

TD2 – Adjonctions

Samuel Mimram

7 octobre 2010

On rappelle qu'une *transformation naturelle* $\alpha : F \rightarrow G$ entre deux foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, est une famille de morphismes $\alpha_A : FA \rightarrow GA$ dans \mathcal{D} appelés *composantes* de la transformation, indexée par les objets A de \mathcal{C} , telle que pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\alpha_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\alpha_B} & GB \end{array}$$

Pour tout foncteur $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, on note $T\alpha : T \circ F \rightarrow T \circ G$ la transformation naturelle dont les composantes sont $T\alpha_A$ et, pour tout foncteur $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $\alpha_T : F \circ T \rightarrow G \circ T$ la transformation naturelle dont les composantes sont α_{TA} . Si $\alpha : F \rightarrow G$ et $\beta : G \rightarrow H$ sont deux transformations naturelles, on note $\beta \cdot \alpha : F \rightarrow H$ la transformation naturelle composée, dont les composantes sont $(\beta \cdot \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$.

1 Monade d'exception

On note \mathbf{Ens}_* la catégorie dont les objets sont les *ensembles pointés*, c'est-à-dire les paires (A, a) où A est un ensemble et $a \in A$, et dont les morphismes $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ sont les fonctions $f : A \rightarrow B$ telles que $f(a) = b$. Ici, l'élément distingué d'un ensemble pointé sera vu comme une valeur particulière indiquant une erreur.

1. Décrivez le *foncteur d'oubli* $U : \mathbf{Ens}_* \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui à un ensemble pointé associe l'ensemble sous-jacent.
2. Construisez un foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}_*$ qui soit tel que les ensembles $\text{Hom}(FA, B)$ et $\text{Hom}(A, UB)$ soient isomorphes.
3. [Optionnel] Montrez que les familles d'isomorphismes

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}(FA, B) \rightarrow \text{Hom}(A, UB) \quad \text{et} \quad \psi_{A,B} : \text{Hom}(A, UB) \rightarrow \text{Hom}(FA, B)$$

que vous avez décrites à la question précédente sont naturels. Par « $\varphi_{A,B}$ est naturelle », on entend que pour tous morphismes $f : A \rightarrow A'$ dans \mathbf{Ens} et $g : B \rightarrow B'$ dans \mathbf{Ens}_* le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(FA', B) & \xrightarrow{\phi_{A',B}} & \text{Hom}(A', UB) \\ g \circ - \circ Ff \downarrow & & \downarrow U g \circ - \circ f \\ \text{Hom}(FA, B') & \xrightarrow{\phi_{A,B'}} & \text{Hom}(A, UB') \end{array}$$

commute (dans \mathbf{Ens}). La naturalité de ψ étant définie de façon similaire.

On appelle *adjonction* une telle paire de foncteurs $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ telle qu'il existe une bijection naturelle entre les ensembles $\text{Hom}(FA, B)$ et $\text{Hom}(A, UB)$, ce que l'on écrit parfois

$$\frac{UA \rightarrow B}{A \rightarrow FB}$$

Le foncteur F est alors appelé *adjoint à gauche* de U , ce que l'on note $F \dashv U$.

4. Décrivez une structure de monade sur le foncteur $U \circ F$. On rappelle qu'une *monade* est un endofoncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ muni de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \rightarrow T$ et $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ telles que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 T \circ T \circ T & \xrightarrow{T\mu} & T \circ T \\
 \mu_T \downarrow & & \downarrow \mu \\
 T \circ T & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\eta_x} & T \circ T & \xleftarrow{T\eta} & T \\
 \text{id}_T \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \text{id}_T \\
 & & T & &
 \end{array}$$

5. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction en OCaml pouvant lever une unique exception e (ici A et B sont des types quelconques) et $g : B \rightarrow C$ une fonction pouvant lever une unique exception e' . Construisez une fonction correspondant à la composée de f et g pouvant lever une unique exception e'' .
6. On note \mathbf{Ens}_T la catégorie dont les objets sont les objets de \mathbf{Ens} et les morphismes $f : A \rightarrow B$ sont les morphismes $f : A \rightarrow TB$ de \mathbf{Ens} , la composition de deux morphismes $f : A \rightarrow TB$ et $g : B \rightarrow TC$ étant définie par $g \circ f = \mu_C \circ Tg \circ f$ et les identités par $\text{id}_A = \eta_A$. Vérifiez que les axiomes de catégorie sont satisfaits.
7. Donnez une description explicite de la catégorie \mathbf{Ens}_T .

2 Objets terminaux et produits par adjonctions

- Montrez que la catégorie \mathbf{Cat} admet un objet terminal $\mathbf{1}$. Étant donnée une catégorie \mathcal{C} , montrez que le foncteur terminal $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche) ssi la catégorie \mathcal{C} admet un objet terminal (resp. initial).
- Étant donnée une catégorie \mathcal{C} , montrez que le foncteur diagonal $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a un adjoint à droite (resp. à gauche) ssi la catégorie \mathcal{C} a les produits cartésiens (resp. les coproduits).