitrairement proche. Il suffit donc de montrer la réciproque : soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrons que cette matrice est trigonalisable. On note

$$\chi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & F_n \\ A & \longmapsto & \chi(A) = \det(XI_n - A). \end{array}$$

Cette application est continue car polynomiale. Par conséquent, l'application $\Phi \circ \chi$ est continue. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Phi \circ \chi(A_p) \in \mathbb{R}^n / \mathfrak{S}_n$ (ie. le polynôme caractéristique de A_p est scindé). L'espace $\mathbb{R}^n / \mathfrak{S}_n$ étant un sous-espace fermé de $\mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$, on obtient que $\Phi \circ \chi(A) \in \mathbb{R}^n / \mathfrak{S}_n$, et donc A est trigonalisable.

7 Questions et remarques

7.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. sur les distances considérées dans le texte :
 - (a) montrer que la distance de Hausdorff définit une distance sur l'ensemble des parties compactes de \mathbb{C} .
 - (b) étudier la complétude de S pour la distance de Hausdorff.
 - (c) montrer que la pseudo-distance δ passe au quotient sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n et définit une distance sur le quotient $\mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$.
2. sur le problème de sélection des racines :
 - (a) soit K un espace métrique compact et $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de K . Montrer l'existence d'un *nombre de Lebesgue* pour ce recouvrement, ie. d'un réel $\eta > 0$ tel que toute boule de rayon η est contenue dans l'un des ouverts U_i .

- (b) montrer comment passer d'une sélection continue de F sur un intervalle $[a, b]$ (que l'on prouve dans le théorème 2) à une sélection continue de F sur \mathbb{R} tout entier.
 - (c) que peut-on dire sur la continuité (resp. la sélection continue) de racines réelles de polynômes?
3. sur la topologie des matrices :
- (a) donner une preuve directe de la proposition 4, ie. sans utiliser la continuité de l'application Φ . On pourra par exemple montrer que l'ensemble des valeurs propres de toutes les matrices A_p ($p \in \mathbb{N}$) est borné, et effectuer une extraction diagonale pour s'assurer de la convergence d'une première valeur propre, puis d'une deuxième, etc.
 - (b) dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.
 - (c) dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'une matrice est une homothétie si et seulement si sa classe de similitude est bornée.

7.2 Remarques et références

Ce texte est tiré de l'article de M. WIRTH, sur la *Continuité des racines d'un polynôme comme fonctions de ses coefficients*, paru dans la RMS (1987-1988, p100). Cet article répond de manière claire à cette question de continuité des racines, récurrente pendant la préparation à l'agrégation. Le tome d'analyse des *Maths en tête* de X. GOURDON et les *Exercices d'algèbre pour l'agrégation* de S. FRANCINO & H. GIANELA constituent des références complémentaires.

Les multiples facettes des preuves présentées dans ce texte permettent de le présenter comme une application dans les leçons d'agrégation suivantes :

- RACINES DE POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE. RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS ET RACINES
La continuité des racines en fonction des coefficients est un sujet central dans cette leçon. On utilise en outre des techniques issues de cette leçon (polynômes symétriques élémentaires, localisation des racines,...).
- POLYNÔMES SYMÉTRIQUES
À présenter comme un exemple d'utilisation des polynômes symétriques élémentaires, au même titre que les relations racines/coefficients.
- EXEMPLES DE PARTIES DENSES
On utilise de manière cruciale la densité de Δ : une première fois dans la preuve du fait que l'image par $f_{\Phi(n)}$ de V_t est contenue dans un disque donné pour tout $n \geq \max(M, N)$, et une seconde fois pour prolonger par densité.
- UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACTITÉ
La distance de Hausdorff est une distance sur les parties compactes non vides. Par ailleurs, la caractérisation et l'utilisation des applications propres est un bon exemple dans cette leçon. On se sert enfin de la compacité de $[a, b]$ dans la preuve du théorème 2 d'une part pour appliquer le théorème de Heine (dans la preuve du lemme), et d'autre part pour l'existence du nombre de Lebesgue du recouvrement ouvert $\bigcup_{t \in [a, b]} V_t$.
- CONNEXITÉ
C'est un ingrédient de la preuve, qui peut être présentée comme un exemple d'utilisation.
- PROLONGEMENT DE FONCTIONS
On utilise un prolongement par densité. Ce théorème peut servir d'alternative au classique théorème de Plancherel.
- UTILISATION DE LA CONTINUITÉ UNIFORME
On utilise la continuité uniforme à deux moments dans la preuve du théorème 2 : d'une part dans la preuve du lemme, avec le théorème de Heine, et d'autre part lors du prolongement par densité.