EXAMEN DU COURS 2-38-2 DU MPRI 2014
ALGORITHMIQUE ET COMBINATOIRE DES GRAPHES GÉOMÉTRIQUES
MOITIÉ DU COURS DE VINCENT PILAUD

Le polycopié et vos notes manuscrites de cours sont autorisées. Appareils électroniques interdits. **Pensez à rendre deux copies séparées pour les deux moitiés du cours.**

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Il vous est possible de passer les questions qui vous bloquent. Il est toutefois recommandé d'essayer plutôt de traiter une partie cohérente du sujet, même incomplète, que de traiter sporadiquement les questions qui semblent plus faciles.

Une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation de vos solutions.

1. Zonotopes graphiques

On considère un graphe G dont les sommets sont étiquetés par $[n] = \{1, \dots, n\}$. À toute arête $e = \{i, j\}$ de G, on associe l'hyperplan $H_e := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}$. On note $\mathcal{H}(G)$ l'arrangement des hyperplans H_e pour $e \in G$. On appelle *chambre de l'arrangement* $\mathcal{H}(G)$ les composantes connexes du complémentaire de l'union des hyperplans de $\mathcal{H}(G)$.

(1) Dessiner l'intersection de l'hyperplan $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ avec les arrangements d'hyperplans $\mathcal{H}(G)$ lorsque G est le chemin $1 - 2 - 3$ ou un triangle.

(2) Montrer que les chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ correspondent aux orientations acycliques de G (*i.e.* les orientations des arêtes de G qui n'induisent pas de cycle orienté).
En particulier, montrer que les chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(K_n)$ du graphe complet K_n correspondent aux permutations de $[n]$.

(3) Montrer que si $G \subseteq G'$, alors toute chambre de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ est l'union de certaines chambres de $\mathcal{H}(G')$.
En particulier, montrer que la chambre de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ correspondant à une orientation acyclique O de G est l'union des chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(K_n)$ correspondant aux extensions linéaires de O (*i.e.* aux permutations π de $[n]$ telles que $\pi(i) < \pi(j)$ pour toute arête $i \to j$ dans O).

On rappelle que la somme de Minkowski de deux polytopes $A, B \subset \mathbb{R}^n$ est le polytope

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}.$$

On rappelle aussi que l'éventail normal de $A+B$ est le raffinement commun des éventails normaux de A et B. On appelle *zonotope graphique* de G le polytope $\mathsf{Zono}(G)$ obtenu comme somme de Minkowski de tous les segments $[e_i, e_j]$ pour $\{i, j\}$ arête de G, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(4) Dessiner les zonotopes graphiques $\mathsf{Zono}(G)$ lorsque G est le chemin $1-2-3$ ou le triangle. Comment s'appelle le zonotope graphique $\mathsf{Zono}(K_n)$ du graphe complet K_n?

(5) Montrer que l'éventail normal de $\mathsf{Zono}(G)$ est l'éventail défini par l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{H}(G)$.

2. Distances entre points du plan

Dans cet exercice, on considère un ensemble $\mathbf{P}$ de p points du plan $\mathbb{R}^2$ et on considère les distances entre les points de $\mathbf{P}$. On utilisera le lemme des croisements :

Si un graphe simple (pas de boucles ni d'arêtes multiples) a n sommets et $m \geq 4n$ arêtes, alors tout dessin de G a au moins $m^3/64\,n^2$ croisements.

2.1. **Distances unités.** On note $\mathbb{U}(\mathbf{P})$ l'ensemble des paires de points $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}$ à distance unité, *i.e.* tels que $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = 1$. On veut évaluer le cardinal de $\mathbb{U}(\mathbf{P})$.

(1) Que vaut $|\mathbb{U}(\mathbf{P})|$ lorsque $\mathbf{P}$ est l'ensemble des sommets d'une grille unitaire de taille $a \times b$? Que peut valoir $|\mathbb{U}(\mathbf{P})|$ lorsque $\mathbf{P}$ est l'ensemble des sommets d'un n-gone régulier ?

Pour évaluer $|\mathbb{U}(\mathbf{P})|$, on considère le multigraphe topologique $\mathcal{U}(\mathbf{P})$ dont les sommets sont les points de $\mathbf{P}$ et les arêtes sont les arcs reliant deux points de $\mathbf{P}$ sur les cercles unités centrés en les points de $\mathbf{P}$. Voir figure 1 (gauche).

