

Arbres couvrants & théorie algébrique des graphes

Vincent Pilaud

2006

1 Introduction

On considère un *graphe* $G = (S, A)$, où S est l'ensemble des *sommets* de G et $A \subset \binom{S}{2}$ l'ensemble de ses *arêtes*. On suppose que le graphe G est *connexe*, ie. que toute paire $\{s, t\}$ de sommets de S peut être reliée par un chemin d'arêtes $\{s, r_1\}, \{r_1, r_2\}, \dots, \{r_p, t\}$ de A .

On appelle *graphe couvrant* de G tout graphe dont l'ensemble des sommets est S , dont l'ensemble des arêtes est contenu dans A et qui est connexe. Dans ce texte, on s'intéresse aux arbres couvrants minimaux pour deux ordres distincts :

- (i) dans un premier temps (§ 2), simplement pour l'ordre de l'inclusion des arêtes.
- (ii) ensuite (§ 3), pour une notion de poids définie sur le graphe G .

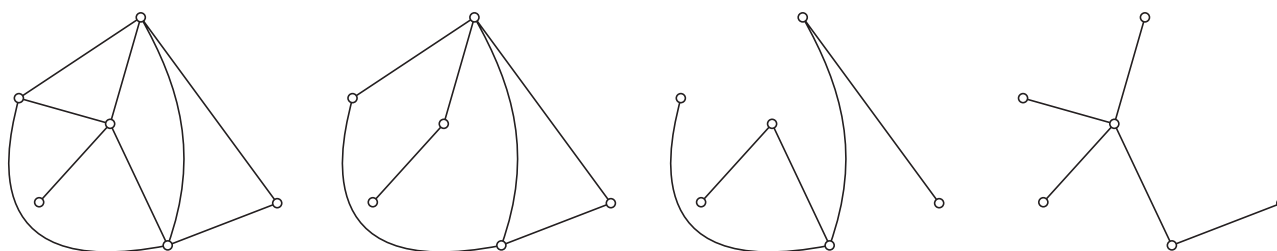


FIG. 1 – Exemples : (a) un graphe G , (b) un graphe couvrant de G , (c) un graphe couvrant minimal pour l'inclusion, (d) un graphe couvrant minimal pour la longueur des arêtes

2 Différentes manières de dénombrer

On s'intéresse ici aux graphes couvrants minimaux pour l'inclusion. Par définition, ces graphes sont connexes, et il est assez clair qu'ils sont sans cycles (de tout cycle, on peut supprimer une arête sans déconnecter le graphe) : ce sont donc des *arbres couvrants*. Notons réciproquement que tout arbre couvrant est un graphe couvrant minimal pour l'inclusion (puisque retirer une arête d'un arbre le déconnecte). On présente ici différentes méthodes pour compter le nombre $\text{Couv}(G)$ d'arbres couvrants d'un graphe G : d'abord en exhibant des bijections explicites (§ 2.1), puis grâce au Matrix-tree theorem (§ 2.2), que l'on applique ensuite aux graphes réguliers (§ 4b), et enfin avec le polynôme de Tutte (§ 2.4).

2.1 Quelques exemples

Définissons d'abord trois familles particulières de graphes :

Définition 1. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *graphe complet à p sommets* le graphe K_p dont l'ensemble des sommets est $\{s_1, \dots, s_p\}$ et l'ensemble des arêtes $\{\{s_i, s_j\} \mid 1 \leq i < j \leq p\}$ (fig. 2).

On appelle *graphe bipartite complet à (p, q) sommets* le graphe $K_{p,q}$ dont l'ensemble des sommets est $\{s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q\}$ et l'ensemble des arêtes $\{\{s_i, t_j\} \mid 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q\}$ (fig. 2).

On appelle *graphe cyclique à p sommets* le graphe C_p dont l'ensemble des sommets est $\{s_1, \dots, s_p\}$ et l'ensemble des arêtes $\{\{s_i, s_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{\{s_1, s_p\}\}$ (fig. 2).

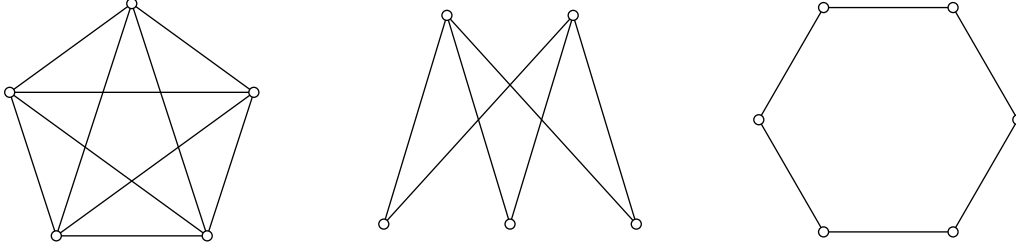


FIG. 2 – Les graphes K_5 , $K_{3,2}$ et C_6

Dans toute la suite, nous allons étudier les arbres couvrants de ces graphes. Commençons par donner deux bijections permettant de déterminer le nombre d'arbres couvrants de C_p et de K_p .

GRAPHE CYCLIQUE. Choisir un arbre couvrant A du graphe cyclique C_p revient à choisir l'arête de C_p qui n'est pas dans A . Le nombre d'arbres couvrants de C_p est donc le nombre d'arêtes de C_p , soit p .

GRAPHE COMPLET. La situation du graphe complet est un peu plus compliquée. Le nombre $\text{Couv}(K_p)$ d'arbres couvrants du graphe complet à p sommets est clairement le nombre d'arbres à p sommets (distingués). Il existe diverses bijections permettant de déterminer ce nombre. Nous en présentons une ici, et nous en proposons une autre dans les questions (§ 4).

Proposition 1. *Le nombre $\text{Couv}(K_p)$ d'arbres couvrants du graphe complet à p sommets est p^{p-2} .*

Étant donné un arbre couvrant A de K_p et un couple $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, on appelle *arbre doublement enraciné* l'arbre A dans lequel on a marqué le sommet s_i en vert et le sommet s_j en rouge. L'unique chemin entre s_i et s_j est appelé la *ligne marquée*. Le nombre d'arbres doublement enracinés est clairement $p^2 \text{Couv}(C_p)$. Nous allons montrer par ailleurs qu'il vaut p^p en exhibant une bijection avec l'ensemble des applications de $\{1, \dots, p\}$ dans lui-même.

