

**FEUILLE D'EXERCICES, COURS MPRI 2-38-1**  
**À RENDRE LE JEUDI 6 OCTOBRE 2016**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$  une valuation sur ses sommets. Pour toute orientation  $O$  des arêtes de  $G$ , on note  $\text{out}_O : V \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction qui à un sommet  $v \in V$  associe le nombre d'arêtes sortantes dans l'orientation  $O$  au point  $v$ . On dit que  $O$  est une  $\alpha$ -orientation de  $G$  si  $\text{out}_O(v) = \alpha(v)$  pour tout sommet  $v \in V$ .

**[Q 0.1]** Montrer que si  $O$  est une  $\alpha$ -orientation de  $G$ , et  $O'$  est obtenue en retournant toutes les arêtes le long d'un cycle orienté de  $O$ , alors  $O'$  est également une  $\alpha$ -orientation de  $G$ . Cette opération est illustrée sur la figure 1.

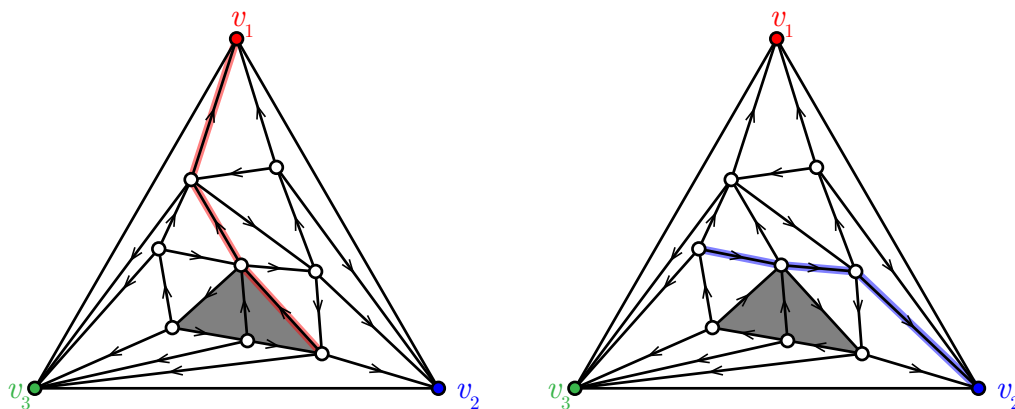


FIGURE 1. Deux 3-orientations d'une même triangulation, obtenues l'une de l'autre en retournant le cycle orienté qui borde les faces grisées. Deux chemins centraux sont surlignés.

1. 3-ORIENTATIONS ET FORÊTS DE SCHNYDER

Soit  $T$  une triangulation plane dont on note  $v_1, v_2, v_3$  les sommets sur la face externe. On se propose de montrer dans cet exercice qu'il y a une bijection entre les forêts de Schnyder de  $T$  (où on n'oriente pas les arêtes externes) et les 3-orientations de  $T$  (*i.e.* les  $\alpha$ -orientations avec  $\alpha(v) = 3$  pour  $v \in V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$  et  $\alpha(v_i) = 0$ ). Par définition, une forêt de Schnyder de  $T$  fournit une 3-orientation (il suffit d'oublier les couleurs). Réciproquement, considérons une 3-orientation  $O$  et une arête  $e$  de  $T$ . On définit le *chemin central* de  $e$  dans  $O$  comme le chemin orienté dans  $O$  qui part de  $e$  et laisse à chaque sommet une arête sortante de chaque côté. Autrement dit, à chaque sommet de ce chemin, l'arête entrante se trouve dans le secteur angulaire opposé de l'arête sortante. Des chemins centraux sont illustrés sur la figure 1.

- [Q 1.2]** Montrer qu'un chemin central dans  $O$  ne revient jamais sur ses pas (indication : on supposera au contraire qu'un chemin central forme un cycle et on montrera que la formule d'Euler empêche que tous les sommets à l'intérieur de ce cycle aient 3 arêtes sortantes). En déduire que tout chemin central termine sur l'un des trois sommets  $v_1, v_2, v_3$ .
- [Q 1.3]** Montrer que deux chemins centraux issus d'un même sommet ne peuvent plus se rencontrer (indication : même méthode que la question précédente).
- [Q 1.4]** En déduire que si on colorie chaque arête  $e$  de la couleur du sommet  $v_i$  atteint par le chemin central de  $e$  dans  $O$ , alors on obtient une décomposition de  $O$  en une forêt de Schnyder.
- [Q 1.5]** Dessiner les forêts de Schnyder correspondant aux 3-orientations de la figure 1.

