

TD3 – Monades

Samuel Mimram

8 octobre 2009

1 Monade de non-déterminisme

1. On notera \mathbf{CMon} la catégorie des monoïdes commutatifs. Décrivez le foncteur d'oubli $U : \mathbf{CMon} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et montrez qu'il admet un adjoint à gauche F .
2. Donnez une description explicite du monoïde commutatif librement engendré par un ensemble.
3. Définissez une structure de monade sur le foncteur $U \circ F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$.
4. Décrivez la catégorie de Kleisli \mathbf{Ens}_T associée au foncteur $T = U \circ F$ et expliquez pourquoi on peut voir ses morphismes comme des programmes non-déterministes.

2 Monades engendrées par une adjonction

1. On rappelle qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est adjoint à gauche à un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe deux transformations naturelles

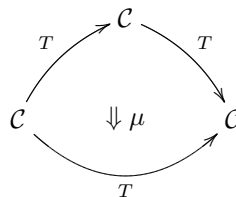
$$\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F \quad \text{et} \quad \varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

appelées respectivement *unité* et *counité* de l'adjonction, telles que

$$\varepsilon_F \cdot F\eta = \text{id}_F \quad \text{et} \quad G\varepsilon \cdot \eta_G = \text{id}_G$$

Donnez les transformations naturelles correspondant aux adjonctions de la Partie 1.

2. On rappelle qu'on peut définir une 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles. Rappelez les compositions verticale et horizontale de cette catégorie. Rappelez aussi ce qu'est la loi d'échange dans une 2-catégorie.
3. Si $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est une monade, la multiplication μ de la monade peut donc être vue comme une 2-cellule



dans cette 2-catégorie. En dualisant ce diagramme, on obtient donc une représentation de la transformation naturelle μ par diagramme de corde. De la même façon, donnez la représentation par *diagrammes de corde* des lois définissant une monade, ainsi que des lois de la question 1.

4. Étant donnée une adjonction $(F, G, \eta, \varepsilon)$, montrez que le foncteur $G \circ F$ peut être muni d'une structure de monade.
5. Décrivez la monade associée à l'adjonction de la Partie 1.
6. [Facultatif] Montrez la propriété évoquée à la question 1.
7. Montrez que si T est une monade sur une catégorie \mathcal{C} alors la catégorie \mathcal{C} est en adjonction avec la catégorie \mathcal{C}_T .

3 Monades en Haskell

Voici un extrait de <http://www.haskell.org/haskellwiki/Monad> :

Monads can be viewed as a standard programming interface to various data or control structures, which is captured by the Monad class. All common monads are members of it:

```
class Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
```

In addition to implementing the class functions, all instances of Monad should obey the following equations:

```
return a >>= k = k a
m >>= return = m
m >>= (\x -> k x >>= h) = (m >>= k) >>= h
```

1. Montrez que cette notion de monade est équivalente à la définition habituelle des monades.
2. Que fait la monade Maybe définie par

```
data Maybe a = Nothing | Just a

instance Monad Maybe where
  return = Just
  Nothing >>= f = Nothing
  (Just x) >>= f = f x
```

3. Que fait la monade List définie par

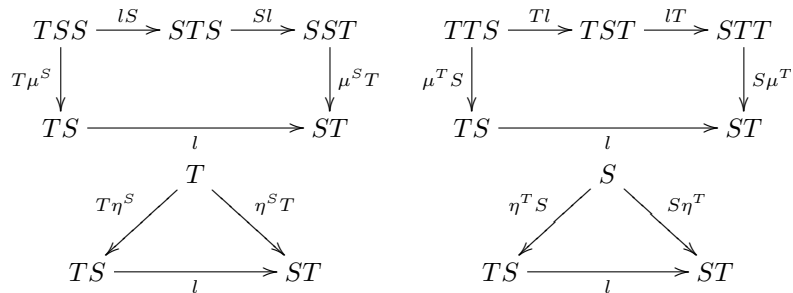
```
instance Monad [] where
  m >>= f = concatMap f m
  return x = [x]
```

4 Loi distributive entre monades

Soient (S, μ^S, η^S) et (T, μ^T, η^T) deux monades sur une même catégorie \mathcal{C} . Une *loi distributive* entre ces deux monades est un transformation naturelle

$$l : TS \rightarrow ST$$

telle que les diagrammes



commutent.

1. Représentez ces diagrammes sous forme de diagrammes de corde.
2. Définissez une structure de monade sur l'endofoncteur ST en utilisant la loi distributive.