Considérons une application f de $\{1, \dots, p\}$ dans lui-même. Notons $C = \{x \in \{1, \dots, p\} \mid \exists i \in \mathbb{N}, f^i(x) = x\}$, et $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ les éléments de C dans l'ordre croissant. Soit $d_i = f(c_i)$. On considère le graphe doublement enraciné H dont

- (i) l'ensemble des sommets est $\{s_1, \dots, s_p\}$,
- (ii) l'ensemble des arêtes est $\{\{s_{d_i}, s_{d_{i+1}}\} \mid i \in \{1, \dots, k-1\}\} \cup \{\{s_j, s_{f(j)}\} \mid j \notin C\}$,
- (iii) le sommet vert est s_{d_1} et le sommet rouge s_{d_k} .

Il est clair que ce graphe est connexe (puisque tout sommet est relié à la ligne marquée) et sans cycle (puisque les seuls cycles engendrés par f sont à support dans C , et C correspond à une ligne dans H). Il s'agit donc bien d'un arbre couvrant. Par ailleurs, il est doublement enraciné.

Montrons maintenant que nous venons de construire une bijection. Considérons un arbre couvrant doublement enraciné H et montrons qu'il est l'image d'une unique application f de $\{1, \dots, p\}$ dans lui-même. Or l'image d'un élément j de $\{1, \dots, p\}$ est donnée par :

- (i) si s_j est un sommet qui n'est pas sur la ligne marquée, $f(j)$ est donné par le premier sommet sur le chemin reliant s_j à la ligne marquée,
- (ii) si j est le ℓ -ième plus petit indice sur la ligne marquée, alors $f(j)$ est le ℓ -ième sommet sur la ligne marquée.

Ceci termine la preuve.

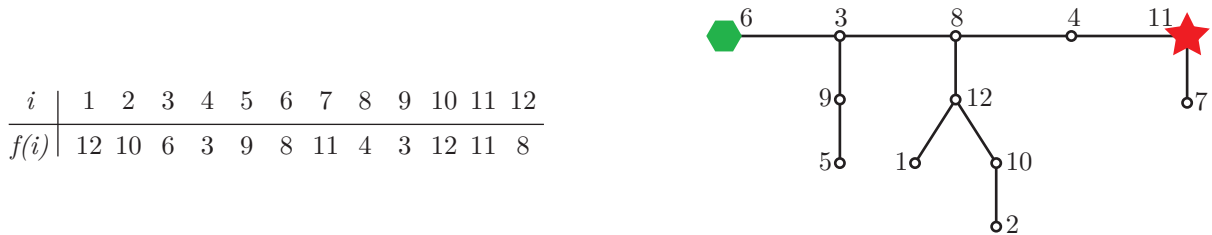


FIG. 3 – Une application de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même et son arbre doublement enraciné correspondant

2.2 Matrix-tree theorem

Soient λ, μ deux entiers et \mathbb{A} un anneau. On note $M_{\lambda\mu}(\mathbb{A})$ l'ensemble des matrices de taille $\lambda \times \mu$ à coefficients dans \mathbb{A} . Pour toute matrice $P \in M_{\lambda\mu}(\mathbb{A})$, on note P_1, \dots, P_μ les vecteurs colonnes de P , et si $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \lambda$ et $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq \mu$, on note

$$P \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

la matrice extraite de P dont on n'a gardé que les lignes i_1, i_2, \dots, i_m et les colonnes j_1, j_2, \dots, j_n . Lorsque $\lambda = \mu$, on note simplement $M_\lambda(\mathbb{A}) = M_{\lambda\lambda}(\mathbb{A})$, et pour toute matrice $P \in M_\lambda(\mathbb{A})$, on note $|P|$ son déterminant.

On aura besoin dans la suite de la formule de Binet-Cauchy :

Proposition 2 (Formule de Binet-Cauchy). *Soient $\lambda, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{N}$, avec $\gamma \leq \min(\lambda, \nu)$. Soient $P \in M_{\lambda\mu}(\mathbb{A})$ et $Q \in M_{\mu\nu}(\mathbb{A})$. Enfin, soient $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\gamma \leq \lambda$ et $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\gamma \leq \nu$. Alors*

$$\left| (PQ) \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\gamma \\ k_1 & \dots & k_\gamma \end{pmatrix} \right| = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\gamma \leq \mu} \left| P \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\gamma \\ j_1 & \dots & j_\gamma \end{pmatrix} \right| \left| Q \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_\gamma \\ k_1 & \dots & k_\gamma \end{pmatrix} \right|.$$

Notons d'abord que si $\mu < \gamma$, les deux termes de l'égalité sont nuls. On peut donc supposer que $\mu \geq \gamma$. Par ailleurs, comme seules les lignes i_1, \dots, i_γ de P (resp. les colonnes k_1, \dots, k_γ de Q) interviennent dans les deux termes de la formule, on peut supposer que $\lambda = \gamma$ (resp. $\nu = \gamma$). On a donc $P \in M_{\gamma\mu}(\mathbb{A})$ et $Q \in M_{\mu\gamma}(\mathbb{A})$ et on veut calculer le déterminant de PQ . Pour cela, on utilise la multilinéarité du déterminant :

$$\begin{aligned} |PQ| &= |[(PQ)_1, (PQ)_2, \dots, (PQ)_\gamma]| \\ &= \left| \left[\sum_{j_1=1}^{\mu} P_{j_1} q_{j_1,1}, \sum_{j_2=1}^{\mu} P_{j_2} q_{j_2,2}, \dots, \sum_{j_\gamma=1}^{\mu} P_{j_\gamma} q_{j_\gamma,\gamma} \right] \right| \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\gamma \leq \mu} q_{j_1,1} q_{j_2,2} \dots q_{j_\gamma,\gamma} |[P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_\gamma}]| \end{aligned}$$

Notons que $[P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_\gamma}]$ est nul si l'application $i \mapsto j_i$ n'est pas injective. Dans le cas contraire, si on note σ la permutation de \mathfrak{S}_γ telle que les $k_i = j_{\sigma(i)}$ sont dans l'ordre croissant, le déterminant $[P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_\gamma}]$ vaut $\varepsilon(\sigma) \left| P \begin{pmatrix} 1 & \dots & \gamma \\ k_1 & \dots & k_\gamma \end{pmatrix} \right|$. On en déduit que

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq \mu} \left| P \begin{pmatrix} 1 & \dots & \gamma \\ k_1 & \dots & k_\gamma \end{pmatrix} \right| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\gamma} q_{k_1, \sigma(1)} q_{k_2, \sigma(2)} \dots q_{k_\gamma, \sigma(\gamma)} \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq \mu} \left| P \begin{pmatrix} 1 & \dots & \gamma \\ k_1 & \dots & k_\gamma \end{pmatrix} \right| \left| Q \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_\gamma \\ 1 & \dots & \gamma \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Revenons maintenant au sujet des graphes. Étant donné un graphe $G = (S, A)$, on choisit une orientation arbitraire de ses arêtes (ie. pour chaque arête a , l'une des extrémités est désignée comme l'*origine* et l'autre comme le *but* de a).