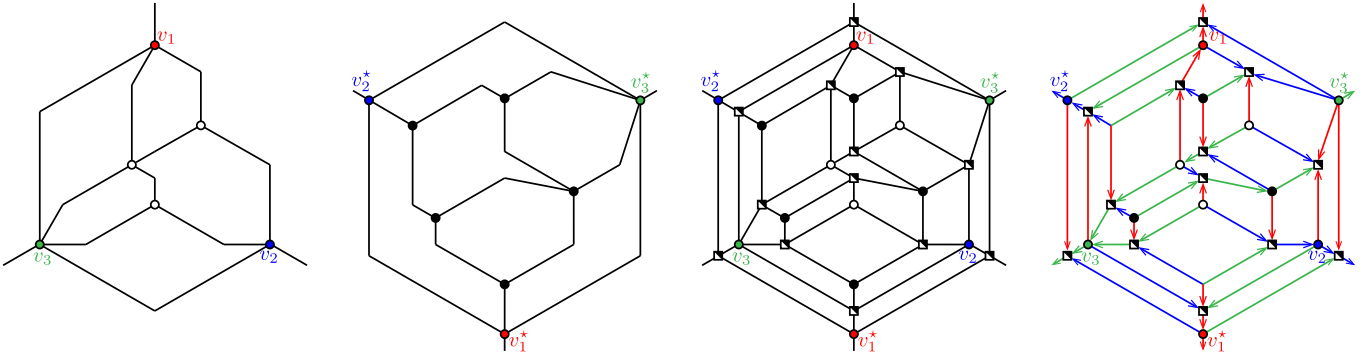


FIGURE 2. Une carte  $M$  (gauche), sa carte duale suspendue  $M^*$  (milieu gauche), sa carte primale-duale  $\tilde{M}$  où  $v_\infty$  est à l'infini (milieu droit), et une  $\tilde{\alpha}$ -orientation de  $\tilde{M}$  avec les forêts de Schnyder de  $M$  et  $M^*$  correspondantes (droite).

On essaye maintenant de voir comment étendre cette correspondance au cas général des cartes 3-connexes (qui ne sont plus des triangulations). Soit  $M = (V, E)$  une carte 3-connexe avec 3 sommets marqués  $v_1, v_2, v_3$  sur la face externe et 3 demi-arêtes sortantes vers la face externe en ces sommets. Soit  $M^* = (V^*, E^*)$  la *carte duale suspendue* de  $M$ , c'est-à-dire la carte duale de  $M$  où on a éclaté le sommet dual de la face externe en trois sommets duaux  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  correspondants aux trois secteurs entre les demi-arêtes de la face externe de  $M$ , et où on a relié les trois nouveaux sommets  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  comme sur la figure 2 (milieu gauche). Soit  $\tilde{M} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  la *carte primale-duale* de  $M$ , i.e. la carte planaire obtenue en superposant  $M$  et  $M^*$ , en ajoutant un sommet  $w_e$  à chaque intersection d'une arête  $e$  de  $M$  avec son arête duale  $e^*$  de  $M^*$ , et en reliant  $v_1, v_2, v_3, v_1^*, v_2^*, v_3^*$  à un sommet externe  $v_\infty$ . En particulier,  $\tilde{V} = V \cup V^* \cup \{w_e \mid e \in E\} \cup \{v_\infty\}$ . Voir figure 2.

[Q 1.6] Dessiner deux forêts de Schnyder dont l'orientation sous-jacente est celle de la figure 3.

[Q 1.7] Montrer qu'une forêt de Schnyder  $W$  de  $M$  et sa forêt duale  $W^*$  sur  $M^*$  définissent une  $\tilde{\alpha}$ -orientation sur  $\tilde{M}$  où  $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{N}$  est donnée par :

- $\tilde{\alpha}(v) = 3 = \tilde{\alpha}(v^*)$  pour tous sommets  $v \in V$  et  $v^* \in V^*$ ,
- $\tilde{\alpha}(w_e) = 1$  pour toute arête  $e \in E$ ,
- $\tilde{\alpha}(v_\infty) = 0$  pour le sommet externe.

[Q 1.8] Vérifier que les deux  $\tilde{\alpha}$ -orientations de la carte primale-duale  $\tilde{M}$  correspondantes aux deux forêts de Schnyder de la carte  $M$  de la figure 3 données à la question Q 1.6 sont distinctes.

En fait, avec les mêmes méthodes que les questions [Q 1.2] à [Q 1.4], on peut montrer qu'il y a une bijection entre les forêts de Schnyder d'une carte  $M$ , les forêts de Schnyder de sa carte duale suspendue  $M^*$ , et les  $\tilde{\alpha}$ -orientations de sa carte primale-duale  $\tilde{M}$ . Pour plus de détails, on conseille la lecture de l'article

Stefan Felsner. *Lattice Structures from Planar Graphs*. *Electron. J. Combin.* 11, #R15, 2004.

