Combinatoire des polytopes
DM 1 – Produits cartésiens et polytopalité

Le *produit cartésien* de deux graphes G et H est le graphe $G \times H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ et l'ensemble des arêtes est

$$\begin{aligned} E(G \times H) &= \big(V(G) \times E(H)\big) \cup \big(E(G) \times V(H)\big) \\ &= \big\{\{(v,w),(v,w')\} \;\big|\; v \in V(G) \text{ et } \{w,w'\} \in E(H)\big\} \\ &\quad \cup \big\{\{(v,w),(v',w)\} \;\big|\; \{v,v'\} \in E(G) \text{ et } w \in V(H)\big\}. \end{aligned}$$

Voici un exemple de produit cartésien de deux graphes :

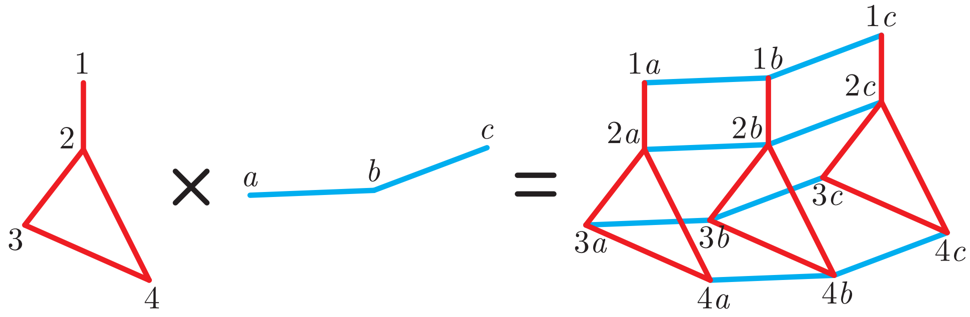

Figure 1: Produit cartésien de deux graphes.

[Q 0.0] Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de $G \times H$ en fonction de ceux de G et H.

On dit qu'un graphe G est *polytopal* lorsqu'il existe un polytope dont le graphe est G. Le but du problème est d'étudier la polytopalité du produit cartésien de deux graphes.

1 Graphe du produit cartésien de deux polytopes

Le *produit cartésien* de deux polytopes $P \subseteq \mathbb{R}^d$ et $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ est le polytope

$$P \times Q := \left\{ (p,q) \in \mathbb{R}^{d+e} \;\middle|\; p \in P, q \in Q \right\}.$$

Dans cette partie, on décrit la combinatoire (*i.e.* les faces) du produit cartésien de $P \times Q$ en fonction de la combinatoire de P et de Q.

[Q 1.1] Donner la description par sommets et la description par inégalités du polytope $P \times Q$ en fonction de celles des polytopes P et Q. Justifier.

[Q 1.2] Plus généralement, montrer que les k-faces de $P \times Q$ sont précisément les produits cartésiens de la forme $F \times G$ où F est une i-face de P et G est une j-face de Q avec $k = i + j$. Pour justifier, on donnera explicitement un hyperplan support de $F \times G$ en fonction des hyperplans supports de F et G.

[Q 1.3] En déduire que le graphe du produit cartésien $P \times Q$ est précisément le produit cartésien des graphes de P et Q.

On a donc montré que le produit cartésien de deux graphes polytopaux est automatiquement polytopal. Cette observation soulève deux questions que l'on étudie dans la suite du problème :

- Quelles sont les dimensions possibles d'un polytope dont le graphe est le produit cartésien de graphes de polytopes de dimension d et e ?
- Le produit cartésien de deux graphes non-polytopaux peut-il être polytopal ?