Définition 2. *On appelle*

(i) *matrice d'incidence de G la matrice $I_G = [i_{s,a}]_{\substack{s \in S \\ a \in A}} \in M_{|S|, |A|}(\mathbb{A})$ où pour tout $(s, a) \in S \times A$,*

$$i_{s,a} = \begin{cases} -1 & \text{si } s \text{ est l'origine de } a, \\ 1 & \text{si } s \text{ est le but de } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *matrice d'adjacence de G la matrice $A_G = [a_{s,t}]_{(s,t) \in S^2} \in M_{|S|}(\mathbb{A})$ où pour tout $(s, t) \in S^2$,*

$$a_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ et } t \text{ sont adjacents (ie. relié par une arête),} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(iii) matrice des degrés de G la matrice $D_G = [d_{s,t}]_{(s,t) \in S^2} \in M_{|S|}(\mathbb{A})$ où pour tout $(s, t) \in S^2$,

$$d_{s,t} = \begin{cases} \deg(s) & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(où $\deg(s)$ désigne le degré de s , ie le cardinal de l'ensemble $\{a \in A \mid s \in a\}$).

(iv) matrice Laplacienne de G la matrice $L_G = [\ell_{s,t}]_{(s,t) \in S^2} \in M_{|S|}(\mathbb{A})$ où pour tout $(s, t) \in S^2$,

$$\ell_{s,t} = \begin{cases} \deg(s) & \text{si } s = t, \\ -1 & \text{si } s \text{ et } t \text{ sont adjacents,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(où $\deg(s)$ désigne le degré de s , ie le cardinal de l'ensemble $\{a \in A \mid s \in a\}$).

Un calcul matriciel simple montre le lemme suivant

Lemme 1. Pour tout graphe G et toute orientation de ses arêtes, les matrices précédentes vérifient

$$I_G^t I_G = L_G = D_G - A_G.$$

Avec tous ces outils, on peut démontrer le théorème suivant, qui permet de compter le nombre d'arbres couvrants d'un graphe à partir de sa matrice Laplacienne :

Théorème 1 (Matrix-tree theorem). Soit G un graphe connexe. Le nombre $\text{Couv}(G)$ d'arbres couvrants de G est donné par le déterminant d'un (quelconque) mineur principal de taille $n - 1$ de sa matrice Laplacienne.

Soit $s \in S$. On note

$$L_s = L_G \begin{pmatrix} 1 \dots (s-1)(s+1) \dots |S| \\ 1 \dots (s-1)(s+1) \dots |S| \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_s = I_G \begin{pmatrix} 1 \dots (s-1)(s+1) \dots |S| \\ 1 \dots |A| \end{pmatrix}.$$

La formule de Binet-Cauchy affirme que

$$|L_s| = \sum_{\substack{N \text{ sous-matrice} \\ (n-1) \times (n-1) \text{ de } I_s}} |N|^t |N| = \sum_{\substack{N \text{ sous-matrice} \\ (n-1) \times (n-1) \text{ de } I_s}} |N|^2.$$

Or chaque sous-matrice N de I_s de taille $(n-1) \times (n-1)$ correspond à un sous-graphe $\phi(N)$ de G ayant $n-1$ arêtes : on conserve les arêtes correspondant aux colonnes de N . Et il se trouve que $|N|^2$ vaut 1 si $\phi(N)$ est un arbre couvrant et 0 sinon : en effet,

- (i) si $\phi(N)$ n'est pas couvrant, il existe un sommet $r \in S$ qui n'est pas relié à s dans $\phi(N)$. Soit R la composante connexe de r dans $\phi(N)$. Alors la somme des lignes correspondantes à R dans la matrice N est nulle. Par conséquent, le déterminant de N est nul.
- (ii) inversement, si le sous-graphe $\phi(N)$ est couvrant, c'est un arbre couvrant. Il existe au moins deux sommets de degré 1 dans cet arbre, donc au moins un sommet de degré 1 distinct de s . On le note s_1 . On note a_1 l'unique arête qui est adjacente à s_1 . En supprimant le sommet s_1 et l'arête a_1 , on obtient un nouvel arbre, et on peut recommencer le même procédé jusqu'à ce que l'arbre ne contienne plus que s . Il suffit alors de remarquer que dans les bases s_1, \dots, s_{n-1} et a_1, \dots, a_{n-1} , la matrice N devient triangulaire supérieure avec des ± 1 sur la diagonale. Par conséquent, $|N| = \pm 1$ et $|N|^2 = 1$.

On obtient donc

$$|L_s| = \sum_{\substack{N \text{ sous-matrice} \\ (n-1) \times (n-1) \text{ de } I_s}} |N|^2 = \text{Couv}(G).$$

Appliquons ce théorème à chacun des graphes considérés au paragraphe 2.1 : nous allons calculer le déterminant d'un mineur de la matrice Laplacienne de chacun de ces graphes. Nous aurons besoin à plusieurs reprises du résultat classique suivant, qui se démontre simplement par récurrence :

Lemme 2 (Matrice tridiagonale). Soit $n \geq 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\text{si on note } M_{a,b,n} = \begin{pmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 2a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -a & 0 \\ \vdots & \ddots & -a & 2a & -a \\ 0 & \dots & 0 & -a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \text{ on a } |M_{a,b,n}| = a^{n-1}(nb - (n-1)a)$$

GRAPHE CYCLIQUE. La matrice Laplacienne du graphe cyclique à p sommets est donnée par

$$M_{C_p} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$$

Le Matrix-tree theorem affirme donc que le nombre $\text{Couv}(C_p)$ d'arbres couvrants de C_p est donné par

$$\text{Couv}(C_p) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right| = |M_{1,2,p-1}| = \boxed{p}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

GRAPHE COMPLET. La matrice Laplacienne du graphe complet à p sommets est donnée par

$$M_{K_p} = \begin{pmatrix} p-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & p-1 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$$

Le Matrix-tree theorem affirme que le nombre $\text{Couv}(K_p)$ d'arbres couvrants de K_p est donné par

$$\begin{aligned} \text{Couv}(K_p) &= \left| \begin{matrix} \overbrace{\begin{pmatrix} p-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & p-1 \end{pmatrix}}^{\in M_{p-1}(\mathbb{R})} \\ \end{matrix} \right|_{L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}} \\ &= \left| \begin{pmatrix} p & -p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p & -p \\ -1 & \dots & \dots & -1 & p-1 \end{pmatrix} \right|_{\forall i=1 \dots p-2} \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2p & -p & 0 & \dots & 0 \\ -p & 2p & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -p & 0 \\ \vdots & \ddots & -p & 2p & -p \\ 0 & \dots & 0 & -p & p-1 \end{pmatrix} \right|_{\substack{C_i \leftarrow C_i - C_{i+1} \\ \forall i=1 \dots p-2}} = |M_{p,p-1,p-1}| = \boxed{p^{p-2}} \end{aligned}$$

Là encore, c'est le résultat que l'on attendait.

