TD1 – Catégories cartésiennes

Samuel Mimram

30 septembre 2010

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On rappelle qu'un *produit cartésien* de deux objets A et B est la donnée d'un objet noté $A \times B$, ainsi que de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \to A \quad \text{et} \quad \pi_2 : A \times B \to B$$

tels que pour objet C pour lequel il existe deux morphismes $f : C \to A$ et $g : C \to B$, il existe un unique morphisme $h : C \to A \times B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& C \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[uul, "f"] \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. On rappelle aussi qu'un *objet terminal* dans une catégorie est objet 1 tel que pour tout objet A il existe un unique morphisme $f_A : A \to 1$. Une catégorie est *cartésienne* lorsqu'elle a les produits finis, c'est-à-dire qu'elle admet un objet terminal et que toute paire d'objet admet un produit.

1. Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On lui associe une catégorie dont les objets sont les éléments de E et telle qu'il existe un unique morphisme entre deux objets a et b si $a \leq b$. Qu'est-ce qu'un produit dans cette catégorie ?
2. Montrez que la catégorie **Ens** des ensembles et fonctions est cartésienne.
3. Montrez que deux objets terminaux dans une catégorie sont nécessairement isomorphes.
4. Montrez que le produit cartésien de deux objets A et B est défini à isomorphisme près.
5. Montrez que pour tout objet A d'un catégorie cartésienne, les objets $1 \times A$, A et $A \times 1$ sont isomorphes.
6. Montrez que pour tous objets A et B d'une catégorie cartésienne, les objets $A \times B$ et $B \times A$ sont isomorphes.
7. Montrez que pour tous objets A, B et C d'une catégorie cartésienne, les objets $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ sont isomorphes.
8. La notion de coproduit est duale de celle de produit. Montrez que la catégorie **Ens** admet des coproduits pour toute paire d'objets.
9. Montrez que la catégorie **Rel** des ensembles et relations est cartésienne, ainsi que **Vect** et **Cat**.
10. Généralisez la notion de monoïde à une catégorie cartésienne quelconque de sorte qu'un objet monoïde dans **Ens** soit un monoïde au sens habituel.
11. Un *morphisme de monoïde* entre deux monoïdes (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) d'une catégorie cartésienne est un morphisme $f : A \to B$ compatible avec la structure des monoïdes. Écrivez les deux lois de compatibilité que doivent satisfaire ces morphismes.

12. Définissez la notion de *comonoïde* dans une catégorie cartésienne, qui est duale de celle de monoïde.
13. Montrez que tout objet d'une catégorie cartésienne est canoniquement muni d'une structure de comonoïde commutatif.
14. Redéfinissez la notion de produit dans une catégorie cartésienne en utilisant la structure de comonoïde commutatif définie à la question précédente.