Examen de Combinatoire

Lundi 10 janvier 2011

Durée : 3 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le barême est indicatif et est noté sur 28, mais sera ramené à 20.
Pensez à bien justifier vos réponses.

Problème de comptage (10 points)

Un groupe de 6 femmes et 5 hommes vont au cinéma et ils s'installent sur une rangée de 11 places. Combien ont-ils de façons de s'installer sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Les femmes et les hommes sont alternés.
3. Les femmes sont groupées ensemble et les hommes aussi.
4. Les hommes et femmes se placent indifferement sauf que la femme F_i et l'homme H_j ne veulent pas être assis l'un à côté de l'autre.
5. Les femmes et les hommes sont alternés et la femme F_i et l'homme H_j ne veulent pas être assis l'un à côté de l'autre.
6. Les femmes et les hommes sont groupés ensemble et l'homme H_k ne veut pas être assis à coté de l'homme H_l.

   Ensuite ils vont au restaurant et ils ne trouvent pas de table pour 11. Il décident de s'installer alors sur une table ronde de 6 et sur une table ronde de 5. Combien de façons ont ils de s'installer (en considérant égales les configurations à rotation prés) sachant que :

7. Il n'y a pas de restrictions.
8. Les femmes sont assises à une table et les hommes à l'autre.
9. Les femmes sont assises à une table, les hommes à l'autre et l'homme H_i n'est pas à coté de l'homme H_l.
10. Les hommes et les femmes se placent indéfferement sauf que la femme F_i et l'homme H_j ne sont pas assis l'un à coté de l'autre. (Attention, deux cas possibles !)

Le coefficient binomial (5 points)

On considère une séquence de n cases,

1. On appelle $S_{n,1}$ (respectivement $S_{n,2}$) l'ensemble des séquences de n cases dont une est (respectivement deux sont) coloriée(s). Quel est le cardinal de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$?
2. On définit l'application suivante : étant données deux séquences distinctes s_1 appartenant à $S_{n,1}$ et s_2 appartenant à $S_{n,2}$, on obtient une nouvelle séquence t de n cases selon la règle suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n$, la i-ème case de t est coloriée si la i-ème case de s_1 ou de s_2 est coloriée. On note T_n l'image de cette application, autrement dit l'ensemble des configurations t qu'on peut obtenir à partir de deux séquences quelconques s_1 et s_2 de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
   (a) Dessiner toutes les configurations possibles de $S_{n,1}$ pour $n = 1, 2, 3$ et toutes les configurations possibles de $S_{n,2}$ pour $n = 2, 3$.
   (b) En utilisant l'application ci-dessus dessiner toutes les configurations possibles de T_n pour $n = 3$.
   (c) Decrire l'ensemble T_n pour n quelconque ?
   (d) Quelle est le cardinal de T_n ?
   (e) Modifier l'application ci-dessus pour expliquer la formule suivante, pour $n \geq 3$:

$$n \cdot \binom{n}{2} \;=\; 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3}.$$

   En particulier décrire les configurations qui sont comptées respectivement par la partie gauche et la partie droite de la formule et la bijection entre les deux.

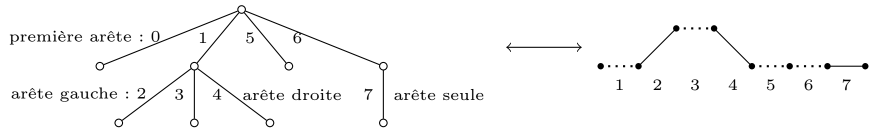
Le principe d'inclusion-exclusion (5 points)

1. Donner la formule d'inclusion-exclusion pour n ensembles.
2. Soit S_i, pour $i = 1, \ldots, n-2$, l'ensemble des permutations σ de $1, \ldots, n$ telles que $\sigma(i) = i + 2$ et soit $|S_i|$ son cardinal. Calculer $|S_i|$, c.à.d. le nombre de permutations de longueur n ayant le i-ème élément égal à $i + 2$.
3. Calculer $|S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}|$ où $S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$ est l'ensemble des permutations σ de $1, \ldots, n$ telles que $\sigma(i_k) = i_k + 2$, avec $i_k \neq n-1$ et $i_k \neq n$, pour tout $k = 1, \ldots, p$.
4. En utilisant la formule d'inclusion-exclusion, calculer le nombre de permutations σ de $1, \ldots, n$ telles qu'il existe au moins une position $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ où $\sigma(i) = i + 2$.
5. Montrer que le nombre de permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma(i) \neq i+2$ pour tout $i = 1, \ldots, n-2$ est :
$$\sum_{p=0}^{n-2} (-1)^p \frac{(n-2)!}{p!}(n-p)(n-p-1).$$
6. Donner la formule pour le nombre de permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\forall 1 \leqslant i \leqslant n-k$, $\sigma(i) \neq i + k$, où $k = 0, \ldots, n-1$.

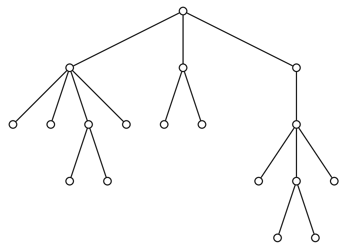
Arbres et chemins 2-Motzkin (8 points)

Un chemin de Motzkin est un chemin commençant en (0,0), terminant sur l'axe des abscisses, ne passant jamais au-dessous de l'axe des abscisses et formé de pas *nord-est*, $(1,1)$, *sud-est*, $(1,-1)$ et *est*, $(1,0)$.

1. Combien y-a-t'il de chemins de Motzkin de longueur 1, 2 et 3 (les dessiner) ?
2. Un chemin 2-Motzkin est un chemin de Motzkin où les pas *est* peuvent être de deux types, trait plein ou pointillé.
   (a) Déduire de la question 1 le nombre de chemins 2-Motzkin de longueur 1, 2 et 3.
   (b) On appelle arête gauche (resp. droite) d'un arbre planaire, toute arête de l'arbre la plus à gauche (resp. la plus à droite) parmi ses arêtes soeurs.
   Les chemins 2-Motzkin sont en bijection avec les arbres planaires. Etant donné un arbre planaire à n arêtes, on obtient un chemin 2-Motzkin en effectuant un parcours préfixe de l'arbre. Partant de la racine, on ignore la première arête et pour chaque arête rencontrée ensuite pour la première fois on dessine :
   – un pas *nord-est* pour une arête gauche,
   – un pas *sud-est* pour une arête droite,
   – un pas *est*, trait plein, pour une arête seule,
   – un pas *est*, trait pointillé, pour toute autre arête.
   Attention, étant donné que la première arête est ignorée, si celle-ci n'est pas seule alors l'arête soeur la plus à droite n'est pas considérée comme une arête droite. Dans l'exemple ci-dessous, l'arête 0 est la première arête, l'arête 6 est son arête soeur la plus à droite, mais donne un pas *est* pointillé.



   i. Dessiner le chemin obtenu pour l'arbre planaire suivant :



   ii. Montrer que toute arbre planaire donne par cette bijection un chemin 2-Motzkin.
   iii. Quelle est la longueur d'un chemin obtenu par cette bijection lorsque l'arbre à n arêtes ?
   iv. Décrire la bijection inverse qui permet de passer d'un chemin 2-Motzkin à un arbre planaire.
   v. En déduire le nombre de chemins 2-Motzkin de longueur n (on vous rappelle que les arbres planaires avec m arêtes sont en bijection avec les chemins de Dyck de longueur $2m$).