GRAPHE BIPARTITE COMPLET. La matrice Laplacienne du graphe bipartite complet à (p, q) sommets est donnée par

$$M_{K_p} = \begin{pmatrix} q & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & p \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$$

Appliquons le Matrix-tree theorem et calculons le déterminant d'un mineur principal (les places libres dans les matrices suivantes sont à compléter par des 0)

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\left(\begin{array}{cccccc} q & & -1 & \dots & \dots & -1 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots \\ & & & & q & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & p & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \ddots & & \\ -1 & \dots & \dots & -1 & & & & & p \end{array} \right)}_{\in M_{p+q-1}(\mathbb{R})} & \stackrel{\substack{L_i \leftarrow L_i - L_{i-1} \\ \forall i=2 \dots p-1}}{=} & \left(\begin{array}{cccccc} q & & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -q & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -q & q & & & & \\ & & & & p & -p & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & -p & \\ -1 & \dots & \dots & -1 & & & & & p \end{array} \right) & \stackrel{\substack{C_i \leftarrow C_i - L_{i-1} \\ \forall i=2 \dots p-1}}{=} & \left(\begin{array}{cccccc} q & -q & & & & & & & -1 \\ -q & 2q & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & -q & & & & & \\ & & & -q & 2q & & & & \\ & & & & & 2p & -p & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & -p & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots & 2p & -p \\ -1 & & & & & & & & & & -p & p \end{array} \right) \\
& \stackrel{\substack{\text{développement} \\ = \\ \text{colonne 1}}}{=} & q |M_{q,2q,p-2}| |M_{p,p,q}| + q & \left(\begin{array}{cccccc} -q & & & & & -1 \\ -q & 2q & -q & & & \\ & \ddots & \ddots & -q & & \\ & & & -q & 2q & & & & \\ & & & & & 2p & -p & & \\ & & & & & & -p & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & 2p & -p \\ & & & & & & & & -p & p \end{array} \right) & + (-1)^{p+q+1} & \left(\begin{array}{cccccc} -q & & & & & -1 \\ 2q & \ddots & & & & \\ -q & \ddots & -q & & & \\ & & -q & 2q & & \\ & & & & 2p & -p \\ & & & & & -p & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & -p & 2p & -p \end{array} \right) \\
& = & q |M_{q,2q,p-2}| |M_{p,p,q}| - q^2 |M_{q,2q,p-3}| |M_{p,p,q}| - |M_{q,2q,p-2}| |M_{p,2p,q-1}| & = & \boxed{p^{q-1} q^{p-1}}
\end{aligned}$$

2.3 Étude des graphes réguliers

Soit k un entier. On dit qu'un graphe est k -régulier lorsque le degré de chacun de ses sommets est k . On appelle *spectre d'adjacence* d'un graphe les valeurs propres de sa matrice d'adjacence. Après avoir donné quelques propriétés du spectre d'adjacence d'un graphe k -régulier G , nous allons montrer que le nombre $\text{Couv}(G)$ d'arbres couvrants de G est relié à ce spectre.

Proposition 3. *Soit G un graphe k -régulier à p sommets, et $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_p$ son spectre d'adjacence (avec multiplicités). Alors*

1. $\alpha_1 = k$ et $\alpha_p \geq -k$,
2. la multiplicité de k est égale au nombre de composantes connexes de G .

Tout vecteur constant non nul est clairement un vecteur propre de A_G associé à la valeur propre k (car G est k -régulier), donc pour montrer le premier point, il suffit de montrer que pour toute valeur propre λ de A_G , $|\lambda| \leq k$. Considérons donc $v = (v_s)_{s \in S}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A_G . Soit $t \in S$ tel que $|v_t| = \max_{s \in S} |v_s|$. Quitte à remplacer v par $-v$, on peut supposer que $v_t > 0$. On a alors

$$|\lambda|v_t = |\lambda v_t| = \left| \sum_{s \in S} a_{t,s} v_s \right| \leq \sum_{s \in S} a_{t,s} |v_s| \leq k v_t,$$

d'où le résultat.

Passons au second point. Soit $T \subset S$ une composante connexe de G . Soient $v = (v_s)_{s \in S}$ un vecteur propre associé à la valeur propre k et $t \in T$ tel que $|v_t| = \max_{s \in T} |v_s|$. Alors comme précédemment, on a

$$k v_t = \sum_{s \in S} a_{t,s} v_s = \sum_{s \in T} a_{t,s} v_s \leq k v_t$$

et l'égalité n'est obtenue que si $v_s = v_t$ pour tous les voisins s de t . On en déduit que v est constant sur la composante connexe U . Par conséquent, le sous-espace propre de A_G associé à la valeur propre k est engendré par les vecteurs caractéristiques des composantes connexes de G . Autrement dit, la multiplicité de k est donnée par le nombre de composantes connexes de G .

Théorème 2 (Matrix-tree theorem, version spectrale). *Soit G un graphe connexe k -régulier à p sommets et $k = \alpha_1 > \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p$ son spectre d'adjacence. Alors le nombre d'arbres couvrants de G est donné par*

$$\text{Couv}(G) = \frac{1}{p} \prod_{i=2}^p (k - \alpha_i)$$

Commençons par démontrer le résultat d'algèbre linéaire suivant :

Lemme 3. *Soit $M \in M_p(\mathbb{A})$ une matrice dont la somme de toutes les lignes et de toutes les colonnes est nulle, et N la matrice extraite de M en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Alors le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de M est $-p|N|$.*

Il s'agit uniquement d'un calcul matriciel :

$$|M - XI_p| \begin{matrix} L_p \leftarrow \sum_{i=1..p} L_i \\ = \\ C_p \leftarrow \sum_{i=1..p} C_i \end{matrix} \left| \begin{pmatrix} & & -X \\ & N - XI_{p-1} & \vdots \\ -X & \dots & -X & -pX \end{pmatrix} \right| = -X \left| \begin{pmatrix} & & -X \\ & N - XI_{p-1} & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & p \end{pmatrix} \right|$$

En développant suivant la dernière ligne, on en déduit que le coefficient de X dans $|M - XI_p|$ est $-p|N|$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2 : le théorème Matrix-tree démontré précédemment et ce lemme permettent d'affirmer que

$$\text{Couv}(G) = -\frac{1}{p} \text{coeff}_X(\chi_{L_G}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \prod_{j \neq i} \mu_j$$

où $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_p$ désigne le spectre de L_G . Or il se trouve que pour tout $i \leq p$, on a $\mu_i = k - \alpha_i$. En particulier, $\mu_1 = 0$ et on obtient $\text{Couv}(G) = \frac{1}{p} \prod_{i=2}^p (k - \alpha_i)$.

