TD3 – Monades

Samuel Mimram

8 octobre 2009

1 Monade de non-déterminisme

1. On notera **CMon** la catégorie des monoïdes commutatifs. Décrivez le foncteur d'oubli $U : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ens}$ et montrez qu'il admet un adjoint à gauche F.
2. Donnez une description explicite du monoïde commutatif librement engendré par un ensemble.
3. Définissez une structure de monade sur le foncteur $U \circ F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$.
4. Décrivez la catégorie de Kleisli $\mathbf{Ens}_T$ associée au foncteur $T = U \circ F$ et expliquez pourquoi on peut voir ses morphismes comme des programmes non-déterminstes.

2 Monades engendrées par une adjonction

1. On rappelle qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à gauche à un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe deux transformations naturelles
$$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$
appelées respectivement *unité* et *counité* de l'adjonction, telles que
$$\varepsilon_F \cdot F\eta = \mathrm{id}_F \qquad \text{et} \qquad G\varepsilon \cdot \eta_G = \mathrm{id}_G$$
Donnez les transformations naturelles correspondant aux adjonctions de la Partie 1.
2. On rappelle qu'on peut définir une 2-catégorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles. Rappelez les compositions verticale et horizontale de cette catégorie. Rappelez aussi ce qu'est la loi d'échange dans une 2-catégorie.
3. Si $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une monade, la multiplication μ de la monade peut donc être vue comme une 2-cellule
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, "T"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, bend right, "T"'] & \Downarrow \mu & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$
dans cette 2-catégorie. En dualisant ce diagramme, on obtient donc une représentation de la transformation naturelle μ par diagramme de corde. De la même façon, donnez la représentation par *diagrammes de corde* des lois définissant une monade, ainsi que des lois de la question 1.
4. Étant donnée une adjonction $(F, G, \eta, \varepsilon)$, montrez que le foncteur $G \circ F$ peut être muni d'une structure de monade.
5. Décrivez la monade associée à l'adjonction de la Partie 1.
6. [Facultatif] Montrez la propriété évoquée à la question 1.
7. Montrez que si T est une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$ alors la catégorie $\mathcal{C}$ est en adjonction avec la catégorie $\mathcal{C}_T$.

3 Monades en Haskell

Voici un extrait de `http://www.haskell.org/haskellwiki/Monad` :

```
Monads can be viewed as a standard programming interface
to various data or control structures, which is captured
by the Monad class. All common monads are members of it:

class Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a

In addition to implementing the class functions, all
instances of Monad should obey the following equations:

return a >>= k  =  k a
m >>= return  =  m
m >>= (\x -> k x >>= h)  =  (m >>= k) >>= h
```

1. Montrez que cette notion de monade est équivalente à la définition habituelle des monades.
2. Que fait la monade `Maybe` définie par

```
data Maybe a = Nothing | Just a

instance Monad Maybe where
    return         = Just
    Nothing  >>= f = Nothing
    (Just x) >>= f = f x
```

3. Que fait la monade `List` définie par

```
instance Monad [] where
    m >>= f  = concatMap f m
    return x = [x]
```

4 Loi distributive entre monades

Soient (S, μ^S, η^S) et (T, μ^T, η^T) deux monades sur une même catégorie $\mathcal{C}$. Une *loi distributive* entre ces deux monades est un transformation naturelle

$$l : TS \to ST$$

telle que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} TSS \arrow[r, "lS"] \arrow[d, "T\mu^S"'] & STS \arrow[r, "Sl"] & SST \arrow[d, "\mu^S T"] \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTS \arrow[r, "Tl"] \arrow[d, "\mu^T S"'] & TST \arrow[r, "lT"] & STT \arrow[d, "S\mu^T"] \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "T\eta^S"'] \arrow[dr, "\eta^S T"] & \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\eta^T S"'] \arrow[dr, "S\eta^T"] & \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd}$$

commutent.

1. Représentez ces diagrammes sous forme de diagrammes de corde.
2. Définissez une structure de monade sur l'endofoncteur ST en utilisant la loi distributive.