Université Paris 7 - Licence Année universitaire 2011–2012

Examen de Combinatoire - $2^{\text{ème}}$ session

21 juin 2012

Durée : 3 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé.
L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le barême est indicatif.
Pensez à bien justifier vos réponses.

Exercice 1 : Comptage (4 points)

Question 1 :

1. Donner le nombre d'anagrammes du mot « anagrammes ».
2. Donner le nombre d'anagrammes de 7 lettres composés de lettres du mot « anagrammes » et contenant les 3 'a'.

anagramme : mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot.

Question 2 :

1. Donner le nombre de permutations de longueur n.
2. Etant donné un nombre i, $1 \leqslant i \leqslant n$, donner le nombre de permutations σ de longueur n telles que $\sigma(i) = i$.
3. Etant donné un nombre i, $1 \leqslant i \leqslant n$, donner le nombre de permutations σ de longueur n telles que, $\forall j$, $1 \leqslant j \leqslant i$, $\sigma(j) \in [1, i]$.

Exercice 2 : convolution de Vandermonde (8 points)

Soit E un ensemble fini, et A, B deux parties de E. On considère l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ qui à $X \in \mathcal{P}(E)$ associe $\varphi(X) = (A \cap X, B \cap X)$.

Question 1 : A quelle(s) condition(s) sur A et B a-t-on φ surjective ?

Question 2 : A quelle(s) condition(s) sur A et B a-t-on φ injective ?

Question 3 : Lorsque φ est bijective, déterminer l'application inverse φ^{-1}.

Question 4 : En déduire la formule de convolution de Vandermonde :

$$\forall n, p, q \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Exercice 3 : Génération exhaustive (10 points) Etant donné un chemin constitué de pas montants ($\nearrow$) et de pas descendants ($\searrow$), on appelle dernière descente de ce chemin, la dernière suite maximale de pas consécutifs $\searrow$, lorsqu'on lit le chemin de gauche à droite.

On donne l'algorithme suivant étant donné un entier n strictement positif :

- Soit d le chemin formé de n pas $\nearrow$ et n pas $\searrow$. Soit les ensembles $E = \{d\}$ et $S = \emptyset$.
- Tant que $E \neq \emptyset$:
  - pour chaque chemin c de E :
    1. $E = E \setminus \{c\}$;
    2. retirer à c son premier et son dernier pas. On obtient un chemin c_1 ;
    3. pour chaque pas p de la dernière descente de c_1 lue de gauche à droite :
       (a) ajouter avant p un pas $\nearrow$, puis un pas $\searrow$. On obtient ainsi un nouveau chemin c_2 de longueur $2n$ et $S = S \cup \{c_2\}$;
       (b) si c_2 ne touche l'axe des abscisses qu'en ses deux extrémités, $E = E \cup \{c_2\}$.
    4. ajouter un pas $\nearrow$, puis un pas $\searrow$ à la fin du chemin c_1. On obtient ainsi un nouveau chemin c_2 de longueur $2n$ et $S = S \cup \{c_2\}$.

Question 1 : Décrire l'ensemble S pour $n = 1, 2, 3$ (il faut donner les éléments de S dans l'ordre où ils ont été créés par l'algorithme).

Question 2 : Montrer que les éléments de E sont des chemins de Dyck de longueur $2n$ qui ne rencontrent l'axe des abscisses qu'aux extrémités.

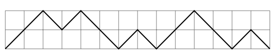
Question 3 : Montrer que si c est un chemin de E, alors tout chemin c_2 de l'algorithme est un chemin de Dyck de même longueur.

Question 4 :

1. A partir d'un chemin c de E, justifier que tous les chemins c_2 obtenus par l'algorithme sont distincts.
2. A partir de deux chemins distincts c et c' de E, montrer que, si c_2 est obtenu par l'algorithme à partir de c et c_2' est obtenu par l'algorithme à partir de c', alors c_2 et c_2' sont distincts. Pour cela, on pourra décomposer les chemins c et c' en deux parties :
   - la première partie commence au premier pas et termine juste avant le dernier pas montant ;
   - la deuxième partie est donc composée du dernier pas montant et de la dernière descente ;

   et étudier les deux chemins c_2 et c_2' en fonction de la partie qui diffère dans c et c'.

Question 5 : Inversement, étant donné un chemin de Dyck de longueur $2n$, décrire la suite d'opérations à effectuer pour retrouver le chemin d ? Le faire sur l'exemple suivant :



Question 6 : En déduire ce qu'engendre l'algorithme ci-dessus.

Exercice 4 : Combinaisons (10 points)

On considère des nombres binaires de taille n. On note $M_{n,k}$ l'ensemble des mots de taille n avec k 1.

Question 1 : Pour tous n et k, quel est le cardinal de $M_{n,k}$?

Question 2 : Rappeler la formule du binôme.

Question 3 : Que valent

1. $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |M_{n,k}|$
2. $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k |M_{n,k}|$
3. le nombre de mots de taille n avec un nombre pair de 1

Question 4 : On considère le xor (bit-à-bit) sur les mots de taille n : Si $x = x_1x_2...x_n$ et $y = y_1y_2...y_n$, alors $\mathrm{xor}(x, y) = w$, où w_i vaut 1 si et seulement si x_i et y_i sont différents (et 0 sinon). On appelle $N_{n,k}$ l'ensemble qu'on obtient en appliquant le xor à tous les couples de mots différents de $M_{n,k}$. Représenter $N_{3,2}$ et $N_{4,2}$. Décrire $N_{n,k}$ pour $k \leqslant n$.

Question 5 : Montrer que pour a et b dans $M_{n,k}$, $\mathrm{xor}(a, b)$ a un nombre pair de bits 1.

Question 6 : On dispose d'un mot c de taille n avec $2l$ bits 1.

1. Soit un mot b de taille n avec k bits 1 ($b \in M_{n,k}$). Combien de bits 1 doivent avoir c et b en commun pour que $\mathrm{xor}(c, b)$ appartienne à $M_{n,k}$? On appelle $P_{n,k}(c)$ l'ensemble des mots b trouvés.
2. Montrer que le cardinal de $P_{n,k}(c)$ ne dépend que de n, k et du nombre de bits 1 de c. Que vaut ce cardinal ?

Question 7 : On admet que $\mathrm{xor}((\mathrm{xor}(a, b)), a) = b$. Le vérifier pour $a = 001101$ et $b = 101010$.

Question 8 : Montrer que, pour a et b dans $M_{n,k}$, chacun des ensembles $\{a, b\}$ et $\{\mathrm{xor}(a, b), b\}$ permet de reconstituer l'autre.

Question 9 : En déduire que $\frac{1}{2} \sum\limits_{1 \leqslant l \leqslant k} \binom{2l}{l}\binom{n-2l}{k-l}\binom{n}{2l} = \binom{\binom{n}{k}}{2}$.