TD1 – Graphes, catégories cartésiennes

Samuel Mimram

6 octobre 2011

1 Graphes

1. Montrez que la catégorie $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}, \mathbf{Ens})$ des foncteurs et transformations *naturelles* de la catégorie $\mathbf{Gr}$ à deux objets 0, 1 et à quatre morphismes

$$\mathrm{id}_0 : 0 \to 0 \qquad \mathrm{id}_1 : 1 \to 1 \qquad s, t : 1 \to 0$$

dans la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles et fonctions définit la catégorie des graphes.

2. Que se passe-t-il si on relâche la condition de naturalité ?
3. Montrez que la catégorie $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gr}_2, \mathbf{Ens})$ des foncteurs et transformations naturelles de la catégorie $\mathbf{Gr}_2$ à trois objets 0, 1, 2 et huit morphismes

$$\mathrm{id}_0 : 0 \to 0 \qquad \mathrm{id}_1 : 1 \to 1 \qquad \mathrm{id}_2 : 2 \to 2 \qquad s_1, t_1 : 2 \to 1 \qquad s_0, t_0 : 1 \to 0 \qquad s, t : 2 \to 0$$

avec

$$s_0 \circ s_1 = s_0 \circ t_1 = s \qquad \text{et} \qquad t_0 \circ s_1 = t_0 \circ t_1 = t$$

définit une catégorie de 2-graphes et homomorphismes de 2-graphes.

2 Catégories cartésiennes

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On rappelle qu'un *produit cartésien* de deux objets A et B est la donnée d'un objet noté $A \times B$, ainsi que de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \to A \quad \text{et} \quad \pi_2 : A \times B \to B$$

tels que pour objet C pour lequel il existe deux morphismes $f : C \to A$ et $g : C \to B$, il existe un unique morphisme $h : C \to A \times B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& C \arrow[uul, "f"] \arrow[uur, "g"'] \arrow[u, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}$$

commute. On rappelle aussi qu'un *objet terminal* dans une catégorie est objet 1 tel que pour tout objet A il existe un unique morphisme $f_A : A \to 1$. Une catégorie est *cartésienne* lorsqu'elle a les produits finis, c'est-à-dire qu'elle admet un objet terminal et que toute paire d'objet admet un produit.

1. Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On lui associe une catégorie dont les objets sont les éléments de E et telle qu'il existe un unique morphisme entre deux objets a et b si $a \leq b$. Qu'est-ce qu'un produit dans cette catégorie ?

2. Montrez que la catégorie **Ens** des ensembles et fonctions est cartésienne.
3. Montrez que deux objets terminaux dans une catégorie sont nécessairement isomorphes.
4. Montrez de façon similaire que le produit cartésien de deux objets A et B est défini à isomorphisme près.
5. Montrez que pour tout objet A d'un catégorie cartésienne, les objets $1 \times A$, A et $A \times 1$ sont isomorphes.
6. Montrez que pour tous objets A et B d'une catégorie cartésienne, les objets $A \times B$ et $B \times A$ sont isomorphes.
7. Montrez que pour tous objets A, B et C d'une catégorie cartésienne, les objets $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ sont isomorphes.
8. La notion de coproduit est duale de celle de produit. Montrez que la catégorie **Ens** admet des coproduits pour toute paire d'objets.
9. Montrez que la catégorie **Rel** des ensembles et relations est cartésienne.
10. Montrez que la catégorie **Cat** des catégories et foncteurs est cartésienne.
11. Étant donnée une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$, montrez que le produit cartésien définit un foncteur $B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ pour tout objet A.
12. Montrez que le produit cartésien définit un foncteur $A, B \mapsto A \times B : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.