

**FEUILLE D'EXERCICES, COURS MPRI 2-38-1**  
**À RENDRE POUR LE 27 OCTOBRE 2014**

1. REPRÉSENTATIONS PAR CONTACT DE TRIANGLES

Un *système de contact de triangles* est un ensemble de triangles du plan d'intérieurs disjoints, mais qui peuvent avoir des contacts sommet – arête (les contacts sommet – sommet et arête – arête sont en revanche interdits). Un tel système est *maximal* si toute composante connexe bornée du complémentaire de l'union des triangles est adjacente à précisément 3 arêtes de triangles. On associe à un système de contact de triangles  $\mathcal{T}$  son *graphe de contact*  $\mathcal{T}^\#$ , dont les sommets correspondent aux triangles de  $\mathcal{T}$  et les arêtes relient les paires de triangles en contact. Voir figure 1 pour un exemple.

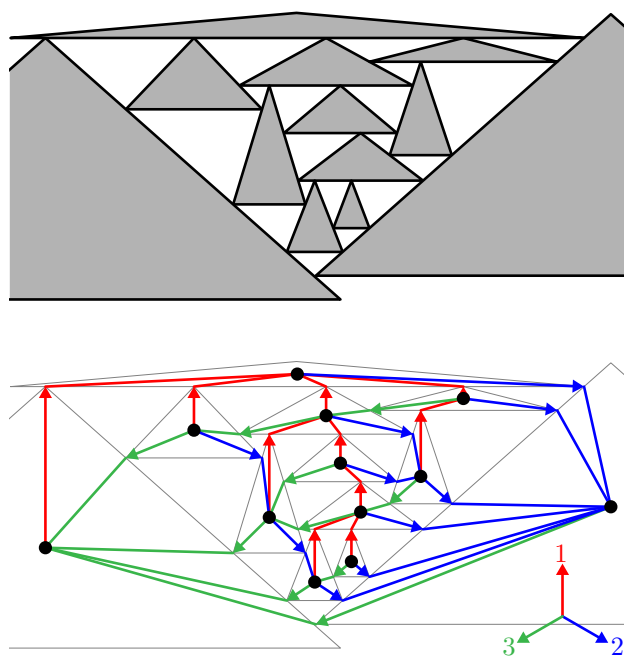


FIGURE 1. Un système de contact de triangles (haut) et son graphe de contact (bas).

**1.1. Des systèmes de contact de triangles maximaux vers les forêts de Schnyder.** On considère un système de contact de triangles maximal  $\mathcal{T}$ , et on oriente son graphe de contacts  $\mathcal{T}^\#$  comme suit : si un sommet de  $T$  touche une arête de  $T'$ , alors on oriente l'arête de  $\mathcal{T}^\#$  correspondante de  $T$  vers  $T'$ .

- (1) Montrer que tous les sommets internes de  $\mathcal{T}$  ont 3 arcs sortants (on utilisera que  $\mathcal{T}$  est maximal).
- (2) On suppose que  $\mathcal{T}^\#$  n'a que trois sommets externes. Montrer que l'on peut déduire de l'orientation de  $\mathcal{T}^\#$  une forêt de Schnyder sur  $\mathcal{T}^\#$  (on ne fera pas attention à l'orientation et à la coloration des arêtes externes de  $\mathcal{T}^\#$ ).

1.2. **Des forêts de Schnyder vers les systèmes de contact de triangles.** On se donne maintenant une carte triangulée  $G$  munie d'un ordre canonique  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sur  $G$ , c'est-à-dire que :

- $v_1 v_2$  est une arête de la face externe de  $G$ ,
- le sous-graphe  $G_k$  de  $G$  induit par  $v_1, \dots, v_k$  est une triangulation d'un disque,
- $v_{k+1}$  est sur la face externe de  $G_k$  et ses voisins dans  $G_k$  forment un interval du bord de  $G_k$ , de longueur au moins 2.

On note  $F = \{F_1, F_2, F_3\}$  la forêt de Schnyder construite à partir de cet ordre comme dans le cours. Les racines de  $F_1$  est de racine  $v_n$ , et les racines de  $F_2$  et  $F_3$  sont  $v_1$  et  $v_2$ . Dans la suite, on notera  $\pi_i(k)$  l'indice du père de  $v_k$  dans l'arbre  $F_i$ .

