Université Paris 7 - Licence Année universitaire 2011–2012

Examen de Combinatoire

Lundi 9 janvier 2012

Durée : 3 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé.
L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le barême est indicatif.
Faire chaque exercice sur des feuilles séparées.
Pensez à bien justifier vos réponses.

Exercice 1 : Permutations et comptage (8 points)

Question 1 : Soit la permutation donnée sous forme vectorielle $\sigma = (5, 3, 6, 1, 7, 2, 4)$.

1. Donner l'écriture cyclique de σ.
2. Donner le tableau d'inversion T_σ de σ.
3. On rappelle que l'ordre lexicographique induit par l'ordre naturel sur les entiers est l'ordre du dictionnaire où les lettres sont des chiffres. Lorsque le nombre de chiffres des nombres envisagés est constant, l'ordre correspond à l'ordre sur les entiers. Par exemple le suivant pour cet ordre du nombre 369 est 3690, mais si on ne compare que les nombres à 3 chiffres, le suivant est alors 370.
   (a) Donner tous les tableaux d'inversions de longueur 3 dans l'ordre lexicographique croissant.
   (b) Donner le tableau d'inversion T' suivant de T_σ dans l'ordre lexicographique.
   (c) Donner la permutation, sous forme vectorielle, dont le tableau d'inversion est T'.

Question 2 : On dispose des lettres suivantes : 3 'A', 2 'B', 5 'C' et un 'D'.

1. Combien de mots de 11 lettres peut-on former ?
2. Combien de mots de 9 lettres peut-on former ?

Question 3 : En comptant de deux façons différentes le nombre de façons de partitionner un tableau de n cases en $k+1$ parties, de façon à ce que la première part ne soit jamais vide (les autres parts pouvant être vides), montrer l'identité suivante :

$$\sum_{l=1}^{n} \binom{n-l+k-1}{k-1} = \binom{n-1+k}{k}, \ k \geqslant 1.$$

Indication : on pourra soit compter en fonction de la longueur de la $1^{\text{ère}}$ *part, soit compter directement le nombre de partitions possibles.*

Question 4 : Calculer en fonction de n la somme suivante : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j(i-j)$.

Aide : faire le changement d'indice, $k = i - j$.

Exercice 2 : Placements (8 points)

Cinq hommes et six femmes cherchent à s'asseoir.

Question 1 : De combien de manières peut-on les placer sur une rangée de onze sièges ?

Question 2 : Et si on alterne hommes et femmes ?

Question 3 : Si on alterne hommes et femmes et qu'on veut les placer sur une rangée de douze sièges (la place vide ne compte pas pour une personne : s'il y a deux personnes encadrant la place vide, elles seront de sexe opposé) ?

Question 4 : Combien de placements sur une rangée de $2n$ sièges existent dans le cas où il y a n hommes, n femmes ? Si on les alterne ? Si on les alterne sur une rangée de $2n + 1$ sièges ?

Question 5 : On leur donne maintenant onze chapeaux, tous différents. Combien y a-t-il de manières de faire s'asseoir ces onze personnes sur une rangée de douze sièges, en leur distribuant ces chapeaux ?

Question 6 : De combien de manières, à rotation près, peut-on placer cinq hommes et six femmes sur deux tables rondes de cinq et six places ? Et si on sépare hommes et femmes ?

Question 7 : De combien de manières, à rotation près, peut-on placer cinq hommes et six femmes sur deux tables rondes de six places (une place à une des tables restant donc vide) ? Et si on sépare hommes et femmes ?

Question 8 : Il y a trois chapeaux verts et huit chapeaux rouges, et deux chapeaux de même couleur sont indiscernables. De combien de manières, à rotation près, peut-on placer cinq hommes et six femmes autour de deux tables rondes de six places, en donnant à chacun un chapeau ?

Question 9 : Rappeler la formule d'inclusion-exclusion.

Question 10 : Combien y a-t-il de manières de répartir huit parmi seize personnes en quatre groupes (de cardinaux non nécessairement égaux), de manière à ce qu'aucun groupe ne soit vide ? Vous pouvez considérer les ensembles $(A_i)_{i\in[1,4]}$, où A_i est l'ensemble des répartitions dans lesquelles le $i$ème groupe reste vide.

