

TD n°2

Dénombrement

- Exercice 1**
1. Montrer par récurrence et de façon combinatoire que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 2. Montrer de façon combinatoire que $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$.

- Exercice 2**
1. Montrer de façon combinatoire $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En déduire que $\sum_{i=1}^n (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ et $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

3. Déduire alors la somme $\sum_{i=0}^n (-1)^i i^2$.

Exercice 3 Combien y-a-t'il de façon de colorier k cases d'une rangées de n cases ?
Utiliser cette interprétation pour montrer combinatoirement les formules suivantes :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$

4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

5. $\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

6. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

7. $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

- Exercice 4**
1. Combien de sous-ensembles de $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ contiennent au moins un entier impair ?
 2. Un groupe est formé de quatre hommes et six femmes. Chaque homme épouse une femme. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

- Exercice 5**
1. Montrer que le nombre de k -uplets d'entiers ≥ 1 dont la somme est n est $\binom{n-1}{k-1}$.
 2. Montrer que le nombre de k -uplets d'entiers ≥ 0 dont la somme est n est $\binom{n+k-1}{k-1}$.

- Exercice 6**
1. Montrer que le nombre d'applications strictement croissante de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec $1 \leq k \leq n$, est $\binom{n}{k}$.

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls.
 - (a) Soit f une application croissante de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que l'application g de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k + n - 1 \rrbracket$ définie par $g(p) = f(p) + p - 1$, pour tout p , $1 \leq p \leq k$, est strictement croissante.
 - (b) Soit A l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit B l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k + n - 1 \rrbracket$. Montrer qu'il existe une bijection de A sur B et en déduire que le nombre des applications croissantes de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $\binom{k+n-1}{k}$.

Exercice 7 [Mots]

1. Combien y a-t-il de mot de 16 bits ayant 8 bits égaux à 1 ?
2. Soit $A = \{a, b, c, d\}$. Combien y a-t-il de mots de longueurs n sur l'alphabet A ? Combien d'entre eux sont-ils des palindromes ?
3. Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres du mot ESTATE ?
4. On a n lettres dont m sont identiques et les autres toutes distinctes. Quel est le nombre de mots qu'on peut faire avec ? Vérifier sur un petit exemple ($n = 3, m = 2$).
5. Un tiroir contient trois chaussettes bleues, trois chaussettes rouges et quatre chaussettes vertes. On en sort huit, une par une. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 8 [Boîtes] On dispose de m boîtes B_1, B_2, \dots, B_m et de n objets $\{1, \dots, n\}$.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger tous les objets dans les boîtes (une boîte peut contenir plusieurs objets) ? Montrer l'égalité

$$\begin{aligned}
 m^n &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_m}{n_m} \\
 &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=m} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=m} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}
 \end{aligned}$$

2. Combien reste-t-il de façons de ranger tous les objets si on peut mettre au plus un objet par boîte ? Et si on veut que la première boîte reste vide ? Ou plutôt si on veut qu'au moins l'une des deux premières boîtes reste vide ?