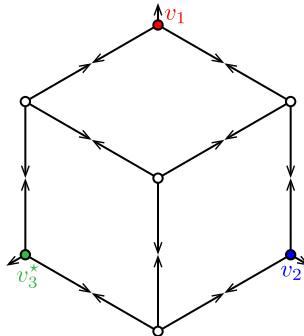


FIGURE 3. Une biorientation d'une carte  $M$  qui correspond à deux forêts de Schnyder de  $M$ .

## 2. 3-ORIENTATIONS DES TRIANGULATIONS EMPILÉES

On dit qu'une triangulation  $T$  est *empilée* si :

- $T$  est réduite à un triangle, ou
- $T$  s'obtient à partir d'une triangulation empilée  $T'$  en raffinant un triangle  $pqr$  en trois triangles  $pqt$ ,  $qrt$ ,  $prt$  (on peut imaginer qu'on empile un tétraèdre aplati  $pqrt$  sur le triangle  $pqr$ ).

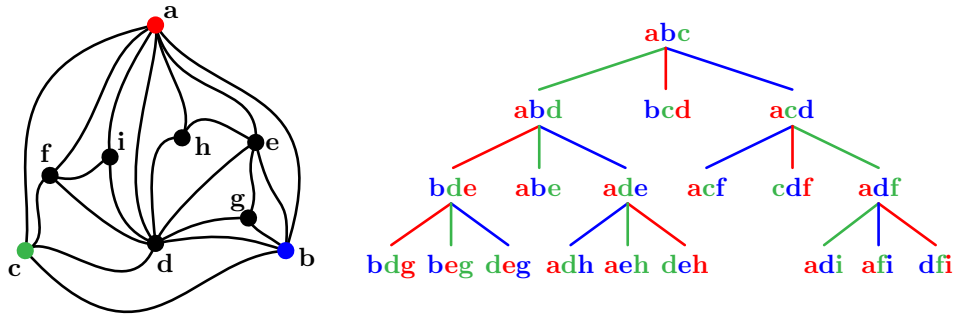


FIGURE 4. Une triangulation empilée (gauche) et son arbre de construction (droite).

On appelle *arbre de construction* de  $T$  l'arbre dont les noeuds correspondent aux triangles de  $T$  et dont les fils du triangle  $pqr$  sont les trois triangles  $pqt$ ,  $qrt$ ,  $prt$  qui le raffinent. Notez le coloriage utilisé pour les arêtes et les trois lettres de chaque sommet dans cet arbre. Voir figure 4.

- [Q 2.1] Quel est le nombre d'arêtes et de triangles d'une triangulation empilée à  $n + 3$  sommets ? Vos résultats correspondent-ils à ce que donne la formule d'Euler ?
- [Q 2.2] Montrer qu'une triangulation empilée admet une unique forêt de Schnyder. On décrira l'unique étiquetage des angles de Schnyder et l'unique forêt de Schnyder.
- [Q 2.3] Exprimer les coordonnées barycentriques des sommets du plongement de Schnyder d'une triangulation empilée en fonction de son arbre de construction. Illustrer ce plongement sur la triangulation de la figure 4 (gauche).

Réciproquement, on veut montrer que toute triangulation qui n'a qu'une seule forêt de Schnyder est empilée. Pour cela, on utilise la correspondance entre forêts de Schnyder et 3-orientations vue dans la partie précédente. Supposons donc qu'une triangulation  $T$  a une unique 3-orientation  $O$ .

- [Q 2.4] Montrer que  $O$  n'a pas de cycle orienté, et donc qu'il existe au moins un sommet  $v_o$  sans arête entrante dans  $O$ . En déduire que  $v_o$  est de degré 3.
- [Q 2.5] En supprimant ce sommet et en travaillant par récurrence, montrer que  $T$  est empilée.

3.  $\alpha$ -ORIENTATIONS ET ARBRES COUVRANTS

Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire et  $G^* = (V^*, E^*)$  son graphe dual (on note  $e^*$  l'arête duale d'une arête  $e$ ). Un *arbre couvrant* de  $G$  est un sous-graphe de  $G$  qui est un arbre et dont les sommets couvrent tous les sommets de  $G$ . Voir figure 5 (milieu).

- [Q 3.1] Montrer que  $T$  est un arbre couvrant de  $G$  si et seulement si  $T^* := \{e^* \mid e \in E \setminus T\}$  est un arbre couvrant de  $G^*$ .

On note  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  le graphe planaire obtenu en superposant le graphe  $G$  et son dual  $G^*$  et en ajoutant un sommet  $w_e$  à chaque intersection d'une arête  $e$  de  $G$  avec son arête duale  $e^*$  de  $G^*$ . On fixe un sommet racine  $v_o \in V$  et un sommet racine  $v_o^* \in V^*$  dans la même face de  $\tilde{G}$ . Voir figure 5 (droite).