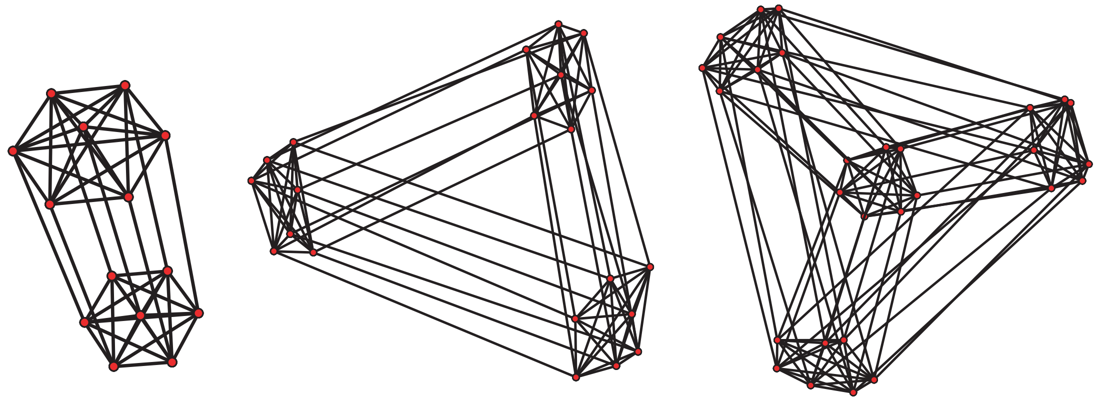

Figure 2: Produit cartésiens de graphes complets $K_7 \times K_m$ pour $m = 2, 3, 4$.

2 Produits de graphes complets

On considère un r-uplet $\underline{n} := (n_1, \dots, n_r)$ d'entiers positifs et on s'intéresse au produit cartésien des graphes complets correspondants $K_{\underline{n}} := K_{n_1} \times K_{n_2} \times \cdots \times K_{n_r}$. La figure 2 donne quelques exemples. Puisqu'un graphe complet est polytopal, la question Q 1.3 assure que $K_{\underline{n}}$ est polytopal. Dans cette partie, on cherche à minimiser la dimension d'un polytope réalisant $K_{\underline{n}}$.

[Q 2.1] Quelle est la dimension du produit de simplexes réalisant $K_{\underline{n}}$?

[Q 2.2] Montrer que le produit de polytopes cycliques $C_4(n_1) \times \cdots \times C_4(n_r)$ réalise $K_{\underline{n}}$. Quelle est sa dimension ?

Pour améliorer cette dimension, on considère la fonction $\chi_r : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{2r+2}$ définie par

$$\chi_r(a_1, \dots, a_r) := \left(\sum_{i \in [r]} a_i \ , \ \sum_{i \in [r]} a_i^2 \ , \ \dots \ , \ \sum_{i \in [r]} a_i^{2r+2} \right) \in \mathbb{R}^{2r+2}.$$

On fixe alors arbitrairement r ensembles disjoints $I_1, \dots, I_r$ de réels avec $|I_i| = n_i$ pour tout $i \in [r]$ et on définit le polytope

$$R_{\underline{n}} := \mathrm{conv}\,\{\chi_r(a_1, \dots, a_r) \mid a_1 \in I_1, \dots, a_r \in I_r\} \subseteq \mathbb{R}^{2r+2}.$$

Dans les questions qui suivent, on montre que le graphe du polytope $R_{\underline{n}}$ est $K_{\underline{n}}$.

[Q 2.3] Soit $e = \{(p_1, \dots, p_j, \dots, p_r), (p_1, \dots, q_j, \dots, p_r)\}$ une arête de $K_{\underline{n}}$, avec $p_i \in I_i$ pour tout $i \in [r]$ et $q_j \in I_j$. On note $(c_k)_{k \in \{0, \dots, 2r+2\}}$ les coefficients du polynôme

$$(X - q_j)^2 \prod_{i \in [r]} (X - p_i)^2 = \sum_{k=0}^{2r+2} c_k X^k,$$

et on considère le vecteur $\gamma_e = (c_1, \dots, c_{2r+2}) \in \mathbb{R}^{2r+2}$. Montrer que

$$\langle\, \gamma_e \mid \chi_r(a_1, \dots, a_r) \,\rangle \geq -rc_0$$

pour tout $a_1 \in I_1, \dots, a_r \in I_r$, avec égalité si et seulement si $(a_1, \dots, a_r) \in e$. En déduire que $K_{\underline{n}}$ est inclus dans le graphe de $R_{\underline{n}}$.

[Q 2.4] Montrer que si π est une projection et P, Q sont deux polytopes tels que $Q = \pi(P)$, alors les faces de Q sont toutes des projetés de faces de P. En observant que $R_{\underline{n}}$ est un projeté de $C_{2r+2}(n_1) \times \cdots \times C_{2r+2}(n_r)$, en déduire que le graphe du polytope $R_{\underline{n}}$ est exactement $K_{\underline{n}}$.

En fait, il existe des polytopes de dimension encore plus petite réalisant $K_{\underline{n}}$, mais leur construction dépasse le cadre de ce devoir.

3 Produits polytopaux de graphes non-polytopaux

Dans cette partie, on considère deux graphes G, H qui ne sont pas nécessairement polytopaux, et on veut déterminer si leur produit $G \times H$ peut quand même être polytopal.

