Plan du cours

1/ Rappels et compléments Java.

2/ Tableaux, boucles et invariants.

3/ Notions élémentaires de complexité.

4/ Récursion.

5/ Structures de données et introduction aux types abstraits de données. **ICI**

6/ Quelques compléments Java.

Les arbres

- Notion d'arbres, définitions et propriétés
- Type abstrait Arbre
- Algorithmes de parcours d'arbres
- Arbres binaires de recherche

Notion d'arbres

Les arbres

De manière informelle, un arbre est un ensemble d'éléments appelés **`nœuds`** liés par une **`relation de parenté`** établissant une hiérarchie entre les nœuds.

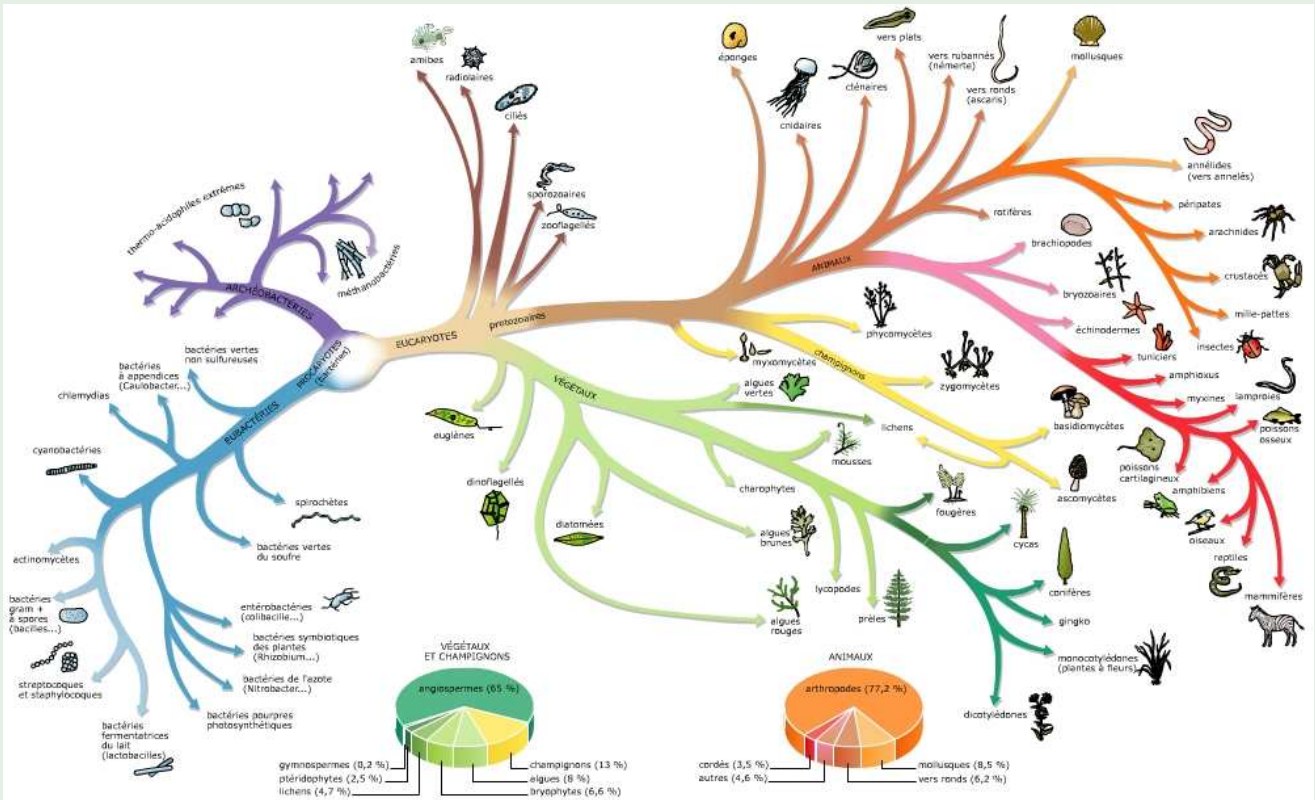
Notion d'arbres

Les arbres

De manière informelle, un arbre est un ensemble d'éléments appelés **nœuds** liés par une **relation de parenté** établissant une hiérarchie entre les nœuds.

