Université Paris 7 - Licence Année universitaire 2010–2011

Examen de Combinatoire

Vendredi 17 juin 2011

Durée : 3 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le barême est indicatif et est noté sur 30, mais sera ramené à 20.
Pensez à bien justifier vos réponses.

Exercice 1 : placements (4 points)

Un jardinier plante des bulbes de dahlias au pourtour d'un parterre circulaire, régulièrement espacés. Il possède 4 bulbes pour dahlias rouges, 2 pour dahlias oranges et 2 pour dahlias jaunes.

Combien de massifs différents peut-il composer

1. sans restriction ?
2. sans qu'il y ait plus de 2 dahlias rouges à la suite ?
3. les dahlias de même couleur étant groupés 2 par 2 ?

Exercice 2 : chemins de Delannoy (6 points)

On considère dans le plan cartésien les points de coordonnées entières inclus dans le rectangle dont les sommets ont pour coordonnées $(0,0)$, $(n,0)$, $(0,p)$ et (n,p).

Un *chemin de Delannoy* est un chemin menant du sommet $(0,0)$ au sommet (n,p) composé de *pas* de trois sortes :
- un pas Est qui fait passer d'un point (i,j) au point $(i+1,j)$
- un pas Nord qui fait passer d'un point (i,j) au point $(i,j+1)$
- un pas Nord-Est qui fait passer d'un point (i,j) au point $(i+1,j+1)$

1. Combien y a-t-il de chemins de Delannoy pour $n=2$ et $p=2$?
2. On note $D(n,p)$ ce nombre de chemins. Que valent $D(0,p)$? Que valent $D(n,0)$? Si $n \neq 0$ et $p \neq 0$, exprimer $D(n,p)$ en fonction de $D(n-1,p)$, $D(n,p-1)$ et $D(n-1,p-1)$. En déduire une table des valeurs de $D(n,p)$ pour $n,p \leqslant 6$.
3. Montrer que pour tout entier r tel que $0 \leqslant r < n$, on a
$$D(n,p) = \sum_{0\leqslant i<p} D(r,i).(D(n-r-1,p-i)+D(n-r-1,p-i-1))+D(r,p).D(n-r-1,0).$$

Exercice 3 : Ensembles et permutations (10 points)

On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des mots de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{1, \cdots, n\}$ composés d'exactement deux occurences de chaque lettre.

1. (a) Décrire les ensembles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.
   (b) Calculer le cardinal de $\mathcal{M}_n$ (penser à vérifier la cohérence de ce résultat avec ceux de la question précédente).
2. On veut compter le nombre h_n de mots π de l'ensemble $\mathcal{M}_n$ vérifiant la propriété (P_1) suivante :

   $$\text{deux lettres consécutives de } \pi \text{ sont distinctes.} \qquad (P_1)$$

   On pose $h_0 = 1$.
   (a) Décrire les sous-ensembles de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dont les mots vérifient la propriété (P_1).
   (b) Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on définit le sous-ensemble $\mathcal{A}_i$ de $\mathcal{M}_n$ dont les mots ont deux i consécutifs. Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_i$.
   Indication : un mot avec deux i consécutifs est en bijection avec le même mot auquel on a ôté le deuxième i.
   (c) Calculer le cardinal de l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{1\leqslant j\leqslant i} \mathcal{A}_j$.
   (d) Montrer que pour tout sous-ensemble $\{k_1, \cdots, k_i\}$ de $\{1, \cdots, n\}$, $|\bigcap_{1\leqslant j\leqslant i} \mathcal{A}_{k_j}| = |\bigcap_{1\leqslant j\leqslant i} \mathcal{A}_j|$. On note g_i ce cardinal.
   (e) A l'aide de la formule d'inclusion-exclusion, donner h_n en fonctions des g_i.
   (f) En déduire que $h_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

Exercice 4 : Mots binaires (10 points)

Le but de cet exercice est de montrer de façon combinatoire la formule :

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \qquad (1)$$

La question 3b peut être admise pour traiter la suite de l'exercice.

1. Soit $\mathcal{A}_{2n}$ l'ensemble des mots de longueur $2n$ écrits sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner le cardinal de cet ensemble.
2. Soit $\mathcal{B}_{2n}$ l'ensemble des mots de $\mathcal{A}_{2n}$ comportant le même nombre de 0 et de 1. Donner le cardinal de cet ensemble.
3. Soit $\mathcal{C}_{2n}$ l'ensemble des mots de $\mathcal{A}_{2n}$ dont tous les préfixes ne comportent jamais le même nombre de 0 et de 1.
   (a) Donner les mots de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$.
   (b) Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{B}_{2n}$ et $\mathcal{C}_{2n}$ sont en bijection.
   Pour passer d'un mot $b = b_1 b_2 \cdots b_{2n}$ de $\mathcal{B}_{2n}$ à un mot $c = c_1 c_2 \cdots c_{2n}$ de $\mathcal{C}_{2n}$, on opère la transformation suivante :
   - $c_1 = b_1$ et posons $a = 1$,

- Tant que $a \leqslant 2n$, on fait :
  - Calculer $i = \min\{j > a \,/\, |c_a b_{a+1} \cdots b_j|_0 = |c_a b_{a+1} \cdots b_j|_1\}$, i est donc le plus petit indice supérieur à a tel que le nombre de 0 et de 1 soit le même dans le facteur $c_a b_{a+1} \cdots b_i$.
  - Alors $\forall a < j < i, c_j = b_j$ et $c_i = b_1$.
  - Poser $a = i$.

Voici un exemple d'application de cette transformation :

le mot	$b =$ 1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
devient	$c =$ 1	1	0	1	1	0	0	1	0	**1**	**1**	**1**	1	1	0	0	**1**	1	1	1

i. Donner le mot c obtenu en appliquant la transformation sur le mot $b =$ 00111110110000.

ii. Expliquer pourquoi un mot c, obtenu en appliquant la transformation sur un mot b de $\mathcal{B}_{2n}$, appartient bien à $\mathcal{C}_{2n}$.

iii. Montrer que $\mathcal{B}_{2n}$ est une bijection avec $\mathcal{C}_{2n}$ (il vous suffit pour cela de décrire l'application qui permet de passer d'un mot de $\mathcal{C}_{2n}$ à un mot de $\mathcal{B}_{2n}$).

(c) Déduire le cardinal de $\mathcal{C}_{2n}$.

4. Expliquer pourquoi un mot de $\mathcal{A}_{2n}$ est la concaténation d'un mot de $\mathcal{B}_{2n}$ et d'un mot de $\mathcal{C}_{2n}$.
5. Montrer alors la formule (1).