[Q 3.1] En imitant les exemples de la figure 3, montrer que

(i) le produit d'un cycle par un chemin et

(ii) le produit d'un segment par une triangulation d'un n-gone convexe

sont toujours polytopaux.

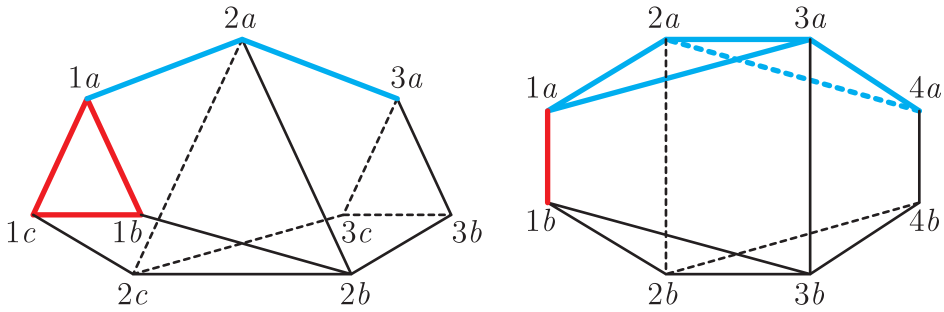

Figure 3: Produit polytopal de graphes non-polytopaux.

Dans cette partie, on généralise l'exemple de Q 3.1(ii) à tout produit d'un graphe polytopal par le graphe d'une subdivision régulière d'un polytope. On considère donc deux graphes G et H tels que

- il existe un polytope $P \subseteq \mathbb{R}^d$ dont G est le graphe,
- il existe un polytope $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ et une fonction hauteur $\omega : V(Q) \to \mathbb{R}$ tels que H est le graphe de l'enveloppe convexe supérieure de l'ensemble de points $\{(q, \omega(q)) \mid q \in V(Q)\}$ de $\mathbb{R}^{e+1}$.

On définit $\mu(p,q) := (\omega(q) \cdot p, q) \in \mathbb{R}^{d+e}$ pour tout $p \in P$ et $q \in Q$. On considère alors le polytope

$$R := \operatorname{conv}\{\mu(p,q) \mid p \in V(P), q \in V(Q)\} \subseteq \mathbb{R}^{d+e}.$$

Pour comprendre le graphe de R, on commence par comprendre ses facettes.

[Q 3.2] Soit G une facette de Q définie par l'inégalité $\langle \psi \mid y \rangle \leq 1$, où $\psi \in \mathbb{R}^e$. Montrer que l'inégalité $\langle (0, \psi) \mid (x, y) \rangle \leq 1$ définit une facette de R dont l'ensemble des sommets est $\{\mu(p,q) \mid p \in P, q \in G\}$ et qui est isomorphe à $P \times G$.

[Q 3.3] Soit F une facette de P définie par l'inégalité $\langle \phi \mid x \rangle \leq 1$, où $\phi \in \mathbb{R}^d$. Soit C une cellule de la subdivision régulière de Q correspondant à une face de l'enveloppe convexe supérieure de $\{(q, \omega(q)) \mid q \in V(Q)\}$ définie par l'inégalité $\psi_0 \cdot h + \langle \psi \mid y \rangle \leq 1$, où $\psi_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathbb{R}^e$. Montrer que l'inégalité $\psi_0 \langle \phi \mid x \rangle + \langle \psi \mid y \rangle \leq 1$ définit une facette de R dont l'ensemble des sommets est $\{\mu(p,q) \mid p \in F, q \in C\}$ et qui est isomorphe à $F \times C$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des facettes de R décrites aux deux questions précédentes.

[Q 3.4] Vérifier que toute $(d+e-2)$-face de $\mathcal{F}$ est contenue dans précisément deux éléments de $\mathcal{F}$. En déduire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les facettes de R.

[Q 3.5] En déduire que le graphe de R est isomorphe à $G \times H$.

[Q 3.6] Montrer que toute triangulation d'un polygone convexe est le graphe d'une subdivision régulière de ce polygone et en déduire que l'exemple de Q 3.1(ii) est un cas particulier de Q 3.5.

4 Produits cartésiens de polytopes simples

On rappelle qu'un polytope est *simple* lorsque les inégalités définissant ses facettes sont en position générale. Autrement dit, un polytope P de dimension d est simple lorsque tout sommet de P est contenu dans d arêtes de P, ou de manière équivalente lorsque tout sommet de P est contenu dans d facettes de P. Dans ce cas, tout ensemble de j arêtes de P incidentes à un même sommet de P définit une face de dimension j de P.

