TD9 – Modèles fonctoriels

Samuel Mimram

3 décembre 2009

1 Graphes et préfaisceaux

La catégorie des *préfaisceaux* sur une catégorie $\mathcal{C}$ (souvent notée $\hat{\mathcal{C}}$) est la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$.

1. Rappelez quels sont les objets et les morphismes d'une telle catégorie.
2. Montrez que la catégorie des graphes et morphismes de graphes peut être décrite comme une catégorie de préfaisceaux.

2 Actions de monoïdes et automates

1. Qu'est-ce qu'une catégorie à un seul objet ?
2. Déduisez-en un foncteur $\Sigma : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Cat}$ de la catégorie **Mon** (des monoïdes dans **Ens**) dans **Cat**.
3. Montrez que ce foncteur Σ est plein et fidèle, c'est-à-dire que pour tous monoïdes M et N, $\mathbf{Mon}(M, N) \cong \mathbf{Cat}(\Sigma M, \Sigma N)$.
4. Une *action à gauche* d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ sur un ensemble E est une fonction $a : M \times E \to E$ qui est compatible avec la structure de monoïde sur M (on utilisera la notation $m \bullet e = a(m, e)$). Écrivez les deux équations de compatibilité.
5. Montrez qu'une action à gauche d'un monoïde M peut être vue comme un foncteur $\Sigma(M) \to \mathbf{Ens}$.
6. Expliquez comment un automate déterministe complet sur un alphabet A induit une action à gauche de A^* sur E (l'ensemble de ses états). Caractérisez le langage reconnu par l'automate à l'aide de l'action de monoïde.
7. À tout automate déterministe complet $\mathcal{A}$ sur un alphabet A, on peut donc associer un foncteur $\phi_{\mathcal{A}} : \Sigma(A^*) \to \mathbf{Ens}$. Comment peut-on de même voir de façon fonctorielle un automate non-déterministe complet ?
8. Soit A et A' sont deux ensembles d'alphabet et $s : A \to A'$ une fonction. Un réétiquetage selon s d'un automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet A est l'automate $\mathcal{A}'$ sur l'alphabet A' obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en remplaçant les transitions sur une lettre a par une transition sur $s(a)$. Montrez que $s : A \to A'$ induit un morphisme de monoïdes $s^* : A^* \to A'^*$ tel que $\phi_{\mathcal{A}'} \circ s = \phi_{\mathcal{A}}$.
9. Expliquez pourquoi un foncteur d'une catégorie quelconque (avec plusieurs objets) dans **Ens** peut être informellement vu comme un "automate multisorté".

3 Les catégories dans Span

On rappelle que le *produit fibré* (*pullback* en anglais) de deux morphismes cofinaux $f : B \to D$ et $g : C \to D$ est une paire de morphismes coinitiaux $g' : A \to B$ et $f' : A \to C$ tels que $g' \circ f = f' \circ g$, universels avec cette propriété.

1. Écrire sous forme de diagramme commutatif la propriété universelle d'un produit fibré.
2. Montrez que la catégorie **Ens** a tous les produits fibrés.
3. Montrez que deux produits fibrés d'un même diagramme sont nécessairement isomorphes.
4. Un *span* dans une catégorie est une paire de morphismes coinitiaux $(f : E \to A, g : E \to B)$. On construit une "catégorie" dont les objets sont les ensembles et les morphismes $\varphi : A \to B$ sont les spans $(f : E \to A, g : E \to B)$ dans **Ens**. Expliquez comment composer deux morphismes en utilisant la construction de produit fibré et décrivez explicitement cette composition.
5. Expliquez pourquoi la composition que vous avez définie n'est pas associative. Proposez une notion de morphisme entre spans et montrez que deux compositions associées différemment sont cependant isomorphes.

6. Rappelez la définition d'une 2-catégorie et d'une catégorie monoïdale. En s'inspirant de ces définitions, proposez la définition d'une *bicatégorie*, qui correspond à une catégorie dans laquelle les compositions ne sont associatives qu'à une 2-cellule près. Montrez que la catégorie **Span** est une bicatégorie.
7. Expliquez comment toute 2-catégorie peut être vue comme une bicatégorie. Généralisez la notion de monade dans une 2-catégorie aux bicatégories.
8. Montrez qu'une monade dans **Span** est précisément une catégorie.

4 Une présentation de la catégorie simpliciale

Une présentation (G, R) d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ est la donnée d'un ensemble G de *générateurs* et d'un ensemble $R \subseteq G^* \times G^*$ de *relations* tels que le monoïde M soit isomorphe au monoïde libre G^* engendré par G quotienté par la plus petite congruence contenant les relations.

1. Proposez une présentation pour les monoïdes additifs suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}/2\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$.
2. Comment peut-on prouver que ces présentations sont correctes (i.e. qu'on a bien l'isomorphisme requis) en orientant les relations de chacune des présentations en un système de réécriture normalisant (terminant et confluent) ?

L'objectif de cette partie est de construire une présentation de la *catégorie simpliciale* Δ (en généralisant la notion précédente de présentation d'un monoïde). Les objets de cette catégorie sont les ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ à n éléments et les morphismes sont les fonctions croissantes.

1. Montrez que l'objet $[1]$ est terminal dans cette catégorie.
2. Comment représenter par diagrammes de corde les morphismes $\delta_i^n : [n] \to [n+1]$ et $\varepsilon_i^n : [n+2] \to [n+1]$ (avec $0 \leq i \leq n$) définis par

$$\delta_i^m(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i^n = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Utilisez cette représentation pour déterminer les relations de commutations entre ces morphismes, i.e. trouvez les membres droits des équations suivantes :

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = ? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \varepsilon_i^{n+2} = ? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \delta_i^{n+1} = ? \tag{1}$$

4. Montrez que tout morphisme de la catégorie Δ est égal à une composée des morphismes δ_i^n et ε_i^n.
5. Montrez que deux composées de δ_i^n et ε_i^n représentent le même morphisme si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en utilisant les équations (1).
6. Le *n-simplexe standard* Δ_n est le sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dont les points sont

$$\Delta_n \quad = \quad \{\ (x_1, \ldots, x_n) \quad | \quad x_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1\ \}$$

   Donnez une intuition géométrique des foncteur $\phi : \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Ens}$ (appelés *ensembles simpliciaux*) en voyant les éléments de $\phi([n])$ comme des n-simplexes standards et les morphismes $\phi(\varepsilon_i^n)$ comme des opérateurs décrivant les faces des simplexes. Quelle est l'interprétation géométrique des $\phi(\delta_i^n)$? Quelle est l'interprétation géométrique des équations (1) ? Formellement, cette intuition peut être décrite par un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux dans **Top** (la catégorie des espaces topologiques et fonctions continues).
7. Proposez des ensembles simpliciaux représentant un carré vide, un carré plein, un cube vide, un cube plein, un tore, un ruban de Möbius, etc.