Tournez la page ⇒

Exercice 3 : Enumération de permutations (8 points)

Dans toute la suite, n désigne un entier non nul, et S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ un élément de S_n ; on rappelle qu'une inversion de σ est un couple (σ_i, σ_j) vérifiant : $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\sigma_i > \sigma_j$.
La permutation est dite *paire* (respectivement *impaire*) si et seulement si le nombre des inversions est pair (respectivement impair).

Question 1 : Soient σ et σ' deux permutations de S_n tels que σ' est obtenue à partir de σ en échangeant deux éléments consécutifs de σ. Montrer que si σ est paire (respectivement impaire) alors σ' est impaire (respectivement paire).

Question 2 : Enumérer les permutations paires puis les permutations impaires de S_3 en indiquant pour chacune d'elles leurs inversions.

Soit σ un élément de S_n ; pour tout entier p de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, on note $\sigma^{[p]}$ l'élément de S_p obtenu en ne retenant dans σ que les entiers de $\{1, 2, \dots, p\}$.
exemple : si $\sigma = (8, 7, 2, 1, 6, 5, 4, 3)$, alors $\sigma^{[4]} = (2, 1, 4, 3)$ et $\sigma^{[3]} = (2, 1, 3)$.
Pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$ on définit $I(k) = 0$ si $\sigma^{[k-1]}$ est paire et $I(k) = 1$ sinon. Par convention, on pose $I(1) = I(2) = 0$.

Question 3 : Pour la permutation $\sigma = (8, 7, 2, 1, 6, 5, 4, 3)$, donner pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$ la valeur de $I(k)$.

Pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, on définit, quand c'est possible, l'opération $T(k)$ qui associe à une permutation σ une nouvelle permutation σ' de la façon suivante :
soit i le rang de k dans la permutation σ ($\sigma_i = k$) ;
si $I(k) = 0$, alors $T(k)$ consiste à échanger σ_i et σ_{i-1}, et n'est possible que si $i > 1$ et $\sigma_{i-1} < k$;
si $I(k) = 1$, alors $T(k)$ consiste à échanger σ_i et σ_{i+1}, et n'est possible que si $i < n$ et $\sigma_{i+1} < k$.

Question 4 : Pour la permutation $\sigma = (8, 7, 2, 1, 6, 5, 4, 3)$, quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $T(k)$ peut être effectuée ?

On considère l'algorithme $\mathcal{A}$ suivant transformant un élément de S_n en un autre :
Donnée : une permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de S_n
étape 1 : pour $k = 1$ jusqu'à n, calculer $I(k)$
étape 2 : soit m le plus grand entier pour lequel $T(m)$ peut être effectuée, faire $T(m)$

Question 5 : En partant de la permutation $(1, 2, 3, 4)$ de S_4, appliquer l'algorithme $\mathcal{A}$, puis répétitivement, appliquer $\mathcal{A}$ sur le résultat précédent obtenu jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Vérifier que l'on a engendré une et une seule fois tous les éléments de S_4.

Notre but est maintenant de montrer ce résultat en général, *i.e.* que l'application répétée de $\mathcal{A}$ en partant de la donnée initiale $(1, 2, \dots, n)$ permet de générer S_n tout entier sans répétition.

On notera $\mathcal{A}^i(\sigma)$ le résultat de l'application répétée i fois de l'algorithme $\mathcal{A}$ sur la donnée initiale σ.
Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$ un élément de S_{n-1} ; on note (n, σ) (respectivement (σ, n)) l'élément de S_n : $(n, \sigma) = (n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$ (respectivement $(\sigma, n) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, n)$).

Question 6 : Montrer que $\mathcal{A}^{n-1}(\sigma, n) = (n, \sigma)$ si σ est paire et que $\mathcal{A}^{n-1}(n, \sigma) = (\sigma, n)$ si σ est impaire.

Question 7 : Montrer que $\mathcal{A}(n, \sigma) = (n, \mathcal{A}(\sigma))$ si σ est paire et que $\mathcal{A}(\sigma, n) = (\mathcal{A}(\sigma), n)$ si σ est impaire.

Question 8 : Montrer que le seul élément de S_n à partir duquel $\mathcal{A}$ n'est pas applicable est $(2, 1, 3, 4, \dots, i, i+1, \dots, n)$.

Question 9 : Déduire de ce qui précède le résultat annoncé.