[Q 4.1] Soit G un graphe régulier de degré d et H un graphe régulier de degré e. Montrer que leur produit $G \times H$ est régulier de degré $d + e$.

[Q 4.2] Montrer que le produit de deux polytopes simples est un polytope simple.

Le but de cette partie est de montrer que si le produit $G \times H$ de deux graphes G et H est le graphe d'un polytope simple, alors G et H sont tous les deux des graphes de polytopes simples. On se donne donc deux graphes G et H réguliers de degré d et e respectivement, et on suppose que $G \times H$ est le graphe d'un polytope R.

[Q 4.3] Montrer que tout 4-cycle induit dans le graphe d'un polytope simple R définit une 2-face de R. (Indication : considérer la 2-face F_a définie par les arêtes $\{a, b\}, \{a, d\}$ et la 2-face F_c définie par les arêtes $\{c, b\}, \{c, d\}$. En étudiant leur intersection, montrer que $F_a = F_c$.)

[Q 4.4] Soit F une facette de R, u un sommet de G et $\{x, y\}$ une arête de H tels que $(u, x) \in F$ et $(u, y) \notin F$. Montrer que pour tout voisin v de u dans G:

- le sommet (v, x) est dans la facette F,
- le sommet (v, y) n'est pas dans la facette F. (Indication : comme le 4-cycle induit $\{u, v\} \times \{x, y\}$ forme une face par Q 4.3, son intersection avec F doit être propre...)

En déduire que $G \times \{x\} \subseteq F$ alors que $(G \times \{y\}) \cap F = \varnothing$.

[Q 4.5] Dans le cadre de la question précédente, on considère le sous-graphe H' de H induit par les sommets x de H tels que $G \times \{x\} \subseteq F$. Montrer que le graphe de F est précisément $G \times H'$.

[Q 4.6] En déduire que le graphe de toute facette de R est soit de la forme $G' \times H$ pour un sous-graphe induit $(d-1)$-régulier G' de G soit de la forme $G \times H'$ pour un sous-graphe induit $(e-1)$-régulier H' de H.

[Q 4.7] En utilisant la question précédente, montrer par induction que G et H sont tous les deux des graphes de polytopes simples.

[Q 4.8] Application : Montrer que le produit d'un segment par le graphe de Petersen n'est pas polytopal.

5 Produits de graphes de cross-polytopes

On considère le graphe $\diamond_n = K_{2\times 2\times \cdots \times 2}$ dont les sommets sont $V(\diamond_n) = \{a_i \mid i \in [n]\} \cup \{b_i \mid i \in [n]\}$ et les arêtes sont $E(\diamond_n) = \binom{V(\diamond_n)}{2} \smallsetminus \big\{\{a_i, b_i\} \bigm| i \in [n]\big\}$. On suppose que $n \geq 2$.

[Q 5.1] De quel polytope de dimension n classique $\diamond_n$ est-il le graphe ? Donner une représentation de ce polytope pour $n = 2, 3$ et 4. Pour $n = 3$ et $n = 4$, on pourra utiliser un diagramme de Schlegel.

[Q 5.2] Donner un polytope de dimension 5 dont $\diamond_4$ est le graphe (indication : considérer l'enveloppe convexe de deux carrés dans des plans affines indépendants de $\mathbb{R}^5$). En supposant qu'il existe un polytope de dimension d dont le graphe est $\diamond_n$, construire de la même manière un polytope de dimension $2d+1$ dont $\diamond_{2n}$ est le graphe. En déduire qu'il existe un polytope de dimension $3.2^{m-1} - 1 = 3n/2 - 1$ réalisant $\diamond_n$ pour $n = 2^m$ avec $m \geq 1$.

[Q 5.3] Le graphe $\diamond_n$ est-il le graphe d'un polytope de dimension $n - 1$?

[Q 5.4] Donner des polytopes réalisant $[0, 1] \times \diamond_n$ pour $n \in \{2, 3\}$. Pour $n = 3$, on donnera deux exemples en montrant d'abord que $\diamond_3$ est le graphe d'une subdivision régulière non-triviale de l'octaèdre.

[Q 5.5] Donner quelques exemples de réalisations de $\diamond_{2^p} \times \diamond_{2^q}$ en précisant leur dimension.