

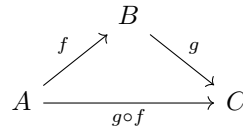
# Isomorphismes et spans

September 20, 2021

## 1 Isomorphismes

Un *isomorphisme*  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme tel qu'il existe  $g : B \rightarrow A$  tel que  $g \circ f = \text{id}_A$  et  $f \circ g = \text{id}_B$ .

1. Montrer que  $g$  tel que  $g \circ f = \text{id}$  et  $f \circ g = \text{id}$  est unique. On le notera  $f^{-1}$ .
2. Montrer que dans la situation



$f \circ g$  est un isomorphisme lorsque  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes.

3. En déduire que  $g$  est un isomorphisme lorsque  $f$  et  $g \circ f$  sont des isomorphismes.
4. En déduire que  $f$  est un isomorphisme lorsque  $g$  et  $g \circ f$  sont des isomorphismes.
5. En déduire l'existence d'une catégorie  $\text{Iso } \mathcal{C}$  dont les objets sont les objets de  $\mathcal{C}$  et dont les flèches sont les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ .
6. Décrire  $\text{Iso}(\mathbf{Ens})$  et  $\text{Iso}(\mathbf{Top})$ .

## 2 Objets terminaux et produits

Un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  est appelé *terminal* lorsque pour tout objet  $X$ , il existe une flèche  $X \rightarrow A$  unique.

1. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des objets terminaux dans  $\mathcal{C}$  alors il existe un isomorphisme unique  $A \rightarrow B$ .
2. Donner des exemples d'objets terminaux dans  $\mathbf{Ens}$ , dans  $\mathbf{Top}$ , dans  $\mathbf{Graph}$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . On définit la catégorie  $\text{Span}(A, B)$  dont

- les objets sont les triplets  $(X, f_X, g_X)$  constitués d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  des deux flèches  $f_X : X \rightarrow A$  et  $g_X : X \rightarrow B$ ,
- les flèches  $(X, f_X, g_X) \rightarrow (Y, f_Y, g_Y)$  sont les flèches  $h : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  telles que

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f_Y} A &= X \xrightarrow{f_X} A \\ X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g_Y} B &= X \xrightarrow{g_X} B \end{aligned}$$

3. Montrer que  $\text{Span}(A, B)$  définit une catégorie.
4. Montrer que la notion de produit cartésien de  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$  coïncide avec la notion d'objet terminal dans  $\text{Span}(A, B)$ .