NOM : Prénom :

Question de Cours. 1. On considère l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Quel est le nombre de permutations, de transpositions, d'involutions de $[n]$?

2. Soient $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$. Quel est le nombre de permutations de $[n]$ dont la décomposition en cycles a n_i cycles de longueur i pour tout $i \in [p]$?

Expliquer vos réponses.

Exercice 1. On note $\mathbb{X}(k, n)$ l'ensemble des sous-ensembles de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ à k éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathbb{X}(k, n)$? Donner une formule en utilisant des factorielles.
2. Montrer que $\mathbb{X}(k, n) = \mathbb{X}(k, n-1) \ \cup \ \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathbb{X}(k-1, n-1)\}$.
3. En déduire que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
4. En utilisant la question 3, donner un algorithme récursif pour générer l'ensemble $\mathbb{X}(k, n)$.
5. Faites tourner votre algorithme sur le calcul de $\mathbb{X}(3, 5)$.

Tourner la page.

Exercice 2. Un chemin de Dyck de longueur n est un chemin dans le plan commençant à l'origine $(0, 0)$, terminant en $(n, 0)$, restant dans le demi-plan $y \geq 0$ et n'utilisant que des pas nord-est $(1, 1)$ et des pas sud-est $(1, -1)$. On note D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n, et d_n son cardinal.

1. Montrer que tous les chemins de Dyck ont longueur paire.
2. Dessiner tous les chemins de Dyck de longueur $2, 4, 6$.
3. Montrer qu'un chemin de Dyck ne peut toucher l'axe horizontal $y = 0$ qu'en des points d'abscisse paire. On note $D_{n,p}$ l'ensemble des chemins de Dyck dont le premier retour à l'axe vertical se situe au point d'abscisse $2p$. Montrer que $D_{2n} = \bigcup_{p=1}^{n} D_{2n,p}$.
4. En déduire que
$$d_{2n} = \sum_{p=1}^{n} d_{2p-2} d_{2n-2p},$$
(où par convention, $d_0 = 1$).