- [Q 3.2] On considère un arbre couvrant  $T$  de  $G$  et son arbre couvrant dual  $T^*$  de  $G^*$ . On oriente  $T$  vers sa racine  $v_o$  et  $T^*$  vers sa racine  $v_o^*$ . On considère l'orientation  $O$  de  $\tilde{G}$  obtenue comme suit (voir figure 5 (droite)) :

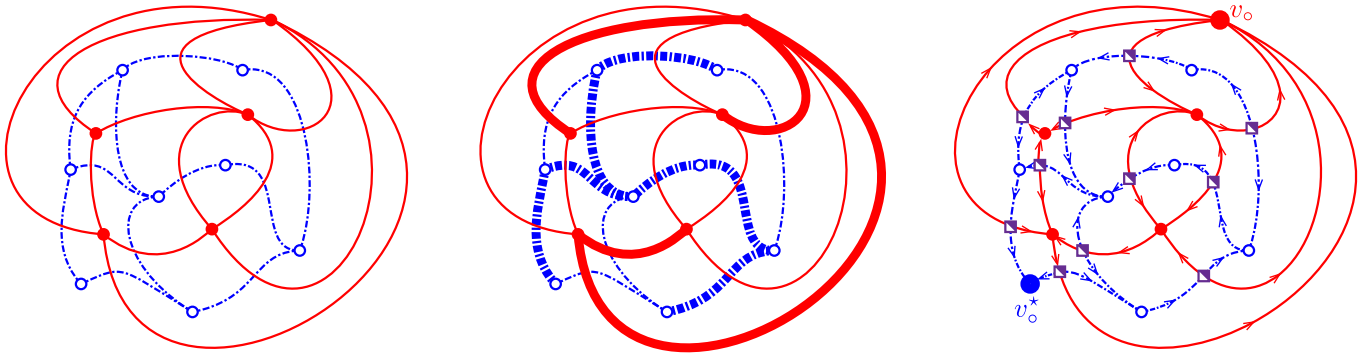


FIGURE 5. Un graphe  $G$  et son graphe dual  $G^*$  (gauche). Un arbre couvrant  $T$  de  $G$  et son arbre couvrant dual  $T^*$  de  $G^*$  (milieu). L'orientation correspondante de  $\tilde{G}$  (droite).

- pour toute arête  $e = (u, v)$  de  $T$  orientée de  $u$  vers  $v$ , les arêtes  $(u, w_e)$  et  $(w_e, v)$  sont orientées dans la même direction,
- pour toute arête  $e^* = (u^*, v^*)$  de  $T^*$  orientée de  $u^*$  vers  $v^*$ , les arêtes  $(u^*, w_e)$  et  $(w_e, v^*)$  sont orientées dans la même direction,
- toutes les autres arêtes sont orientées depuis leur sommet dans  $\{w_e \mid e \in E\}$  vers leur sommet dans  $V \cup V^*$ .

Montrer que  $O$  est une  $\tilde{\alpha}$ -orientation de  $\tilde{G}$  pour la valuation  $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

- $\tilde{\alpha}(v) = 1 = \tilde{\alpha}(v^*)$  pour tous sommets  $v \in V \setminus \{v_o\}$  et  $v^* \in V^* \setminus \{v_o^*\}$ ,
- $\tilde{\alpha}(w_e) = 3$  pour toute arête  $e \in E$ ,
- $\tilde{\alpha}(v_o) = 0 = \tilde{\alpha}(v_o^*)$  pour les sommets racines.

- [Q 3.3] Réciproquement, étant donnée une  $\tilde{\alpha}$ -orientation  $O$  de  $\tilde{G}$ , on construit des sous-ensembles  $T$  et  $T^*$  de  $\tilde{E}$  comme suit : pour tout  $w_e$ , on considère l'unique arête entrante de  $w_e$  et on inclut  $e$  dans  $T$  si elle provient d'un sommet de  $V$  et  $e^*$  dans  $T^*$  si elle provient d'un sommet de  $V^*$ . Montrer que  $T$  est un arbre couvrant de  $G$  et que  $T^*$  est son arbre couvrant dual de  $G^*$  (indication : on supposera que  $T$  a un cycle et on utilisera la formule d'Euler pour trouver une contradiction).
- [Q 3.4] En déduire qu'il existe une bijection  $\phi$  (resp.  $\phi^*$ ) entre les  $\tilde{\alpha}$ -orientations de  $\tilde{G}$  et les arbres couvrants de  $G$  (resp. et les arbres couvrants de  $G^*$ ).
- [Q 3.5] Décrire le résultat de l'opération de retournement d'une face orientée dans une  $\tilde{\alpha}$ -orientation  $O$  de  $\tilde{G}$  sur l'arbre couvrant  $\phi(O)$ .