(2) Quel est le nombre de sommets et d'arêtes du multigraphe $\mathcal{U}(\mathbf{P})$?
(3) Montrer qu'au plus deux arêtes de $\mathcal{U}(\mathbf{P})$ partagent les mêmes extrémités. En déduire que le graphe $\bar{\mathcal{U}}(\mathbf{P})$ obtenu en supprimant les arêtes multiples de $\mathcal{U}(\mathbf{P})$ a au moins $|\mathbb{U}(\mathbf{P})|$ arêtes.
(4) On suppose d'abord que tout point de $\mathbf{P}$ a au moins deux autres points de $\mathbf{P}$ à distance 1. En déduire que le graphe $\bar{\mathcal{U}}(\mathbf{P})$ n'a pas de boucle. Sous cette hypothèse, appliquer le lemme des croisements à $\bar{\mathcal{U}}(\mathbf{P})$ pour montrer que $|\mathbb{U}(\mathbf{P})| \le 4\,p^{4/3}$.
(5) Montrer que le résultat reste vrai pour tout ensemble de points $\mathbf{P}$.

2.2. **Lemme des croisements pour les graphes à multiplicité bornée.** Les hypothèses du lemme des croisements imposent que le graphe soit simple, *i.e.* sans boucles ni arêtes multiples. On montre ici comment se passer de ces hypothèses sous certaines conditions. On considère un graph G avec n sommets et m arêtes, et on note $\mathrm{cr}(G)$ le nombre de croisements de G, *i.e.* le plus petit nombre possible de croisements dans un dessin de G dans le plan $\mathbb{R}^2$. On suppose que G a des arêtes multiples mais pas de boucles.

(1) Montrer que $\mathrm{cr}(G)$ peut être nul, même quand m est grand. Autrement dit, il ne peut pas y avoir de lemme des croisements pour les multigraphes arbitraires.

On suppose à partir de maintenant que la multiplicité des arêtes de G est au plus k. On note H le graphe simple aléatoire dont les sommets sont ceux de G et les arêtes sont obtenues par le processus aléatoire suivant : on garde d'abord indépendamment chaque arête de G avec probabilité $1/k$, puis on efface les éventuelles arêtes multiples restantes.

(2) En observant que la probabilité qu'une arête de G survive dans H est au plus $1/k$, montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{cr}(H)) \le \mathrm{cr}(G)/k^2$.
(3) Montrer que la probabilité qu'une arête e de G survive dans H est au moins $\frac{1}{k}\big(1 - \frac{1}{k}\big)^{\mu-1}$, où μ désigne la multiplicité de e, *i.e.* le nombre d'arêtes de G qui partagent les mêmes extrémités que e.
(4) En déduire que $\mathbb{E}(m(H)) \ge m(G)/3\,k$. On montrera d'abord que $\big(1 - \frac{1}{k}\big)^{k-1} \ge 1/3$.
(5) En appliquant le lemme des croisements à H, montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{cr}(H)) \ge m(G)^3/12^3\,k^3\,n^2$ dès que $m(G) \ge 12\,k\,n$. On utilisera l'inégalité de convexité de Jensen : $\mathbb{E}(f(X)) \ge f(\mathbb{E}(X))$ pour une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(6) En déduire que si G est un graphe à n sommets, $m \ge 12\,k\,n$ arêtes dont la multiplicité est au plus k, alors le nombre de croisements de G est au moins $m^3/12^3\,k\,n^2$.

2.3. **Distances distinctes.** On considère un ensemble de points $\mathbf{P}$ dans $\mathbb{R}^2$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathbb{D}(\mathbf{P}) = \{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \mid \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}\}$ des distances distinctes entre deux points de $\mathbf{P}$. On veut évaluer le cardinal de $\mathbb{D}(\mathbf{P})$.

(1) Que vaut $|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$ lorsque $\mathbf{P}$ est l'ensemble des sommets d'un n-gone régulier ?
(2) Montrer que $|\mathbb{D}(\mathbf{P})| \ge \binom{p}{2} / \max_{\lambda \in \mathbb{R}_{\ge 0}} |\mathbb{U}(\lambda\mathbf{P})|$ et en déduire que $|\mathbb{D}(\mathbf{P})| \ge p^{2/3}/8$.