On construit alors un ensemble de triangles  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ , dont les bases sont toutes parallèles à l'axe horizontal, et tels que la base de  $T_k$  est à l'ordonnée  $k$  et son sommet est à l'ordonnée  $\pi_1(k)$  pour tout  $2 < k < n$ . La procédure est la suivante :

- On place deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  en contact aux ordonnées 1 et 2 respectivement, et de hauteur au moins  $n$ .
- Supposons que les triangles  $T_1, \dots, T_{k-1}$  sont déjà placés. On note  $g_k$  l'abscisse du point d'ordonnée  $k$  sur l'arête droite du triangle  $T_{\pi_3(k)}$ ,  $d_k$  l'abscisse du point d'ordonnée  $k$  sur l'arête gauche du triangle  $T_{\pi_2(k)}$ , et on définit  $m_k = \alpha g_k + (1 - \alpha) d_k$  (ici  $\alpha$  est un paramètre de  $[0, 1]$  qui sera choisi ultérieurement). On définit alors  $T_k$  comme le triangle de sommets  $(g_k, k)$ ,  $(m_k, \pi_1(k))$ , et  $(d_k, k)$ .

Un exemple est présenté sur la figure 1.

- (1) Donner le résultat de l'algorithme sur la triangulation de la figure 4 (gauche), avec  $\alpha = 1/4$ .
- (2) Expliquer rapidement pourquoi l'ensemble de triangles  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  donne une représentation par contact de triangles du graphe  $G$ .
- (3) Comment choisir le paramètre  $\alpha$  pour obtenir des triangles isocèles / rectangles ?
- (4) En déduire que toute triangulation peut être représentée par un graphe de contact de  $\perp$  ou de  $\lambda$ . Voir figure 2.

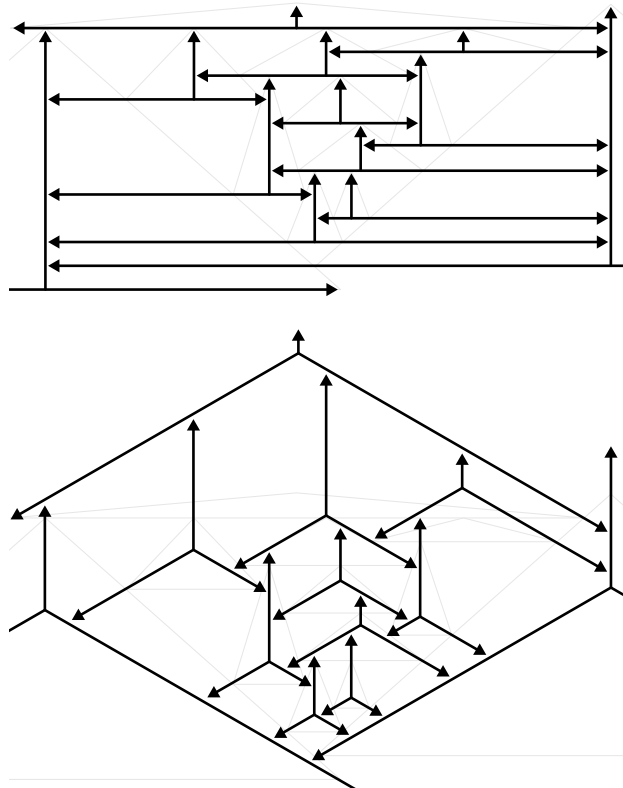


FIGURE 2. Systèmes de contact de  $\perp$  (haut) et de  $\lambda$  (bas).

## 2. REALISATIONS DELAUNAY ET TD-DELAUNAY

**2.1. Angles opposés dans la triangulation de Delaunay.** On considère un ensemble de points  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$  en position générale (pas de quadruplet cocyclique). On rappelle que le *diagramme de Voronoi* de  $\mathbf{P}$  est le diagramme  $\text{Vor}(\mathbf{P}) = \{\text{Vor}(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \mid \mathbf{p} \in \mathbf{P}\}$  formé par les régions de Voronoi  $\text{Vor}(\mathbf{p}, \mathbf{P}) := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{q}\| \text{ pour tout } \mathbf{q} \in \mathbf{P}\}$ . Autrement dit,  $\text{Vor}(\mathbf{P})$  décompose le plan  $\mathbb{R}^2$  en régions ayant le même plus proche voisin dans  $\mathbf{P}$ . On rappelle aussi que la *triangulation de Delaunay*  $\text{Del}(\mathbf{P})$  de  $\mathbf{P}$  est la triangulation duale du diagramme de Voronoi  $\mathbf{P}$  : ses sommets sont les points de  $\mathbf{P}$  et deux sommets  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}$  sont reliés par une arête si leurs régions de Voronoi  $\text{Vor}(\mathbf{p}, \mathbf{P})$  et  $\text{Vor}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  s'intersectent. Voir figure 3.

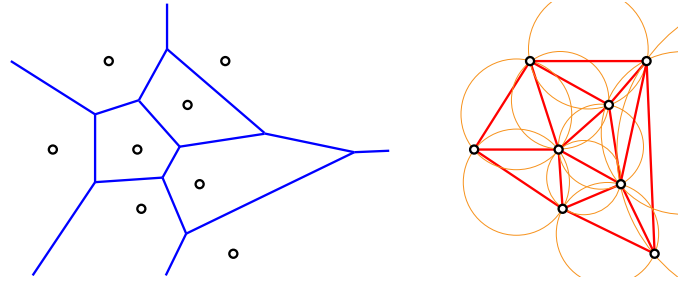


FIGURE 3. Le diagramme de Voronoi  $\text{Vor}(\mathbf{P})$  (gauche) et la triangulation de Delaunay  $\text{Del}(\mathbf{P})$  (droite) d'un ensemble de points  $\mathbf{P}$ .

- (1) Montrer que l'arête  $\mathbf{pq}$  est dans la triangulation de Delaunay si et seulement si il existe un cercle passant par  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  et n'encerclant aucun point de  $\mathbf{P}$ . Montrer de même que le triangle  $\mathbf{pqr}$  est dans la triangulation de Delaunay si et seulement si le cercle circonscrit à  $\mathbf{pqr}$  n'encercle aucun point de  $\mathbf{P}$ .
- (2) En déduire que si  $\mathbf{pq}$  est une arête interne de  $\text{Del}(\mathbf{P})$ , alors la somme des angles opposés à  $\mathbf{pq}$  dans les deux triangles de  $\text{Del}(\mathbf{P})$  contenant  $\mathbf{pq}$  est inférieure ou égale à  $\pi$ .

**2.2. Une triangulation non-Delaunay.** On considère la carte triangulée  $M$  donnée sur la figure 4 (gauche) ci-dessous :

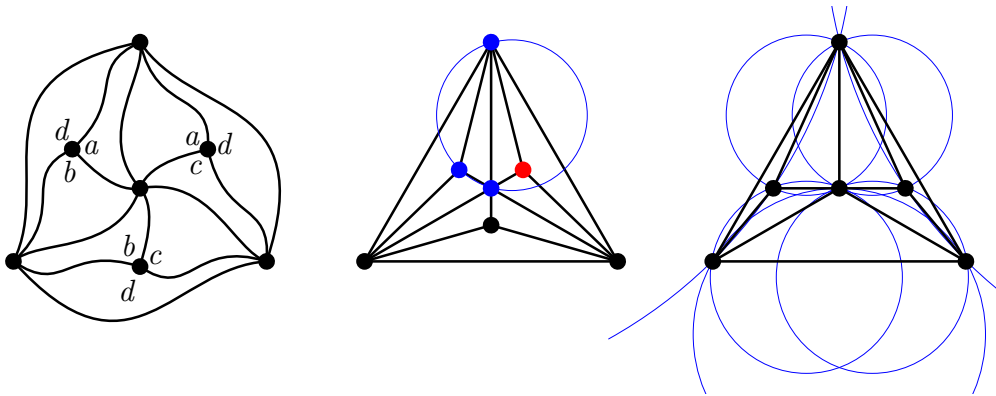


FIGURE 4. Une carte triangulée  $M$  (gauche), une réalisation géométrique de  $M$  (milieu) qui n'est pas Delaunay (le point rouge viole le cercle circonscrit aux points bleus), et une réalisation de Delaunay de  $M$  privée d'un sommet (droite).

On voudrait trouver une réalisation de  $M$  sous la forme d'une triangulation de Delaunay.

- (1) Montrer que si  $M$  admet une réalisation de Delaunay, alors la somme des angles marqués  $a$ ,  $b$  ou  $c$  dans cette réalisation de  $M$  vaut au plus  $3\pi$ .
- (2) En déduire que l'un des angles marqués  $d$  vaut au moins  $\pi$  et conclure.

On observe cependant que la carte triangulée obtenue en retirant l'un des sommets de  $M$  admet une réalisation de Delaunay, voir figure 4 (right).

2.3. **Caractérisation des triangulations de Delaunay empilées.** On dit qu'une triangulation  $T$  est *empilée* si :

- $T$  est réduite à un triangle, ou
- $T$  s'obtient à partir d'une triangulation empilée en raffinant un triangle  $\mathbf{pqr}$  en trois triangles  $\mathbf{pqt}$ ,  $\mathbf{qrt}$ ,  $\mathbf{prt}$  (on peut imaginer qu'on empile un tétraèdre aplati  $\mathbf{pqrt}$  sur le triangle  $\mathbf{pqr}$ ).

Les figures 4 et 5 donnent des exemples de triangulations empilées.

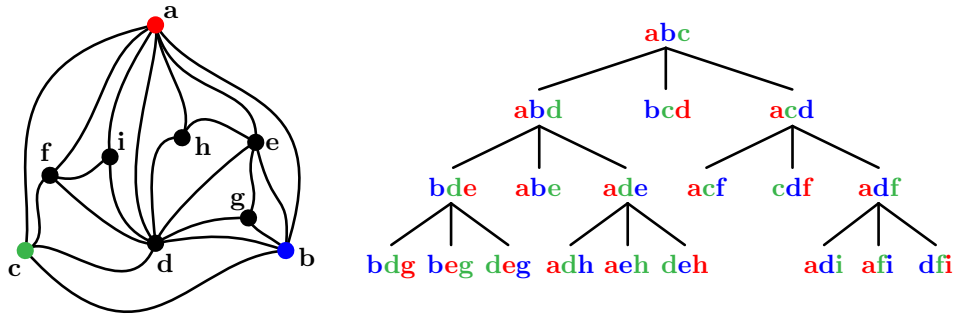


FIGURE 5. Une triangulation empilée (gauche) et son arbre de construction (droite).

On appelle *arbre de construction* de  $T$  l'arbre dont les noeuds correspondent aux triangles de  $T$  et dont les fils du triangle  $\mathbf{pqr}$  sont les trois triangles  $\mathbf{pqt}$ ,  $\mathbf{qrt}$ ,  $\mathbf{prt}$  qui le raffinent. Notez le coloriage utilisé sur les trois lettres de chaque sommet de l'arbre de construction de  $T$ . Voir figure 5.

- (1) Quel est le nombre d'arêtes et de triangles d'une triangulation empilée à  $n + 3$  sommets ? Vos résultats correspondent-ils à ce que donne la formule d'Euler ?
- (2) On considère une triangulation de Delaunay  $T$  avec un sommet interne  $\mathbf{t}$  de degré 3, et on note  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$  les trois sommets adjacents à  $\mathbf{t}$ , et  $R$  l'ensemble des triangles de  $T$  distincts de  $\mathbf{pqt}$ ,  $\mathbf{qrt}$  et  $\mathbf{prt}$ . Comme  $\mathbf{t}$  est à l'extérieur de tous les cercles circonscrits aux triangles de  $R$ , il existe un petit disque  $D$  de centre  $\mathbf{t}$  n'intersectant pas les cercles circonscrits aux triangles de  $R$ . On choisit deux nouveaux points  $\mathbf{u}$  dans  $D \cap \mathbf{pqt}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $D \cap \mathbf{prt}$  tous les deux sur la tangente au cercle circonscrit à  $\mathbf{qrt}$  en  $\mathbf{t}$ . Montrer que la triangulation empilée obtenue en raffinant  $\mathbf{pqt}$  avec le point  $\mathbf{u}$  et/ou  $\mathbf{prt}$  avec le point  $\mathbf{v}$  est encore une triangulation de Delaunay.
- (3) En déduire qu'une triangulation empilée est réalisable par une triangulation de Delaunay si et seulement si l'arbre obtenu en effeuillant de son arbre de construction n'a aucun sommet ternaire.
- (4) Comment étendre ces résultats en dimension supérieure ?

2.4. **Réalisation TD-Delaunay.** En utilisant les forêts de Schnyder, on a vu que toute carte triangulée admet une réalisation TD-Delaunay (*i.e.* par une triangulation de Delaunay pour la distance triangulaire).

- (5) Montrer qu'une triangulation empilée admet une unique forêt de Schnyder. On décrira l'unique étiquetage des angles de Schnyder et l'unique forêt de Schnyder.
- (6) Décrire des coordonnées (entières) explicites d'une triangulation TD-Delaunay réalisant une triangulation empilée en utilisant l'arbre de construction. Illustrer sur la triangulation de la figure 4 (gauche).