Appliquons ce résultat pour obtenir plus rapidement le nombre d'arbres à p sommets. On a $A_{K_p} + I_p = J_p$ (où $J_p \in M_p(\mathbb{R})$ désigne la matrice dont toutes les entrées valent 1). La matrice J_p est de rang 1 et de trace p , donc ses valeurs propres sont $p, 0, \dots, 0$. On en déduit que les valeurs propres de A_{K_p} sont $p-1, -1, \dots, -1$ et donc que $\text{Couv}(K_p) = p^{p-2}$.

2.4 Polynôme de Tutte

Soit $G = (S, A)$ un graphe (on autorise le graphe à avoir des boucles et plusieurs arêtes pour une même paire de points), et a une arête de G . On notera

- (i) $G - a$ le graphe où l'on a *supprimé* l'arête a , ie. dont l'ensemble des sommets est S et le multiensemble des arêtes est $A \setminus \{a\}$,
- (ii) G/a le graphe où l'on a *écrasé* l'arête a , ie. dont l'ensemble des sommets est S/a et le multiensemble des arêtes est $\{\{\pi(s), \pi(t)\} \mid \{s, t\} \in A \setminus \{a\}\}$ (où $\pi : S \rightarrow S/a$ désigne la projection canonique).

On note $\kappa(G)$ le nombre de composantes connexes de G .

Définition 3. *Soit $G = (S, A)$ un graphe et $a \in A$. On dit que a est une boucle si ses deux extrémités sont identiques et un isthme si $\kappa(G - a) = \kappa(G) + 1$. On appelle polynôme de Tutte le polynôme $T_G(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ défini par induction :*

- (i) $T_{(S, \emptyset)}(X, Y) = 1$,
- (ii) $T_G(X, Y) = XT_{G/a}(X, Y)$ si $a \in A$ est un isthme,
- (iii) $T_G(X, Y) = YT_{G-a}(X, Y)$ si $a \in A$ est une boucle,
- (iv) $T_G(X, Y) = T_{G/a}(X, Y) + T_{G-a}(X, Y)$ si $a \in A$ n'est ni un isthme, ni une boucle.

Nous allons d'abord montrer que le polynôme de Tutte est bien défini, c'est-à-dire que le résultat obtenu par la définition précédente ne dépend pas de l'ordre dans lequel on traite les arêtes. Pour ceci, on donne une formule pour le polynôme de Tutte qui ne dépend que du graphe G .

Soit $B \subset A$. On note par abus $\kappa(B) = \kappa((S, B))$ le nombre de composantes connexes du graphe restreint à B . On note $\text{rg}(B) = |S| - \kappa(B)$ et $n(B) = |B| - \text{rg}(B) = |B| - |S| + \kappa(B)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 4. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Alors

$$T_G(X, Y) = \sum_{B \subset A} (X-1)^{\text{rg}(A) - \text{rg}(B)} (Y-1)^{n(B)}.$$

On montre cette égalité par induction :

- (i) Pour $G = (S, \emptyset)$, le seul ensemble inclus dans A est \emptyset , et on a $\text{rg}(\emptyset) = 0$ et $n(\emptyset) = 0$. L'égalité est donc vérifiée.
- (ii) Si $a \in A$ est une boucle, et $B \subset A$, et si on note $\tilde{B} = B \setminus \{a\}$, $\tilde{\text{rg}} = \text{rg}_{G-a}$, et $\tilde{n} = n_{G-a}$, on a
 - si $a \in B$, $\text{rg}(B) = \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})$ et $n(B) = \tilde{n}(\tilde{B}) + 1$,
 - si $a \notin B$, $\text{rg}(B) = \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})$ et $n(B) = \tilde{n}(\tilde{B})$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{B \subset A} (X-1)^{\text{rg}(A) - \text{rg}(B)} (Y-1)^{n(B)} &= \sum_{a \in B \subset A} (X-1)^{\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\tilde{n}(\tilde{B}) + 1} + \sum_{a \notin B \subset A} (X-1)^{\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\tilde{n}(\tilde{B})} \\ &= Y \sum_{\tilde{B} \subset \tilde{A}} (X-1)^{(\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) + 1) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\tilde{n}(\tilde{B})} = Y T_{G-a}(X, Y) = T_G(X, Y) \end{aligned}$$

- (iii) Si $a \in A$ est un isthme, et $B \subset A$, et si on note $\tilde{B} = B \setminus \{a\}$, $\check{\text{rg}} = \text{rg}_{G/a}$, et $\check{n} = n_{G/a}$, on a
 - si $a \in B$, $\text{rg}(B) = \check{\text{rg}}(\tilde{B}) + 1$ et $n(B) = \check{n}(\tilde{B})$,
 - si $a \notin B$, $\text{rg}(B) = \check{\text{rg}}(\tilde{B})$ et $n(B) = \check{n}(\tilde{B})$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{B \subset A} (X-1)^{\text{rg}(A) - \text{rg}(B)} (Y-1)^{n(B)} &= \sum_{a \in B \subset A} (X-1)^{(\check{\text{rg}}(\tilde{A}) + 1) - (\check{\text{rg}}(\tilde{B}) + 1)} (Y-1)^{\check{n}(\tilde{B})} + \sum_{a \notin B \subset A} (X-1)^{(\check{\text{rg}}(\tilde{A}) + 1) - \check{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\check{n}(\tilde{B})} \\ &= X \sum_{\tilde{B} \subset \tilde{A}} (X-1)^{(\check{\text{rg}}(\tilde{A}) + 1) - \check{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\check{n}(\tilde{B})} = X T_{G/a}(X, Y) = T_G(X, Y) \end{aligned}$$

- (iv) Si $a \in A$ n'est ni une boucle, ni un isthme, et $B \subset A$, et si on note $\tilde{B} = B \setminus \{a\}$, $\tilde{\text{rg}} = \text{rg}_{G-a}$, $\check{\text{rg}} = \text{rg}_{G/a}$, $\tilde{n} = n_{G-a}$ et $\check{n} = n_{G/a}$, on a
 - si $a \in B$, $\text{rg}(B) = \tilde{\text{rg}}(\tilde{B}) + 1$ et $n(B) = \check{n}(\tilde{B})$,
 - si $a \notin B$, $\text{rg}(B) = \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})$ et $n(B) = \tilde{n}(\tilde{B})$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{B \subset A} (X-1)^{\text{rg}(A) - \text{rg}(B)} (Y-1)^{n(B)} &= \sum_{a \in B \subset A} (X-1)^{(\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) + 1) - (\tilde{\text{rg}}(\tilde{B}) + 1)} (Y-1)^{\check{n}(\tilde{B})} + \sum_{a \notin B \subset A} (X-1)^{\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\tilde{n}(\tilde{B})} \\ &= \sum_{\tilde{B} \subset \tilde{A}} (X-1)^{\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\check{n}(\tilde{B})} + \sum_{\tilde{B} \subset \tilde{A}} (X-1)^{\tilde{\text{rg}}(\tilde{A}) - \tilde{\text{rg}}(\tilde{B})} (Y-1)^{\tilde{n}(\tilde{B})} \\ &= T_{G/a}(X, Y) + T_{G-a}(X, Y) = T_G(X, Y) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le polynôme de Tutte pour calculer le nombre $\text{Couv}(G)$ d'arbres couvrants d'un graphe G :

Proposition 5. Le nombre d'arbres couvrants d'un graphe connexe G est donné par $\text{Couv}(G) = T_G(1, 1)$.

Encore une fois, ce résultat se montre par induction :

- (i) Il y a un seul arbre couvrant de $(\{s\}, \emptyset)$.
- (ii) Si $a \in A$ est une boucle, on peut la supprimer : $\text{Couv}(G) = \text{Couv}(G - a) = T_{G-a}(1, 1) = T_G(1, 1)$.
- (iii) Si $a \in A$ est un isthme, on peut l'écraser : $\text{Couv}(G) = \text{Couv}(G/a) = T_{G/a}(1, 1) = T_G(1, 1)$.
- (iv) Si $a \in A$ n'est ni une boucle, ni un isthme, et si B est couvrant, alors
 - soit B contient a , et on peut alors écraser a ,
 - soit B ne contient, et on peut alors supprimer a .

On a donc $\text{Couv}(G) = \text{Couv}(G/a) + \text{Couv}(G - a) = T_{G/a}(1, 1) + T_{G-a}(1, 1) = T_G(1, 1)$.

3 Arbres couvrants de poids minimal

On considère maintenant un graphe $G = (S, A)$ muni d'une fonction *poids* $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$. Si $B \subset A$, on note $\Omega(B) = \sum_{a \in B} \omega(a)$ le poids de B . On s'intéresse aux arbres couvrants de G de poids minimum.

Ce problème correspond à diverses situations concrètes : considérons par exemple un ensemble de villes sur une carte, que l'on veut relier par un réseau routier. On s'intéresse ici au graphe des routes potentiellement constructibles (certaines villes ne peuvent pas être directement reliées), muni du poids du coût de la construction (complication de construction, ouvrages d'art,...). Comment trouver un réseau routier optimal ?

Par ailleurs, le nombre d'arbres couvrants d'un graphe fini étant fini, il est clair qu'il existe (au moins) un arbre couvrant de poids minimal. Pour des raisons évidentes de complexité, il n'est pas question d'énumérer tous les graphes couvrants et de rechercher celui qui minimise le poids. Nous proposons ici deux algorithmes permettant de déterminer un arbre couvrant de poids minimal en temps raisonnable.

3.1 Algorithme de Prim

Le fonctionnement de l'algorithme de Prim est le suivant. On part d'un sommet quelconque et on fait grossir un arbre $[U, R]$ autour de ce sommet jusqu'à ce que l'arbre couvre S : à chaque étape, on ajoute l'arête de poids minimal qui relie l'ensemble U des sommets de l'arbre à l'ensemble V des autres sommets. On maintient la liste des arêtes reliant U et V , triée selon le poids : lorsque l'on relie un nouveau sommet s , il faut retirer de Q toutes les arêtes de Q adjacentes à s , et insérer dans Q toutes les arêtes adjacentes à s qui n'étaient pas dans Q . On fait donc une différence symétrique entre Q et l'ensemble P des arêtes adjacentes à s , tout en conservant l'ordre (on note cette opération Δ_{\prec} dans la suite).

ALGORITHME DE PRIM

```

s ← S[1] ; U ← {s} ; V ← S \ {s} ; Q ← {} ; R ← {} ;
while V ≠ {} do
  P ← {a ∈ A | s ∈ a} ; Q ← P Δ≺ Q ;
  a ← Q[1] ; s ← op(a ∩ V) ;
  U ← U ∪ {s} ; V ← V \ {s} ; R ← R ∪ {a} ;
end while
return [S, R]

```

Voici un exemple de la marche de l'algorithme sur le graphe de la figure 1.

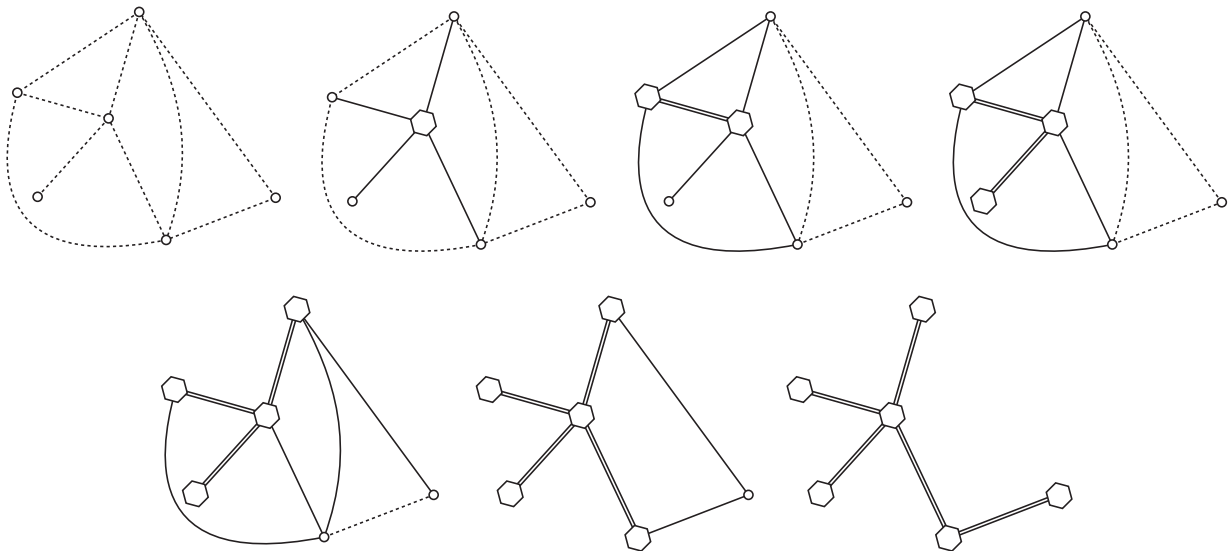


FIG. 4 – Algorithme de Prim (le coût d'une arête correspond à sa longueur ; les sommets de U sont représentés par des hexagones, ceux de V par des cercles ; les arêtes de R sont en gras, celles de Q normales, et les arêtes qui n'ont pas encore été traitées en pointillés)

3.2 Algorithme de Kruskal

L'algorithme de Kruskal met en oeuvre une autre stratégie. On part d'une forêt F constituée des arbres $(\{x\}, \{\})$ avec $x \in S$. À chaque étape, on ajoute l'arête de poids minimale reliant deux arbres de la forêt F , et on diminue ainsi le nombre d'arbres jusqu'à n'en avoir plus qu'un qui est alors couvrant. Au cours de l'algorithme, on conserve la liste Q des arêtes reliant deux arbres de F , triée selon leur poids.

ALGORITHME DE KRUSKAL

```

 $F \leftarrow \{(\{x\}, \{\}) \mid x \in S\}$  ;  $Q \leftarrow \text{sort}_{<}(A)$  ;
while  $\text{card}(V) > 1$  do
   $a \leftarrow Q[1]$  ;  $u, v$  tels que  $a$  relie les arbres  $F[u]$  et  $F[v]$  ;
   $P \leftarrow \{a \in A \mid a \text{ relie } F[u] \text{ et } F[v]\}$  ;  $Q \leftarrow Q \setminus P$  ;
   $F \leftarrow F \cup \{F[u] \cup F[v] \cup \{a\}\} \setminus \{F[u], F[v]\}$  ;
end while
return  $\text{op}(F)$ 

```

Voici un exemple de la marche de l'algorithme sur le graphe de la figure 1.

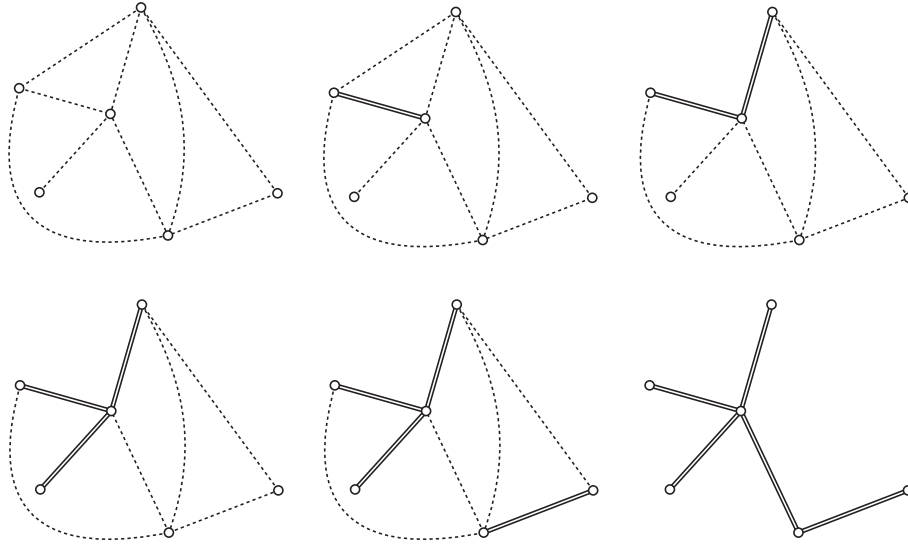


FIG. 5 – Algorithme de Kruskal (le coût d'une arête correspond à sa longueur ; les arêtes des arbres de la forêt F sont en gras, celles de Q sont en pointillés)

4 Questions et remarques

4.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. sur les graphes couvrants :
 - (a) écrire une procédure maple énumérant les arbres couvrants et les graphes couvrants d'un graphe.
 - (b) Montrer que le nombre $\text{GCouv}(G)$ de graphes couvrants d'un graphe G est donné par

$$\text{GCouv}(G) = \sum_{\substack{T \text{ graphe} \\ \text{couvrant de } G}} \sum_{H \supseteq T} \frac{1}{\text{Couv}(H)} \leq 2^{a-s+1} \text{Couv}(G)$$

où s (resp. a) désigne le nombre de sommets (resp. arêtes) de G .

- (c) montrer qu'un graphe est un arbre, si et seulement s'il existe un unique chemin entre deux quelconques de ses sommets.

2. sur les graphes complets, bipartites complets et cycliques :

- (a) écrire une procédure maple énumérant les classe d'équivalence d'arbres couvrants (ou de graphes couvrants) d'un graphe complet (ou cyclique) modulo rotations et symétries.
- (b) on considère un arbre T dont l'ensemble des sommets est étiqueté par $\{1, \dots, p\}$. On supprime la feuille d'étiquette minimale, et on écrit l'étiquette de son voisin dans une liste L . On recommence cette opération jusqu'à n'avoir plus que deux sommets (fig. 6). On obtient ainsi une liste L contenant $p - 2$ entiers de $\{1, \dots, p\}$, que l'on appelle *code de Prüfer* de l'arbre T , et que l'on note $P(T)$. Montrer que l'application P , qui a un arbre associe son code de Prüfer, est une bijection de l'ensemble des arbres à p sommets dans $\{1, \dots, p\}^{p-2}$. Retrouver ainsi $\text{Couv}(K_p)$.

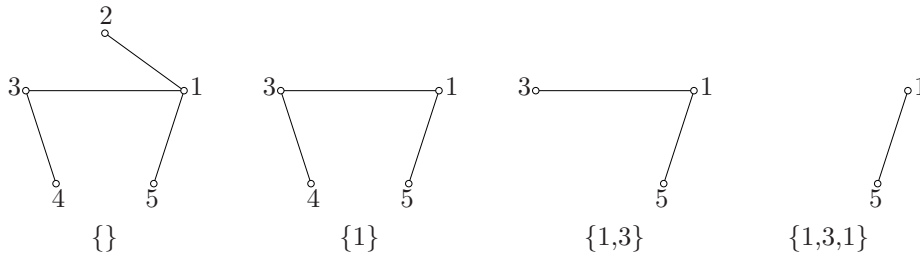


FIG. 6 – Code de Prüfer d'un arbre

- (c) en effectuant les transformations $L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{p-1} L_i$, puis $L_i \leftarrow L_i + L_1$ (pour $i \in \{2, \dots, p-1\}$) sur un mineur principal de la matrice Laplacienne du graphe complet à p sommets, retrouver $\text{Couv}(K_p)$. Appliquer cette méthode pour recalculer $\text{Couv}(C_p)$ et $\text{Couv}(K_{p,q})$.

