

NOM :

Prénom :

**Question de Cours.** Donner la formule d'inclusion – exclusion pour calculer le cardinal de l'union de  $n$  ensembles finis  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Que donne cette formule pour trois ensembles ?

**Exercice 1.** 1. Rappeler la formule du binôme de Newton et en donner une explication rapide.

2. En dérivant la formule du binôme pour  $(1 + X)^n$ , montrer que

$$n(n-1) \cdots (n-k)2^{n-k-1} = \sum_{i=0}^n i(i-1)(i-2) \cdots (i-k) \binom{n}{i},$$

lorsque  $n \geq k$ .

3. Trouver  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  tels que  $i^3 = \alpha i(i-1)(i-2) + \beta i(i-1) + \gamma i$ .

4. En déduire la valeur de  $\sum_{i=0}^n i^3 \binom{n}{i}$ .

**Exercice 2.** Soient  $n, k, p$  trois entiers  $\geq 0$ .

1. Quel est le nombre de  $k$ -uplets  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$  tels que  $x_i \geq 1$  et  $x_1 + \dots + x_k = n$ ? Expliquer votre réponse.
2. Quel est le nombre de  $k$ -uplets  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$  tels que  $x_i \geq p$  et  $x_1 + \dots + x_k = n$ ? On distinguera le cas où  $p = 0$  du cas où  $p > 0$ . Expliquer rapidement vos formules.