Exemples

Un arbre généalogique ou un arbre représentant des espèces.



Définition

Définition récursive

Un **arbre** est un ensemble fini de **nœuds** tel que:

- Il existe un nœud particulier appelé le **nœud racine** (ou la **racine**).
- Les nœuds restants sont partitionnés en ensemble qui sont eux mêmes des arbres (parfois appelés aussi **sous-arbres**).

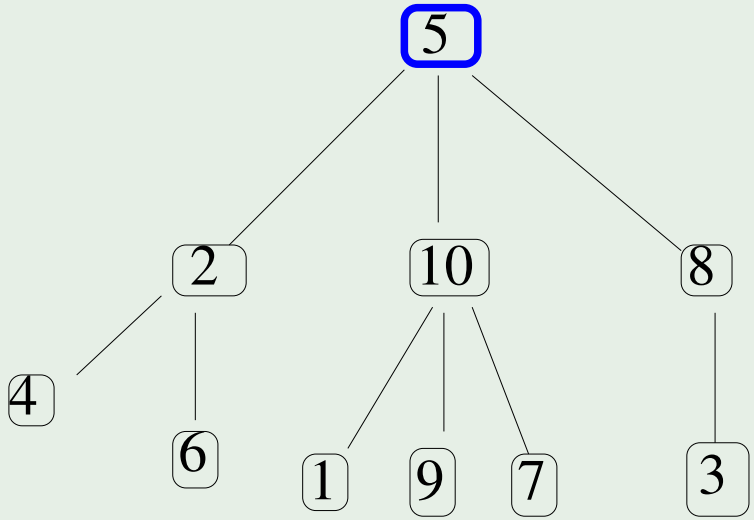
Définition

Définition récursive

Un **arbre** est un ensemble fini de **nœuds** tel que:

- Il existe un nœud particulier appelé le **nœud racine** (ou la **racine**).
- Les nœuds restants sont partitionnés en ensemble qui sont eux mêmes des arbres (parfois appelés aussi **sous-arbres**).

Un exemple



Définition

Définition informelle récursive

Un **arbre** est un ensemble fini de **nœuds** tel que:

- Il existe un nœud particulier appelé le **nœud racine** (ou la **racine**).
- Les nœuds restants sont partitionnés en ensemble qui sont eux mêmes des arbres (parfois appelés aussi **sous-arbres**).

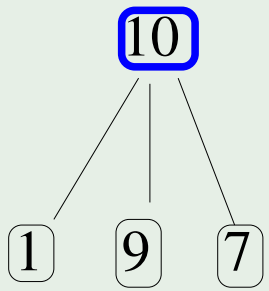
Définition

Définition informelle récursive

Un **arbre** est un ensemble fini de **nœuds** tel que:

- Il existe un nœud particulier appelé le **nœud racine** (ou la **racine**).
- Les nœuds restants sont partitionnés en ensemble qui sont eux mêmes des arbres (parfois appelés aussi **sous-arbres**).

Un exemple



Définition formelle récursive

- Un **nœud** N unique est un arbre dont la **racine** est N lui-même.
- Si N est un nœud et $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sont des **arbres** dont les **racines** sont $N_1, N_2, \cdots, N_k$ alors la structure telle que N est le **nœud père** de $N_1, N_2, \cdots, N_k$ est aussi un arbre.
- Un arbre sans nœud est un arbre **vide** .
- Un forêt est un ensemble d'arbres.

Terminologie associée

- Liens de **parenté** : père, fils, frère, ... entre les nœuds (aussi designés par **sommets**).
- **Branche**.
- **Nœuds** : nœud racine, nœud interne, nœud externe ou **feuille** .
- **Etiquette** d'un nœud.
- **Sous-arbre**.

Propriétés d'un nœud

- **`Chemin d'un nœud X à la racine`** : c'est la suite de nœuds $N_1, N_2, \cdots, X$ de l'arbre tels que N_i est le père de N_{i+1} (N_1 est la racine de l'arbre).

Propriétés d'un nœud

- **`Chemin d'un nœud X à la racine`** : c'est la suite de nœuds $N_1, N_2, \cdots, X$ de l'arbre tels que N_i est le père de N_{i+1} (N_1 est la racine de l'arbre).

- **`Longueur d'un chemin`** : nombre de liens de parenté dans le chemin considéré.

