

# TD1 – Graphes, catégories cartésiennes

Samuel Mimram

6 octobre 2011

## 1 Graphes

1. Montrez que la catégorie  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}, \mathbf{Ens})$  des foncteurs et transformations *naturelles* de la catégorie  $\mathbf{Gr}$  à deux objets 0, 1 et à quatre morphismes

$$\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0 \quad \text{id}_1 : 1 \rightarrow 1 \quad s, t : 1 \rightarrow 0$$

dans la catégorie  $\mathbf{Ens}$  des ensembles et fonctions définit la catégorie des graphes.

2. Que se passe-t-il si on relâche la condition de naturalité?
3. Montrez que la catégorie  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}_2, \mathbf{Ens})$  des foncteurs et transformations naturelles de la catégorie  $\mathbf{Gr}_2$  à trois objets 0, 1, 2 et huit morphismes

$$\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0 \quad \text{id}_1 : 1 \rightarrow 1 \quad \text{id}_2 : 2 \rightarrow 2 \quad s_1, t_1 : 2 \rightarrow 1 \quad s_0, t_0 : 1 \rightarrow 0 \quad s, t : 2 \rightarrow 0$$

avec

$$s_0 \circ s_1 = s_0 \circ t_1 = s \quad \text{et} \quad t_0 \circ s_1 = t_0 \circ t_1 = t$$

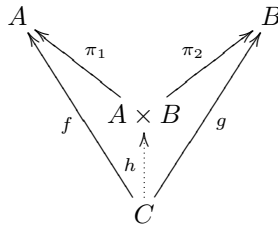
définit une catégorie de 2-graphes et homomorphismes de 2-graphes.

## 2 Catégories cartésiennes

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On rappelle qu'un *produit cartésien* de deux objets  $A$  et  $B$  est la donnée d'un objet noté  $A \times B$ , ainsi que de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A \quad \text{et} \quad \pi_2 : A \times B \rightarrow B$$

tels que pour objet  $C$  pour lequel il existe deux morphismes  $f : C \rightarrow A$  et  $g : C \rightarrow B$ , il existe un unique morphisme  $h : C \rightarrow A \times B$  tel que le diagramme



commute. On rappelle aussi qu'un *objet terminal* dans une catégorie est objet 1 tel que pour tout objet  $A$  il existe un unique morphisme  $f_A : A \rightarrow 1$ . Une catégorie est *cartésienne* lorsqu'elle a les produits finis, c'est-à-dire qu'elle admet un objet terminal et que toute paire d'objet admet un produit.

1. Soit  $(E, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. On lui associe une catégorie dont les objets sont les éléments de  $E$  et telle qu'il existe un unique morphisme entre deux objets  $a$  et  $b$  si  $a \leq b$ . Qu'est-ce qu'un produit dans cette catégorie?

2. Montrez que la catégorie **Ens** des ensembles et fonctions est cartésienne.
3. Montrez que deux objets terminaux dans une catégorie sont nécessairement isomorphes.
4. Montrez de façon similaire que le produit cartésien de deux objets  $A$  et  $B$  est défini à isomorphisme près.
5. Montrez que pour tout objet  $A$  d'une catégorie cartésienne, les objets  $1 \times A$ ,  $A$  et  $A \times 1$  sont isomorphes.
6. Montrez que pour tous objets  $A$  et  $B$  d'une catégorie cartésienne, les objets  $A \times B$  et  $B \times A$  sont isomorphes.
7. Montrez que pour tous objets  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'une catégorie cartésienne, les objets  $(A \times B) \times C$  et  $A \times (B \times C)$  sont isomorphes.
8. La notion de coproduit est duale de celle de produit. Montrez que la catégorie **Ens** admet des coproduits pour toute paire d'objets.
9. Montrez que la catégorie **Rel** des ensembles et relations est cartésienne.
10. Montrez que la catégorie **Cat** des catégories et foncteurs est cartésienne.
11. Étant donnée une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$ , montrez que le produit cartésien définit un foncteur  $B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  pour tout objet  $A$ .
12. Montrez que le produit cartésien définit un foncteur  $A, B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ .