Combinatoire des polytopes
Examen du 21/02/2020

Les notes de cours, les TDs (et leurs corrections), et vos notes personnelles sont autorisées. Les appareils électroniques sont interdits (en particulier les téléphones portables). Il est demandé de répondre sur des feuilles simples.

Les exercices de cet énoncé sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Attention à bien noter les numéros d'exercice et de questions devant vos réponses.

La précision des réponses, la qualité de la rédaction, et les efforts de présentation seront pris en compte dans la notation.

Exercice 1 (p-séquences)**.** Pour un polytope P, soit $p_k(P)$ le nombre de 2-faces k-gonales de P pour tout $k \geq 3$.

(1) Montrer que pour un 3-polytope simple P, on a

$$\sum_{k \geq 3} (6-k) \cdot p_k(P) = 12.$$

(2) Montrer que tout 3-polytope simple contient au moins quatre faces ayant chacune au plus cinq arêtes.

(3) Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $(p_3(P), p_4(P), p_5(P))$ pour tous les 3-polytopes simples P. Montrer que $\mathcal{C}$ est un polyèdre et donner ses descriptions comme intersection de demi-espaces et comme polytope et cone de recession.

Exercice 2 (Permutaèdre)**.** Pour $n \geq 1$, le *permutaèdre* $\mathsf{Perm}(n)$ est défini comme l'enveloppe convexe des points $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ pour toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(1) Dessiner les permutaèdres $\mathsf{Perm}(1)$, $\mathsf{Perm}(2)$ and $\mathsf{Perm}(3)$.

(2) Quelle est la dimension intrinsèque de $\mathsf{Perm}(n)$? Justifier.

(3) Quel est le nombre de sommets de $\mathsf{Perm}(n)$? Justifier.

(4) Pour $\varnothing \neq I \subsetneq [n]$, montrer que l'inégalité $\sum_{i \in I} x_i \geq |I|(|I|+1)/2$ définit une facette F_I de $\mathsf{Perm}(n)$ dont le type combinatoire est celui du produit cartésien $\mathsf{Perm}(|I|) \times \mathsf{Perm}(n - |I|)$.

Une *partition ordonnée* de $[n]$ est une partition $[n] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ où les parts sont ordonnées (mais l'ordre des éléments à l'intérieur de chaque part n'est pas important). On note une telle partition $I_1|I_2|\dots|I_k$. Par exemple, les partitions ordonnées 12|35|4 et 4|12|35 sont distinctes puisqu'elles ont les mêmes parts mais dans un ordre différent, alors que les partitions ordonnées 12|35|4 et 21|53|4 sont les mêmes.

(5) Montrer que, pour une partition ordonnée $\pi = I_1|I_2|\dots|I_k$, l'intersection des facettes F_{I_1}, $F_{I_1 \cup I_2}$, $\dots$, $F_{I_1 \cup \dots \cup I_{k-1}}$ définit une face F_π de $\mathsf{Perm}(n)$ de dimension $n-k$. Décrire la combinatoire de F_π.

(6) Inversement, étant donné un vecteur non nul $c = (c_1, \dots, c_n)$, décrire (en terme des coordonnées de c) la partition ordonnée π telle que F_π est la face de $\mathsf{Perm}(n)$ minimisant c.

(7) Décrire le treillis des faces de $\mathsf{Perm}(n)$.

(8) Soient $k, k_1, \dots, k_p$ et $n, n_1, \dots, n_p$ des entiers tels que $k = k_1 + \dots + k_p$ et $n = k_1 n_1 + \dots + k_p n_p$. Quel est le nombre de faces de $\mathsf{Perm}(n)$ dont le type combinatoire est $\mathsf{Perm}(n_1)^{k_1} \times \dots \times \mathsf{Perm}(n_p)^{k_p}$?

Exercice 3 (Sommants de Minkowski). La somme de Minkowski $P+Q$ de deux polytopes $P, Q \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble $P+Q = \{p+q \mid p \in P, q \in Q\}$. On dit que Q est un *sommant de Minkowski* de P (noté $Q \preceq P$) si il existe un polytope R tel que $P = Q + R$.