Propriétés d'un nœud

- **`Chemin d'un nœud X à la racine`** : c'est la suite de nœuds $N_1, N_2, \cdots, X$ de l'arbre tels que N_i est le père de N_{i+1} (N_1 est la racine de l'arbre).

- **`Longueur d'un chemin`** : nombre de liens de parenté dans le chemin considéré.

- **`Profondeur d'un nœud`** : longueur du chemin du nœud considéré. La profondeur peut se calculer (ou se définir) récursivement
  1. profondeur(racine) = 0.
  2. profondeud(X) = 1 + profondeur (pere(X)).

Propriétés d'un nœud

- **`Chemin d'un nœud X à la racine`** : c'est la suite de nœuds $N_1, N_2, \cdots, X$ de l'arbre tels que N_i est le père de N_{i+1} (N_1 est la racine de l'arbre).

- **`Longueur d'un chemin`** : nombre de liens de parenté dans le chemin considéré.

- **`Profondeur d'un nœud`** : longueur du chemin du nœud considéré. La profondeur peut se calculer (ou se définir) récursivement
  1. profondeur(racine) = 0.
  2. profondeud(X) = 1 + profondeur (pere(X)).
- **`Degré d'un nœud X`** : c'est le nombre de fils de X.

Propriétés d'un arbre

- **`Taille d'un arbre`** : c'est le nombre de nœuds de l'arbre. La taille d'un arbre peut se calculer récursivement :
  1. Si l'arbre est vide alors

$$\text{taille(vide)} = 0$$

  2. sinon

$$\text{taille(arbre)} = 1 + \sum_{s \in \{\text{sous arbres}\}} \text{taille(s)}\,.$$

Propriétés d'un arbre

- **`Taille d'un arbre`** : c'est le nombre de nœuds de l'arbre. La taille d'un arbre peut se calculer récursivement :
  1. Si l'arbre est vide alors

$$\text{taille(vide)} = 0$$

  2. sinon

$$\text{taille(arbre)} = 1 + \sum_{s \in \{\text{sous arbres}\}} \text{taille(s)}\,.$$

- **`Hauteur d'un arbre`** : La plus grande profondeur de l'ensemble des nœuds. La hauteur peut aussi se calculer récursivement (Exercice!).

Degré d'un arbre

- **`Arbre de degré n`** : arbre dont tous les nœuds sont au maximum de degré N. Il y a des cas particuliers les **`arbres binaires`** (degré 2) et les arbres de **`degré 1`** (listes). Dans le cas général, le degré n'est pas connu (n'est pas fixé d'avance!).

- **`Niveau d'un arbre`** : ensemble des nœuds de même profondeur.

Représentation par tableau

On peut représenter une forêt par un tableau tel que

$$\text{père}\,[s] = \text{père de } s$$

(si s est une **racine** , $\text{père}\,[s] = s$.)

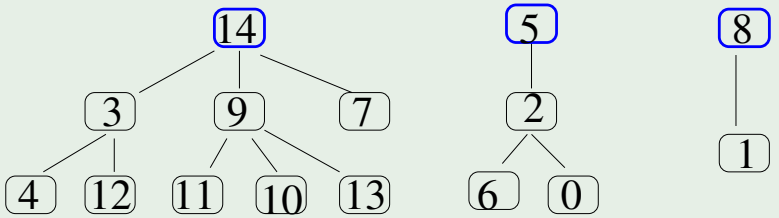
Représentation par tableau

On peut représenter une forêt par un tableau tel que

$$\text{père}[s] = \text{père de } s$$

(si s est une **racine**, père $[s] = s$.)

Schéma



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	INDICES
2	8	2	14	3	5	2	14	8	14	9	9	3	9	14	CONTENUS

Exemples d'utilisation des arbres

Exemples abstraits

La liste n'est pas exhaustive

- Etudier/analyser la structure d'une expression (compilation)
- Cas particulier : les expressions arithmétiques.
- Arbre lexicographique pour classer/stocker des mots par ordre alphabétique (cf. exemple).

Exemples d'utilisation des arbres

Exemples abstraits

La liste n'est pas exhaustive

- Etudier/analyser la structure d'une expression (compilation)
- Cas particulier : les expressions arithmétiques.
- Arbre lexicographique pour classer/stocker des mots par ordre alphabétique (cf. exemple).

