

TD1 – Graphes, catégories cartésiennes

Samuel Mimram

6 octobre 2011

1 Graphes

1. Montrez que la catégorie $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}, \mathbf{Ens})$ des foncteurs et transformations *naturelles* de la catégorie \mathbf{Gr} à deux objets 0, 1 et à quatre morphismes

$$\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0 \quad \text{id}_1 : 1 \rightarrow 1 \quad s, t : 1 \rightarrow 0$$

dans la catégorie \mathbf{Ens} des ensembles et fonctions définit la catégorie des graphes.

2. Que se passe-t-il si on relâche la condition de naturalité?
3. Montrez que la catégorie $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}_2, \mathbf{Ens})$ des foncteurs et transformations naturelles de la catégorie \mathbf{Gr}_2 à trois objets 0, 1, 2 et huit morphismes

$$\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0 \quad \text{id}_1 : 1 \rightarrow 1 \quad \text{id}_2 : 2 \rightarrow 2 \quad s_1, t_1 : 2 \rightarrow 1 \quad s_0, t_0 : 1 \rightarrow 0 \quad s, t : 2 \rightarrow 0$$

avec

$$s_0 \circ s_1 = s_0 \circ t_1 = s \quad \text{et} \quad t_0 \circ s_1 = t_0 \circ t_1 = t$$

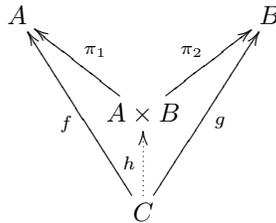
définit une catégorie de 2-graphes et homomorphismes de 2-graphes.

2 Catégories cartésiennes

Soit \mathcal{C} une catégorie. On rappelle qu'un *produit cartésien* de deux objets A et B est la donnée d'un objet noté $A \times B$, ainsi que de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A \quad \text{et} \quad \pi_2 : A \times B \rightarrow B$$

tels que pour objet C pour lequel il existe deux morphismes $f : C \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$, il existe un unique morphisme $h : C \rightarrow A \times B$ tel que le diagramme



commute. On rappelle aussi qu'un *objet terminal* dans une catégorie est objet 1 tel que pour tout objet A il existe un unique morphisme $f_A : A \rightarrow 1$. Une catégorie est *cartésienne* lorsqu'elle a les produits finis, c'est-à-dire qu'elle admet un objet terminal et que toute paire d'objet admet un produit.

1. Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On lui associe une catégorie dont les objets sont les éléments de E et telle qu'il existe un unique morphisme entre deux objets a et b si $a \leq b$. Qu'est-ce qu'un produit dans cette catégorie?

2. Montrez que la catégorie **Ens** des ensembles et fonctions est cartésienne.
3. Montrez que deux objets terminaux dans une catégorie sont nécessairement isomorphes.
4. Montrez de façon similaire que le produit cartésien de deux objets A et B est défini à isomorphisme près.
5. Montrez que pour tout objet A d'une catégorie cartésienne, les objets $1 \times A$, A et $A \times 1$ sont isomorphes.
6. Montrez que pour tous objets A et B d'une catégorie cartésienne, les objets $A \times B$ et $B \times A$ sont isomorphes.
7. Montrez que pour tous objets A , B et C d'une catégorie cartésienne, les objets $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ sont isomorphes.
8. La notion de coproduit est duale de celle de produit. Montrez que la catégorie **Ens** admet des coproduits pour toute paire d'objets.
9. Montrez que la catégorie **Rel** des ensembles et relations est cartésienne.
10. Montrez que la catégorie **Cat** des catégories et foncteurs est cartésienne.
11. Étant donnée une catégorie cartésienne \mathcal{C} , montrez que le produit cartésien définit un foncteur $B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ pour tout objet A .
12. Montrez que le produit cartésien définit un foncteur $A, B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.