(1) Caractériser la condition $Q \preceq P$ quand Q et P sont de dimension 1.

(2) Montrer que si $P \preceq Q$ et $Q \preceq P$, alors $P = Q + t$ pour un $t \in \mathbb{R}^d$.

(3) Pour $u \in \mathbb{R}^d \smallsetminus 0$, soit P^u la face de P maximisée dans la direction u. Montrer que si $Q \preceq P$ alors $Q^u \preceq P^u$.

(4) Caractériser les sommants de Minkowski d'un polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Pour cela, on étiquette ses sommets par $p_1, \dots, p_n$ cycliquement, et on considère ses directions d'arêtes $v_i = p_i - p_{i-1}$ pour tout $1 \le i \le n$ (avec la convention $p_0 = p_n$).

- Montrer que tout polygone avec exactement les mêmes directions d'arêtes que P est un translaté de P.
- Caractériser les valeurs $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ telles qu'il existe un polygone $Q \subset \mathbb{R}^2$ ayant les directions d'arêtes $\lambda_i \cdot v_i$ (on fixe $\lambda_i = 0$ si aucun multiple de v_i n'apparaît comme direction d'arête de Q).
- Montrer que si $Q \preceq P$, alors ses directions d'arêtes sont de la forme $\lambda_i \cdot v_i$ pour $0 \le \lambda_i \le 1$.
- Montrer que $Q \preceq P$ si et seulement si ses directions d'arêtes sont de la forme $\lambda_i \cdot v_i$ pour $0 \le \lambda_i \le 1$.

(5) Montrer que $Q \preceq P$ si et seulement si

(i) $\dim Q^u \le \dim P^u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d \smallsetminus 0$, et
(ii) $Q^u \preceq P^u$ dès que $\dim P^u = 1$.

Pour montrer le sens réciproque,

- Construire une fonction $p_i \mapsto q_i$ qui associe un sommet $q_i \in Q$ à tout sommet $p_i \in P$.
- Définir $R = \mathrm{conv}\{r_i = p_i - q_i\}$.
- Montrer que $P = Q + R$ (par contradiction).

(6) Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, soit

$$\mathsf{Perm}(a) = \mathrm{conv}\left\{(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \;\middle|\; \sigma \in \mathfrak{S}_n\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Montrer qu'il y a un $\lambda > 0$ tel que $\lambda \cdot \mathsf{Perm}(a) \preceq \mathsf{Perm}(n)$, où $\mathsf{Perm}(n)$ est le permutaèdre défini dans l'exercice précédent.

Exercice 4 (Suspension d'un point). Soit $V = \left(\binom{p_1}{1}, \dots, \binom{p_n}{1}\right) \in \mathbb{R}^{(d+1)\times n}$ une configuration de vecteurs obtenue par homogénéisation des n sommets d'un d-polytope P. Soit $G = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^{(n-d-1)\times n}$ le dual de Gale de cette configuration.

(1) Soit $G' = (g'_0, g'_1, \dots, g'_n)$ la configuration de vecteurs avec $g'_0 = \frac{g_1}{2}$, $g'_1 = \frac{g_1}{2}$ et $g'_i = g_i$ pour $2 \le i \le n$. Expliquer pourquoi G' est le dual de Gale (de la configuration de vecteurs obtenue par homogénéisation des sommets) d'un polytope P'. Quelle est la dimension de P'?

(2) Décrire les faces de P' (par rapport à celles de P).

(3) Décrire l'opération géométrique qui transforme P en P'. Elle est appelée la *suspension du point* p_1 dans P.

(4) Tout polytope combinatoirement équivalement à P' est-il obtenu par suspension d'un point d'un polytope combinatoirement équivalent à P?

(5) Montrer que P' a une figure de sommet combinatoirement équivalente à P.

(6) Argumenter que l'espace de réalisation de P' est stablement équivalent à l'espace de réalization de P. (On ne demande que les arguments principaux, sans écrire une preuve formelle complète.)