Un exemple qui nous concerne

Hiérarchie d'héritage en JAVA.

Une opération classique

- On désire appliquer le même traitement à **`tous les nœuds`** d'un arbre.
- Un cas particulier concerne l' **`affichage`** .

Une opération classique

- On désire appliquer le même traitement à **`tous les nœuds`** d'un arbre.
- Un cas particulier concerne l' **`affichage`** .

Type de parcours

L' ordre de **`visite`** des nœuds de l'arbre est important.

1. parcours en profondeur **`préfixe`**, **`postfixe`** et **`infixe`**.
2. parcours en largeur.

Types de parcours d'arbres

- **`En largeur`**: parcours par niveau de l'arbre et de gauche à droite à l'intérieur de chaque niveau.

Types de parcours d'arbres

- **`En largeur`**: parcours par niveau de l'arbre et de gauche à droite à l'intérieur de chaque niveau.

- **`En profondeur`**:
  - Exporation **`récursive par sous-arbres`** des nœuds de l'arbre.
  - Selon l'ordre des sous-arbres, on a deux cas:
    `parcours en profondeur de gauche à droite` ou
    `parcours en profondeur de droite à gauche`

Types de parcours d'arbres

- **`En largeur`**: parcours par niveau de l'arbre et de gauche à droite à l'intérieur de chaque niveau.

- **`En profondeur`**:
  - Exporation **`récursive par sous-arbres`** des nœuds de l'arbre.
  - Selon l'ordre des sous-arbres, on a deux cas:
    `parcours en profondeur de gauche à droite` ou
    `parcours en profondeur de droite à gauche`
- Selon l'ordre de **`traitement d'un nœud père`** par rapport à ses fils, on parle de parcours
  - **`préfixe`** : le père avant ses fils
  - **`postfixe`** : le père après ses fils
  - **`infixe`** : le père entre deux fils (notamment pour les arbres binaires)

Arbres binaires

Arbre particulier

`Définition` : arbres de degré 2.

`Spécifique`. On parle de sous-arbre gauche et de sous-arbre droit ou encore de fils gauche, fils droit.

Arbres binaires

Arbre particulier

Définition : arbres de degré 2.

Spécifique. On parle de sous-arbre gauche et de sous-arbre droit ou encore de fils gauche, fils droit.

Correspondance entre arbre binaire et arbre quelconque

Un arbre non-binaire peut toujours être représenté par un arbre binaire (et **vice-versa**). En effet, il existe une **bijection** entre un arbre binaire avec n feuilles et un arbre quelconque avec n nœuds.

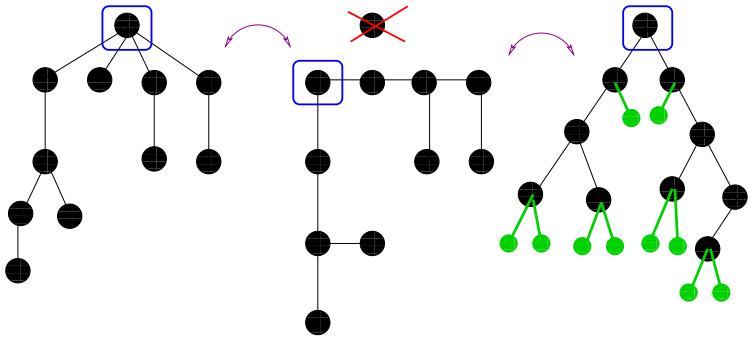
Arbre particulier

Définition : arbres de degré 2.