Pour donner une meilleure borne sur $|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$, on considère le multigraphe topologique $\mathcal{D}(\mathbf{P})$ dont les sommets sont les points de $\mathbf{P}$ et les arêtes sont les arcs reliant deux points de $\mathbf{P}$ sur les cercles centrés en les points de $\mathbf{P}$ et de rayon dans $\mathbb{D}(\mathbf{P})$. Voir figure 1 (droite). On note $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$ le multigraphe obtenu à partir de $\mathcal{D}(\mathbf{P})$ en oubliant les arcs situés sur des cercles contenant au plus 2 points de $\mathbf{P}$.

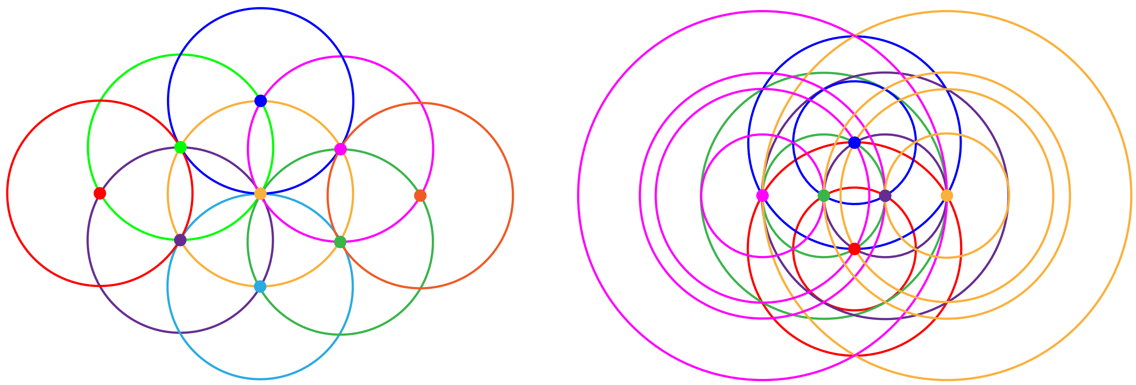

FIGURE 1. Les graphes $\mathcal{U}(\mathbf{P})$ (gauche) et $\mathcal{D}(\mathbf{P})$ (droite) pour des ensembles de points $\mathbf{P}$ du plan.

(3) Montrer que le multigraphe $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$ a p sommets, au moins $p(p-1-2\,|\mathbb{D}(\mathbf{P})|)$ arêtes, au plus $p^2\,|\mathbb{D}(\mathbf{P})|^2$ croisements, pas de boucle, et que la multiplicité de ses arêtes est bornée par $2\,|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$.

(4) Quel est l'ordre de grandeur de la borne sur $|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$ obtenue en appliquant directement le lemme des croisements de la partie 2.2 sur le multigraphe $\mathcal{D}(\mathbf{P})$? Comparer avec la question (3).

Pour améliorer notre borne sur $|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$, on va traiter séparément les arêtes de forte multiplicité.

(5) Montrer que pour tous $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}$, le nombre de points de $\mathbf{P}$ sur la médiatrice de $\mathbf{pq}$ est au moins la multiplicité de l'arête $\mathbf{pq}$ dans $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$.

(6) En déduire que si $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$ a t arêtes dont la multiplicité est au moins k, alors il existe au moins $t/|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$ droites distinctes contenant chacune au moins k points de $\mathbf{P}$.

(7) En utilisant le théorème de Szemerédi-Trotter vu en cours, montrer qu'il existe au plus $O(p^2/k^2 + p)$ droites distinctes contenant chacune au moins k points de $\mathbf{P}$.

(8) En déduire que le nombre d'arêtes de $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$ dont la multiplicité est au moins k est un $O\big(|\mathbb{D}(\mathbf{P})|\,(p^2/k^2 + p)\big)$.

(9) On fixe $k = \sqrt{|\mathbb{D}(\mathbf{P})|}$. On considère le graphe obtenu à partir de $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{P})$ en supprimant toutes les arêtes de multiplicité supérieures à k. Montrer que ce graphe a p sommets, $O(p^2)$ arêtes de multiplicité au plus k, et au plus $p^2\,|\mathbb{D}(\mathbf{P})|^2$ croisements. En lui appliquant le lemme des croisements pour les graphes à multiplicité bornée, montrer que $|\mathbb{D}(\mathbf{P})|$ est au moins de l'ordre de $p^{4/5}$.