3. sur les spectres d'adjacence :

- (a) quel est le spectre d'adjacence d'un segment, d'un carré, d'un cube, d'un cube de dimension p (fig. 7) ?

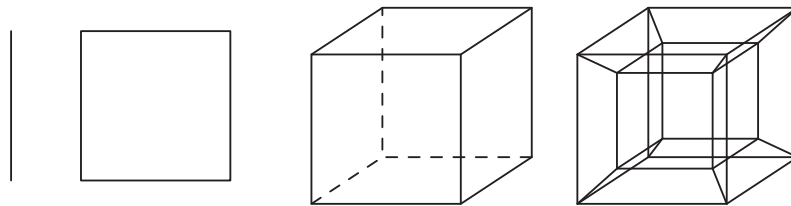


FIG. 7 – Cubes

- (b) calculer le spectre d'adjacence d'un graphe cyclique (resp. bipartite complet).
- (c) on dit qu'un graphe $G = (S, A)$ est *bipartite* si et seulement s'il existe une partition de S qui sépare A (ie. $S = U \sqcup V$ tel que pour toute arête $\{x, y\} \in A$, $x \in U \Rightarrow y \in V$). Montrer qu'un graphe est bipartite si et seulement si son spectre d'adjacence est symétrique par rapport à 0.

4. sur les graphes k -réguliers :

- (a) soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle
 - i. *nombre chromatique* de G l'entier χ_G minimal tel qu'il existe une partition de S en χ_G parts qui sépare A (ie. telle que deux éléments d'une même part ne soient pas reliés par une arête),
 - ii. *nombre d'indépendance* le cardinal ι_G maximal d'un sous-ensemble indépendant de S (ie. dont deux éléments quelconques ne sont pas adjacents).

montrer que $\text{card}(S) \leq \chi_G \iota_G$.

- (b) soit $G = (S, A)$ un graphe fini ($\text{card}(S) = p$), connexe, k -régulier, dont on note A_G la matrice d'adjacence et $k = \mu_1 > \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p$ le spectre d'adjacence. Soit F un sous-ensemble indépendant maximal de S . On définit le vecteur $x = (x_s)_{s \in S}$ par

$$x_s = \begin{cases} \text{card}(S \setminus F) = p - \iota_G & \text{si } s \in F \\ -\text{card}(F) = -\iota_G & \text{sinon} \end{cases}$$

- (i) Montrer que $\|x\|_2^2 = \iota_G p(p - \iota_G) \leq \iota(G) p^2$.

- (ii) Montrer que pour tout $s \in F$, $(Ax)(s) = -k\iota(G)$ et en déduire que $\|Ax\|_2^2 \geq k^2\iota(G)^3$.
- (iii) En remarquant que $\sum_{s \in S} x(s) = 0$ (ie. que le vecteur propre x est orthogonal aux fonctions constantes), et en utilisant la proposition 3, montrer que $\|Ax\|_2 \leq \max\{|\mu_2|, |\mu_p|\} \|x\|_2$.
- (iv) En déduire que

$$\iota(G) \leq \frac{n}{k} \max\{|\mu_2|, |\mu_p|\}$$

puis que

$$\chi_G \geq \frac{k}{\max(|\mu_2|, |\mu_p|)}$$

5. sur le polynôme de Tutte :

- (a) soit $G = (S, A)$ (avec $\text{card}(S) = p$), T_G son polynôme de Tutte et χ_G son nombre chromatique. Montrer que

$$\chi_G(k) = (-1)^{p-1} k T_G(1 - k, 0).$$

- (b) soit G un graphe. Interpréter les nombres $T_G(1, 1)$, $T_G(2, 1)$, $T_G(1, 2)$ et $T_G(2, 2)$.
- (c) calculer le polynôme de Tutte d'un arbre à p sommets, du cycle à p sommets, du graphe complet à p sommets,...

6. sur les arbres couvrants de poids minimal :

- (a) montrer que quelle que soit la fonction de poids $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$, un graphe couvrant de poids minimal est toujours un arbre.
- (b) implémenter les algorithmes de Prim et de Kruskal.
- (c) montrer la terminaison et la correction de ces algorithmes. Étudier leur complexité.
- (d) donner des exemples d'algorithmes gloutons qui ne sont pas corrects. On pourra par exemple donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que
 - i. l'algorithme glouton de rendu de monnaie soit minimal,
 - ii. l'algorithme glouton de remplissage d'un sac-à-dos soit optimal.

4.2 Remarques et références

Les idées développées dans ce texte sont présentes dans de nombreuses références de combinatoire ou de théorie des graphes. On pourra consulter par exemple *Enumerative combinatorics* (vol. 2) de R. STANLEY, *A walk through combinatorics* de M. BÓNA, ou *Introduction to graph theory* de D.B. WEST. Sur la question des graphes k -réguliers, et sur l'étude du spectre d'adjacence de ces graphes, on pourra préférer le livre *Elementary number theory, group theory and Ramanujan graphs* de G. DAVIDOFF, P. SARNAK & A. VALETTE. Enfin, tout livre d'algorithmique présente les algorithmes de Prim et de Kruskal.

Bien que les bases de la théorie des graphes ne soient pas explicitement au programme de l'agrégation (je ne comprends d'ailleurs toujours pas pourquoi), il se trouve qu'elles fournissent des exemples variés d'applications de certaines leçons. Je pense en particulier aux leçons suivantes :

– DÉTERMINANTS EXEMPLES ET APPLICATIONS

La formule de Binet-Cauchy, son application au Matrix tree theorem, et les exemples de calculs de mineurs des matrices Laplaciennes des graphes complets, bipartites complets et cycliques (avec la méthode du texte, ou celle de la question 2c) constituent de bons exemples de calculs et d'utilisation de déterminants.

– RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE. APPLICATION (ou pour les mêmes raisons ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES)

L'utilisation des spectres d'adjacence des graphes, en particulier pour minorer le nombre chromatique d'un graphe k -régulier connexe (question 4b), illustre les notions de la réduction en algèbre linéaire.

– MÉTHODES COMBINATOIRES, PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

Les différentes méthodes utilisées ici pour compter le nombre $\text{Couv}(G)$ d'arbres couvrants d'un graphe G sont autant d'exemples pour cette leçon. L'utilisation d'une matrice (matrice d'adjacence, ou Laplacienne), ou d'un polynôme (polynôme de Tutte, ou polynôme chromatique) pour stocker de l'information combinatoire est à rapprocher de l'utilisation de séries génératrices en combinatoire énumérative.