FEUILLE D'EXERCICES, COURS MPRI 2-38-1

À RENDRE LE JEUDI 5 NOVEMBRE 2015

1. Zonotopes graphiques

On considère un graphe G dont les sommets sont étiquetés par $[n] = \{1, \dots, n\}$. À toute arête $e = \{i, j\}$ de G, on associe l'hyperplan $H_e := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}$. On note $\mathcal{H}(G)$ l'arrangement des hyperplans H_e pour $e \in G$. On appelle *chambre de l'arrangement* $\mathcal{H}(G)$ les composantes connexes du complémentaire de l'union des hyperplans de $\mathcal{H}(G)$.

(1) Dessiner l'intersection de l'hyperplan $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ avec les arrangements d'hyperplans $\mathcal{H}(G)$ lorsque G est le chemin $1 - 2 - 3$ ou un triangle.

(2) Montrer que les chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ correspondent aux orientations acycliques de G (*i.e.* les orientations des arêtes de G qui n'induisent pas de cycle orienté).
En particulier, montrer que les chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(K_n)$ du graphe complet K_n correspondent aux permutations de $[n]$.

(3) Montrer que si $G \subseteq G'$, alors toute chambre de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ est l'union de certaines chambres de $\mathcal{H}(G')$.
En particulier, montrer que la chambre de l'arrangement $\mathcal{H}(G)$ correspondant à une orientation acyclique O de G est l'union des chambres de l'arrangement $\mathcal{H}(K_n)$ correspondant aux extensions linéaires de O (*i.e.* aux permutations π de $[n]$ telles que $\pi(i) < \pi(j)$ pour toute arête $i \to j$ dans O).

On rappelle que la somme de Minkowski de deux polytopes $A, B \subset \mathbb{R}^n$ est le polytope

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}.$$

On rappelle aussi que l'éventail normal de $A+B$ est le raffinement commun des éventails normaux de A et B. On appelle *zonotope graphique* de G le polytope $\mathsf{Zono}(G)$ obtenu comme somme de Minkowski de tous les segments $[e_i, e_j]$ pour $\{i, j\}$ arête de G, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(4) Dessiner les zonotopes graphiques $\mathsf{Zono}(G)$ lorsque G est le chemin $1-2-3$ ou le triangle. Comment s'appelle le zonotope graphique $\mathsf{Zono}(K_n)$ du graphe complet K_n?

(5) Montrer que l'éventail normal de $\mathsf{Zono}(G)$ est l'éventail défini par l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{H}(G)$.

On rappelle que le diamètre d'un polytope P est le nombre minimal $\delta(P)$ tel que toute paire de sommets de P peut être connectée par un chemin d'au plus $\delta(P)$ arêtes.

(6) Montrer que le diamètre du zonotope graphique $\mathsf{Zono}(G)$ est précisément le nombre d'arêtes de G.

2. Combinatoire des polytopes cycliques

On considère le polytope cyclique $C_d(n) = \operatorname{conv}\{\mu_d(t_i) \mid i \in [n]\}$ pour $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. On identifie un sous-ensemble $F \subseteq [n]$ avec l'ensemble de points $\{\mu_d(t_i) \mid i \in F\}$. On appelle *bloc* de $F \subseteq [n]$ les intervales de valeurs consécutives dans F, et on dit qu'un bloc est *interne* s'il ne contient ni 1 ni n.

(1) Montrer que le signe du déterminant de VanDerMonde

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ t_1 & \dots & t_d & r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^d & \dots & t_d^d & r^d \end{bmatrix}.$$

détermine de quel côté de l'hyperplan affine passant par F se situe un point $\mu_d(r)$.

(2) Rappeler et prouver rapidement la formule pour ce determinant.
(3) En déduire qu'un sous-ensemble $F \subseteq [n]$ de taille d détermine une facette de $C_d(n)$ si et seulement si tous ses blocs internes ont taille paire (critère de parité de Gale).
(4) En déduire les propriétés suivantes des polytopes cycliques :
    (a) $C_d(n)$ est neighborly, c'est-à-dire que tout sous-ensemble d'au plus $\lfloor d/2 \rfloor$ sommets détermine une face de $C_d(n)$.
    (b) Tous les polytopes cycliques $C_d(n)$ sont combinatoirement équivalents, *i.e.* la combinatoire de $C_d(n)$ ne dépend que de n et d, pas du choix initial de $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.
    (c) Le nombre de facettes de $C_d(n)$ est

$$f_{d-1}\big(C_d(n)\big) = \binom{n - \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} + \binom{n - 1 - \lceil \frac{d-1}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}.$$

(Indication : Montrer d'abord que le nombre de façons de choisir un sous-ensemble de $[n]$ de taille $2k$ tel que tous ses blocs soient de taille paire est $\binom{n-k}{k}$. Pour obtenir la formule sur $f_{d-1}\big(C_d(n)\big)$, distinguer ensuite les facettes en fonction de la parité de leur premier bloc.)