TD n°4

Bijections

Exercice 1 [Chemin de Dyck] On considère le plan cartesien discret $\mathbb{Z}^2$ muni d'un repère orthonormé. Un chemin de Dyck de longueur n est un chemin dans le plan $\mathbb{Z}^2$ formé de pas nord-est $(1,1)$ ou sud-est $(1,-1)$, issus de l'origine $(0,0)$, terminant en $(n,0)$ et ne rentrant pas dans le demi-plan $y<0$. Un tel chemin peut également être vu comme suite de points $M_0,\ldots,M_n$ avec $M_i=(i,y_i)$ où $y_0=0$, $y_n=0$, $y_{i+1}=y_i\pm 1$, et $y_i\geq 0$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. La longueur d'un chemin de Dyck est le nombre de ses pas. Dans la figure 1 on a un exemple de chemin de Dyck de longueur 20.

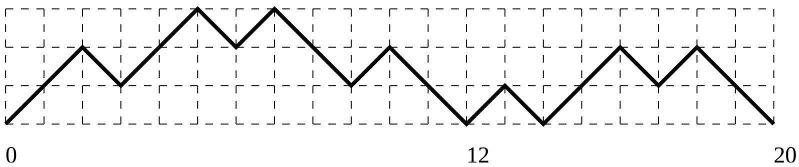


FIGURE 1 – Un chemin de Dyck

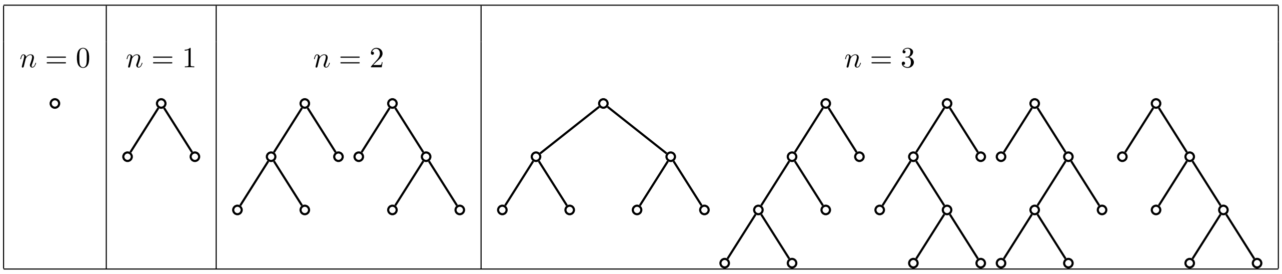
On note D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n et d_n son cardinal. On pose $d_0=1$ par convention. On note C_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n ne rencontrant l'axe x qu'au début et à la fin et c_n son cardinal. On note B_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n rencontrant au moins une fois l'axe des x en un autre point que M_0 et M_n et b_n son cardinal.

1. Montrer que la longueur d'un chemin de Dyck est nécessairement paire.
2. Dessiner et compter les chemins de Dyck de longueur n, pour n= 2, 4, 6.
3. Montrer qu'un chemin de Dyck de longueur $n=2m$ rencontre l'axe des x nécessairement dans des points $(2p,0)$, avec p entre 0 et m.
4. Pour p entre 1 et $m-1$, on note $B_{2m,p}$ l'ensemble des chemins de Dyck touchant pour la première fois (sans compter le point M_0) l'axe x en $(2p,0)$ et $b_{2m,p}$ son cardinal. Dans l'exemple de la Figure 1 le chemin touche l'axe x pour la première fois en $(12,0)$. Montrer que $B_{2m}=\cup_{p=1}^{m-1}B_{2m,p}$. Cette union est-elle disjointe ?
5. Soit $D=M_0,\ldots,M_{2m}$ un chemin de Dyck qui touche l'axe x pour la première fois en $(2p,0)$: montrer que le chemin $M_0,\ldots,M_{2p}$ est un chemin de Dyck qui ne touche l'axe x qu'en M_0 et en M_{2p} ; montrer que le chemin $M_{2p},\ldots,M_{2m}$ est un chemin de Dyck. En déduire que $b_{2m,p}=c_{2p}*d_{2(m-p)}$.
6. En translatant l'axe x de façon convenable, montrer que $c_{2m}=d_{2(m-1)}$.
7. Déduire des points 4), 5) et 6) que pour $m\geq 1$, $d_{2m}=d_{2(m-1)}+\displaystyle\sum_{p=1}^{m-1}d_{2p-2}*d_{2(m-p)}$.
8. Calculer d_n, pour $n=2,4,6,8$ à partir de la récurrence précédente.

Exercice 2 [arbres binaires complets]

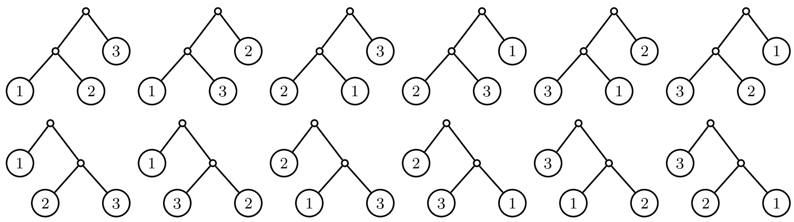
Rappelons qu'un arbre binaire complet est un arbre enraciné avec deux types de sommets : les noeuds, qui ont chacun 2 fils (le fils gauche et le fils droit), et les feuilles, qui n'ont pas de fils.

Voici les arbres binaires complets à n noeuds pour $n = 0, 1, 2, 3$:



Un arbre binaire étiqueté à k feuilles est un arbre binaire complet ayant k feuilles qui portent des numéros distincts pris dans $\{1, \ldots, k\}$.

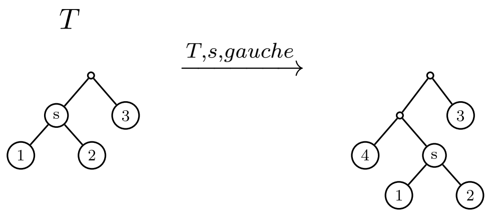
Voici les arbres binaires étiquetés à 3 feuilles :



1. Quel est le nombre de feuilles d'un arbre binaire complet à n noeuds ? (ne pas oublier de démontrer votre réponse)
2. Soit A_n l'ensemble des arbres binaires étiquetés à n noeuds et B_n celui des arbres binaires complets à n noeuds. Montrer que $a_n = (n+1)! b_n$.

Considérons la construction suivante : étant donné un arbre binaire étiqueté T à k feuilles, on choisit un sommet (noeud ou feuille) s de T et un côté c (gauche ou droite), puis on insère un nouveau sommet au milieu de l'arête joignant s à son père et une feuille d'étiquette $k+1$ du côté c de cette arête.

Voici un exemple :



3. Que fabrique cette construction ?
4. Montrer que la construction précédente définit une bijection (préciser entre quels ensembles et décrire la bijection inverse) et en déduire que pour $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = a_n \cdot (2n+1) \cdot 2$$

5. Calculer le nombre d'arbres binaires étiquetés en itérant la relation précédente et retrouver ainsi le nombre d'arbres binaires complets.