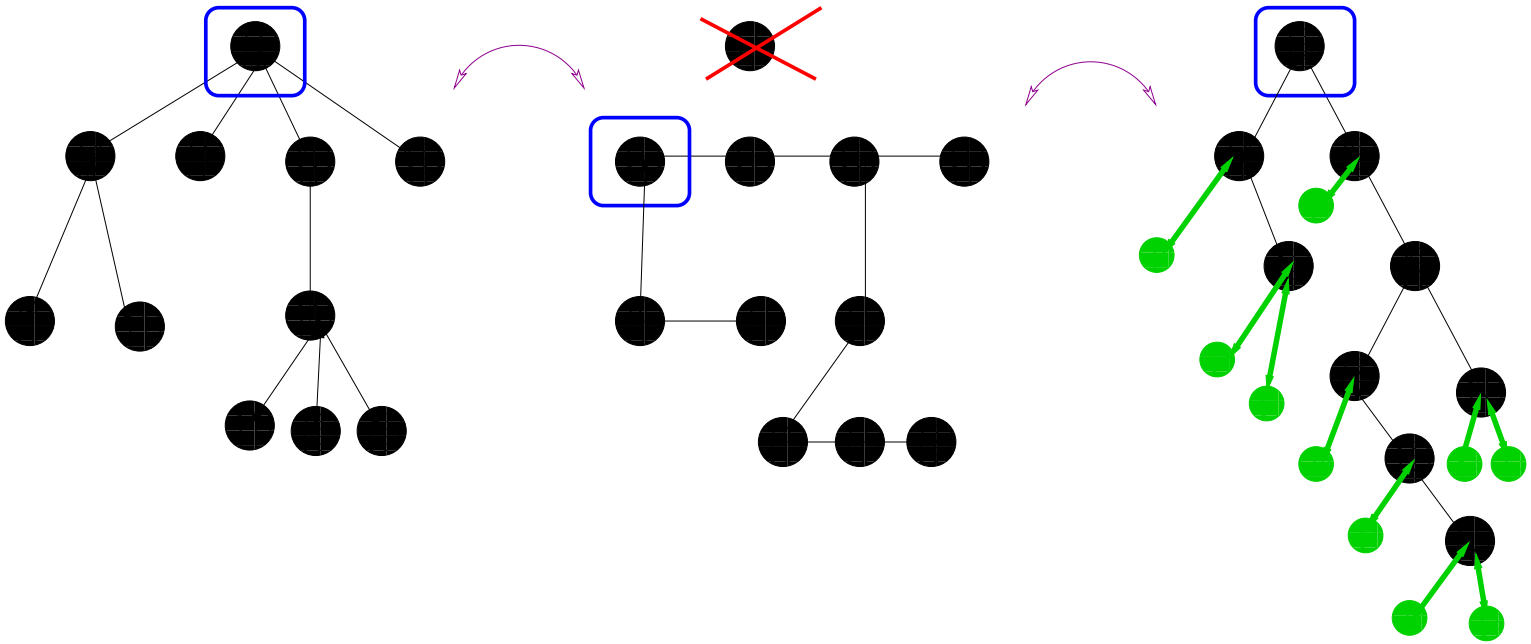
Spécifique. On parle de sous-arbre gauche et de sous-arbre droit ou encore de fils gauche, fils droit.

Correspondance entre arbre binaire et arbre quelconque

Un arbre non-binaire peut toujours être représenté par un arbre binaire (et **vice-versa**). En effet, il existe une **bijection** entre un arbre binaire avec n feuilles et un arbre quelconque avec n nœuds.



Autre correspondance



Type Abstrait des Arbres Binaires

Définition du type Arbres Binaires

- **`Nom du type`** : ArbreBin
- **`Opérateurs`** (signature des méthodes)
  - Création:-> ArbreBin
  - racine: ArbreBin :->Noeud
  - sag: ArbreBin :-> ArbreBin
  - sad: ArbreBin :-> ArbreBin
  - cons: Noeud x ArbreBin x ArbreBin:-> ArbreBin
  - estVide: ArbreBin -> Booléen
  - info: Noeud -> Contenu
- **`Propriétés des opérateurs:`**
  `préconditions` :
  (a) racine(A) valide si A $\neq$ vide, **(b)** sag(A) valide si A $\neq$ vide et **(c)** sad(A) valide si A $\neq$ vide.
  `axiomes` :
  $\forall$ rac (nœud), $\forall$ sg (ArbreBin) et $\forall$ sd (ArbreBin) alors **(i)** racine(cons(rac,sg,sd))=rac, **(ii)** sag(cons(rac,sg,sd))=sg et **(iii)** sd(cons(rac,sg,sd))=sd.

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) d'un arbre binaire

Dans ce qui suit, `arb` est du type ArbreBin et `traiter1` , `traiter2` et `traiter3` sont effectuent une opération sur les contenus des nœuds.

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) d'un arbre binaire

Dans ce qui suit, `arb` est du type ArbreBin et `traiter1` , `traiter2` et `traiter3` sont effectuent une opération sur les contenus des nœuds.

