Université Paris 7 Combinatoire
L2 Année 2012-2013

TD n°3

Formule du crible et Permutations

Exercice 1 Soit A et B des parties disjointes d'un ensemble E de cardinal n et supposons $|A| = n_1$ et $|B| = n_2$. Calculer le nombre de parties à p éléments ayant

1. exactement un élément dans A et un élément dans B,
2. au moins un élément dans A et un élément dans B.

Exercice 2 Soit {a, b, c, d} un alphabet à quatre lettres. Trouver :

1. le nombre de mots de longueur n écrits sur cet alphabet.
2. le nombre de mots de longueur n dans lesquels chacune des lettres a, b, c, d apparaît au moins une fois.

Exercice 3 Soient A et B deux ensembles de cardinal $|A| = m$ et $|B| = n$. Montrer (en utilisant la formule du crible) que le nombre de surjections de A dans B est :

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ n! & \text{si } m = n \\ \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} (n-p)^m & \text{si } m > n \end{cases}$$

Exercice 4 Parmi les permutations de $\{a, b, c, d, e, f\}$, combien ne contiennent ni ac ni bde ?

Exercice 5 [La transformation de Foata] Soit une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on considère la représentation cyclique canonique, obtenue en plaçant le minimum de chaque cycle en tête du cycle et en ordonnant les cycles suivant les minimums décroissants. Si par exemple on prend la permutation

3 2 7 8 10 6 1 5 9 4 ,

sa représentation cyclique canonique est

(9)(6)(4 8 5 10)(2)(1 3 7).

La transformation de Foata consiste à oublier les parenthèses :

9 6 4 8 5 10 2 1 3 7 .

On obtient ainsi une autre permutation en notation vectorielle.

On considère la permutation $\sigma = (\ 1\ 7\ 5\ 3)(2\ 6\ 4\ )(\ 8\ )(\ 9\ 10\ )$.

- Combien de représentations cycliques différentes admet σ ?
- Appliquer la transformation de Foata à σ.
- Etant donnée l'image ρ d'une permutation σ obtenue par la transformation de Foata comment retrouver σ ?
- En déduire que le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ avec k cycles est égal au nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ avec k minima de gauche à droite (éléments qui sont plus petits que tous ceux qui sont à leur gauche).

Exercice 6 [petit problème de placement] Quatre couples passent la soirée ensemble.

1. Ils vont tout d'abord au cinéma, où il ne reste qu'une rangée de huit places. Combien de façons ont-ils de s'installer
   (a) sans imposer de restriction particulière ?
   (b) en alternant les hommes et les femmes ?
   (c) en groupant les hommes d'une part, et les femmes d'autre part ?
   (d) en groupant les femmes (mais pas nécessairement les hommes) ?
   (e) sans séparer les couples ?
2. Ils vont ensuite au restaurant et s'intallent autour d'une table ronde. Mêmes questions qu'au cinéma, en considérant les placements à rotation près (ie deux placements sont considérés comme identiques dès lors que chaque convive à le même voisin de gauche et le même voisin de droite).

Exercice 7 [Permutations montantes-descendantes]

Une permutation *montante-descendante*, up-down en anglais (resp. : descendante-montante, down-up) d'ordre n est un arrangement $a_1 a_2 \dots a_n$ des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$ qui descend et monte alternativement :

$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots, \qquad \text{(resp. : } a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \dots).$$

On appelle p_n le nombre de permutations montantes-descendantes d'ordre n. Il est pratique de faire la convention que $p_0 = 1$.

1. Calculer les premier cas.
2. Montrer qu'il y a autant de permutations montantes-descendantes que de descendantes-montantes (pour un ordre n fixé).
3. Montrer que le nombre de permutations montantes-descendantes dont le plus grand nombre n est en position $2k$ est $\binom{n-1}{2k-1} p_{2k-1} p_{n-2k}$. Montrer de même que le nombre de permutations dont le plus petit élément 1 est en position $2k+1$ est $\binom{n-1}{2k} p_{2k} p_{n-2k-1}$.
4. En déduire que la suite p_n vérifie la récurence

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad \text{ et pour n>1, } 2p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k p_{n-1-k}.$$