Parcours

```
parcourir (arb)
        traiter1(info(racine(arb)))
        Si sag ≠ vide alors
                parcourir (sag(arb));
        traiter2(info(racine(arb)))
        Si sad ≠ vide alors
                parcourir (sad(arb));
        traiter3(info(racine(arb)))
```

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) préfixe

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) préfixe

Parcours

```
parcourir (arb)
        traiter1(info(racine(arb)))
        Si sag ≠ vide alors
                parcourir (sag(arb));
        Si sad ≠ vide alors
                parcourir (sad(arb));
```

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) postfixe

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) postfixe

Parcours

```
parcourir (arb)
        Si sag ≠ vide alors
                parcourir (sag(arb));
        Si sad ≠ vide alors
                parcourir (sad(arb));
        traiter1(info(racine(arb)))
```

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) infixe

Algorithme du parcours en profondeur (gauche-droite) infixe

Parcours

```
parcourir (arb)
        Si sag ≠ vide alors
                parcourir (sag(arb));
        traiter1(info(racine(arb)))
        Si sad ≠ vide alors
                parcourir (sad(arb));
```

Algorithme du parcours en largeur d'un arbre binaire

On utilise une `file` qu'on appele ci-dessous `fifo` .

Algorithme du parcours en largeur d'un arbre binaire

On utilise une `file` qu'on appele ci-dessous `fifo` .

ParcoursLargeur

```
parcourirlargeur (arb)
        ajouter arb dans fifo ;
        Tant que fifo ≠ vide faire
                prem := prochain élément de fifo;
                traiter1((racine(prem));
                Si sag ≠ vide alors
                        ajouter sag(prem) dans fifo
                Si sad ≠ vide alors
                        ajouter sad(prem) dans fifo
        FinTantQue
Finparcourirlargeur.
```

L'ordre est souvent crucial en algorithmique

Ce sont des arbres binaires **ordonnés** . Rappelons-nous que les tableaux déjà triés offrent certains avantages. Idem pour les listes.

L'ordre est souvent crucial en algorithmique

Ce sont des arbres binaires **ordonnés** . Rappelons-nous que les tableaux déjà triés offrent certains avantages. Idem pour les listes.

Définition

Un **arbre binaire de recherche** est un arbre binaire tel que

- les valeurs des nœuds du sous-arbre gauche de tout nœud X de l'arbre sont inférieures à X.
- les valeurs des nœuds du sous-arbre droit de tout nœud X de l'arbre sont supérieurs à X.

Recherche d'un élément

Dans l'algorithme ci-dessous, `arb` est un ArbreBin (de recherche) et le résultat est le sous-arbre dont l'élément recherché est la racine.

Recherche d'un élément

Dans l'algorithme ci-dessous, `arb` est un ArbreBin (de recherche) et le résultat est le sous-arbre dont l'élément recherché est la racine.

Recherche

```
recherche (val, arb)
/⋆ conditions d'arrêt ⋆/
        si arb = vide alors retourner(vide);
        si val = info(racine(arb) alors
                retourner(arb);
/⋆ corps de la récursion ⋆/
        si val < info(racine(arb)) alors
                retourner( recherche (val, sag(arb)));
        sinon
                retourner( recherche (val, sad(arb)));
Finrecherche.
```

Ajout d'un élément

On désire rajouter un élément `nouveau` qui est un **nœud**.

Ajout d'un élément

On désire rajouter un élément **nouveau** qui est un **nœud**.

Ajout

```
ajout (val, arb)
/* on crée le nœud */
        nouveau = new Noeud(val);
/* conditions d'arrêt */
        si arb = vide alors
                retourner(cons(nouveau, vide,vide));
/* corps de la récursion */
        si val < info(racine(arb)) alors
                si(sag(arb) = vide) alors
                        insérer nouveau comme nouvel sous arbre gauche
                sinon retourner( ajout (val, sag(arb)));
        sinon si (sad(arb)=vide) alors
                insérer nouveau comme nouvel sous arbre gauche
                        sinon retourner( ajout (val, sad(arb)));
Finajout.
```

Suppression d'un élément

Suppression d'un élément

Trois étapes

1. Trouver l'élément à supprimer.
2. Supprimer le nœud correspondant.
3. Réorganiser (respecter l'ordre).